Attività ArAl
nel biennio della scuola secondaria di secondo grado

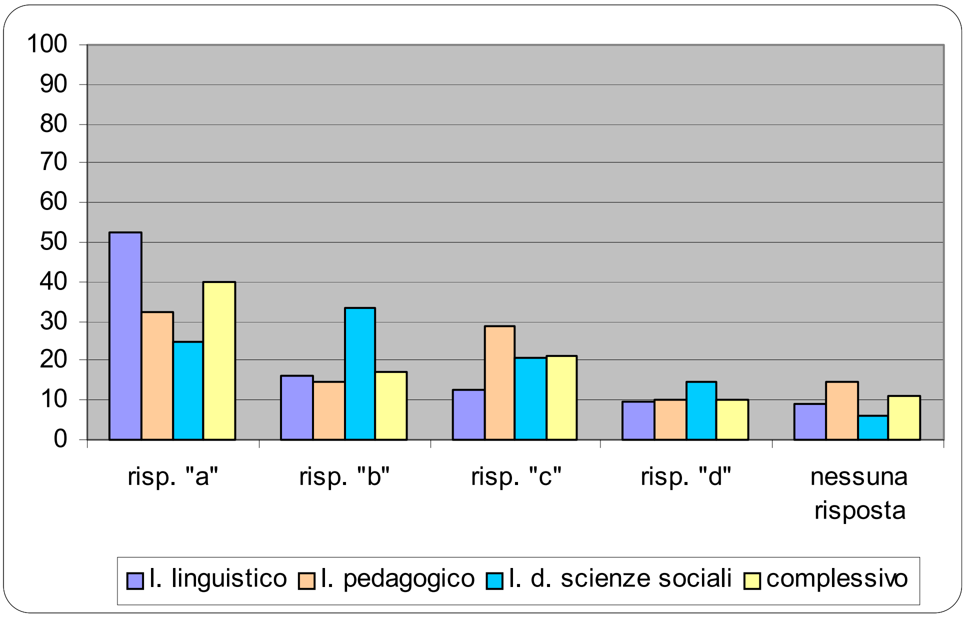
Antonella Giacomin
Istituto Magistrale “Renier” - Belluno

Il progetto ArAl inizia nel secolo scorso con sperimentazioni nelle classi terminali della scuola elementare ed in prima media: nel corso degli anni l’utenza si allarga, investendo tutte le classi della scuola primaria e secondaria inferiore, fino a coinvolgere bambini della scuola materna. Fermarsi alla fine della terza media, quando l’algebra diventa la parte più corposa del programma di matematica, sembrava poco produttivo. Inoltre, passa principalmente attraverso l’algebra la discussione sul raccordo fra la scuola secondaria di primo e di secondo grado, proprio per il ruolo predominante che l’insegnamento dell’algebra assume nel biennio della scuola superiore. Da queste considerazioni è nata la parte di progetto che viene qui descritta, ha alle spalle un solo anno di sperimentazione, ma già si possono evincere dal percorso alcune situazioni significative sul piano didattico.

Lo stato delle cose

Da tre anni viene proposto, in ingresso all’istituto Magistrale, un test per valutare le competenze iniziali in ambito matematico. Si tratta di una serie di domande a risposta chiusa che vertono sui contenuti della scuola secondaria di primo grado.
I dati a mia disposizione riguardano 445 studenti, di cui 189 del liceo linguistico, 208 del liceo socio-psico-pedagogico e 48 del liceo delle scienze sociali.
Riporto alcune domande che riguardano l’algebra con i relativi risultati, in evidenza le risposte corrette. I dati sono espressi in percentuale.

PRIMO QUESITO
Qual è il valore che deve avere x perché sia vera l’uguaglianza $0{,}5x - 1 = 1$?

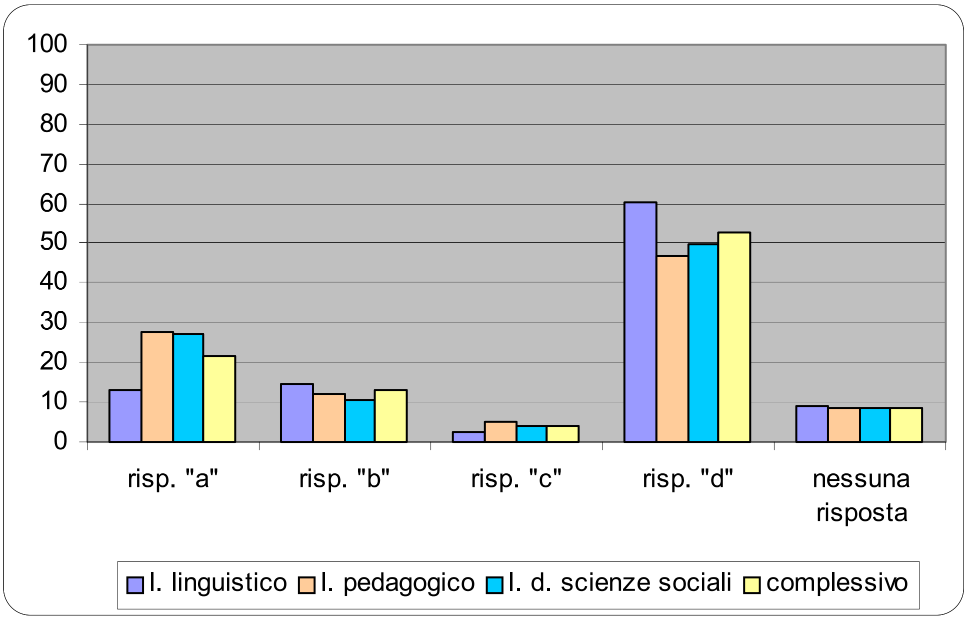


Le risposte:

a) 4 b) 2 c) 0,5 d) 0

Complessivamente, solo il 40% degli studenti risponde correttamente; più del 10% non risponde. Perché un’equazione semplice ha messo in crisi più della metà degli studenti? Certamente una difficoltà è legata alla presenza di un coefficiente decimale, le equazioni proposte in genere hanno coefficienti interi o frazionari, ma la difficoltà maggiore risiede nella scarsa consapevolezza in relazione al significato di equazione.

SECONDO QUESITO
Quali sono i valori che deve avere x perché sia vera l'uguaglianza $x^2 = 4$?

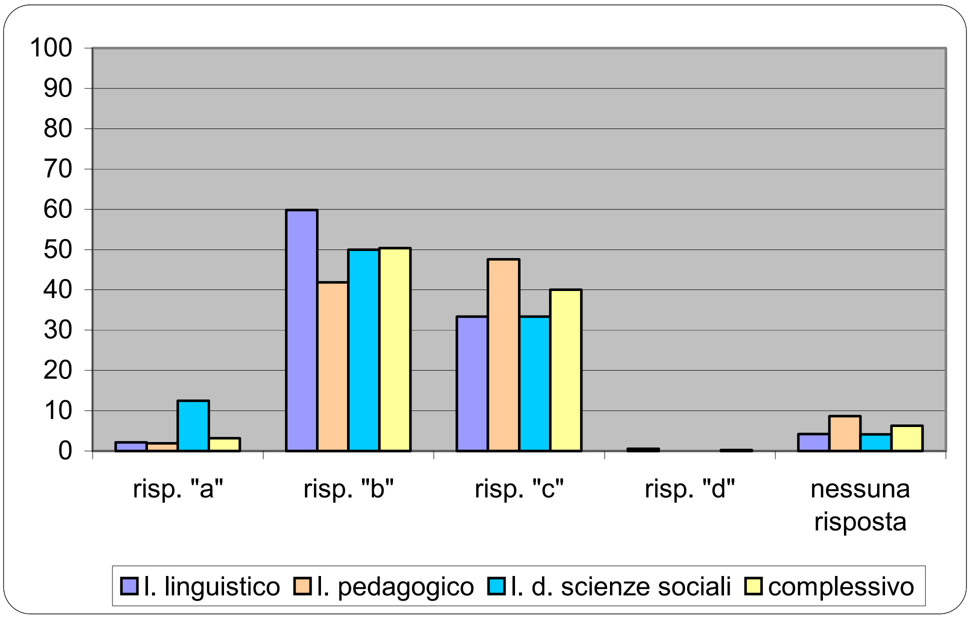


a) 0 e 2 b) 1 e 2 c) 1 e – 2 d) 2 e – 2

Qui la frequenza delle risposte esatte è leggermente più elevata, complessivamente supera, seppur di poco, il 50%. Le altre risposte da cosa sono motivate? Perché quasi il 10% non risponde? Quali sono gli ostacoli che impediscono alla metà degli studenti di rispondere correttamente? Credo che i quesiti proposti siano per gli studenti quesiti non standard, che li disorientano. Evidentemente buona parte di loro ha acquisito alcune abilità, ma solo sul piano tecnico.

TERZO QUESITO

Nella formula y=1+2·x si sa che x è uguale a 5. A quanto è uguale y ?



a) 8 b) 11 c) 15 d) 26

Quella presentata è una semplice funzione lineare, certamente gli studenti hanno incontrato nel corso del loro percorso scolare funzioni di questo tipo. Probabilmente chiedendo loro di disegnare la funzione sul piano cartesiano ortogonale avrebbero rappresentato correttamente la retta. Cosa impedisce loro di utilizzare le loro conoscenze di fronte ad una richiesta formulata in modo diverso rispetto alle consegne standard? Perché le conoscenze non vengono ripescate in modo efficace? Perché tanti studenti sembrano ignorare le regole della precedenza delle operazioni?

Altre informazioni in relazione alle conoscenze in ambito algebrico all'ingresso nella scuola secondaria di secondo grado ci vengono dalle prove INVALSI dell'autunno 2005. Hanno risposto ai quesiti, sempre a risposta chiusa, circa 165 studenti della classe prima, i test erano tarati per scuole con programma di matematica "debole". I risultati pervenutici ci danno la percentuale di risposte esatte per ognuna delle 7 classi prime dell'istituto, i dati che vi fornisco danno la media di queste percentuali.

Quesito numero 23:

Qual è la soluzione dell'equazione 2x = 5?

a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = \frac{5}{2}$ c) $x = 3$ d) $x = 7$

Le 8 classi hanno fornito mediamente il 53,7 % di risposte corrette

Quesito numero 29:

Quale fra le seguenti espressioni algebriche corrisponde all'espressione verbale: "Aggiungendo 3 ad un numero n e moltiplicando il risultato per 4 si ottiene 20"?

a) $4 \cdot n + 3 = 20$ b) $4 \cdot (n + 3) = 20$ c) $4 + n \cdot 3 = 20$ d) $(4 + n) \cdot 3 = 20$

Le 8 classi hanno fornito mediamente l' 81,6 % di risposte corrette; sembra un buon risultato, ma a ben guardare ci sono classi in cui i risultati non sono altrettanto buoni (71%, 65%, 74%)

Questa dunque è la situazione: gli studenti entrano nella scuola secondaria di secondo grado dopo un percorso ricchissimo di contenuti ma mediamente è piuttosto maldisposto nei confronti della matematica, raramente è incuriosito nei confronti delle proposte, il suo sapere è poco consapevole. Inoltre, lo aspetta un biennio in cui si trova di fronte proposte poco attinenti alla realtà, quasi esclusivamente un'algebra affrontata principalmente nei suoi aspetti strettamente tecnici. Non c'è praticamente spazio per niente di diverso. Cosa ne sarà alla fine del biennio?

IL PROGETTO

Il progetto è stato sperimentato da 6 insegnanti della scuola secondaria di secondo grado nelle seguenti scuole:

Istituto magistrale di Belluno:
- classe 1 liceo delle scienze sociali
- classe 1 liceo socio-psico-pedagogico
- classe 2 liceo delle scienze sociali

Istituto professionale "Catullo" di Belluno
- Due classi 1 – sezione turismo

Istituto professionale alberghiero "Dolomieu" di Longarone
- Due classi prime

Sono state progettate 12 schede di lavoro, proposte alle classi (senza valutazione) per essere affrontate da soli o in coppia; ogni scheda è stata poi discussa con gli studenti.

Gli studenti sono, per la maggior parte, studenti deboli in matematica, gli studenti degli istituti professionale escono in genere dalla scuola secondaria di primo grado con la valutazione di sufficiente, per loro la matematica è la disciplina più ostica. All'Istituto magistrale i livelli di partenza sono migliori, anche qui però la matematica non è generalmente amata, tranne in pochi casi isolati, ed anzi la convinzione che "c'è poca matematica" è in genere una delle motivazioni per la scelta di questo tipo di scuola.

I nuclei attorno cui si è lavorato sono due:
- Dalla linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa
  - Per tradurre espressioni
  - Per tradurre relazioni
- Argomentare in ambito algebrico

Ogni scheda ha richiesto mediamente 20 minuti di lavoro individuale o a coppia, e chiedeva in chiusura una riflessione così strutturata:

Ti chiediamo di esprimere un parere su questa scheda: 1. come hai trovato le consegne della scheda? usa una scala da 1 a 10, dove 1= facilissime 10 = difficilissime :________________ 2. Hai incontrato delle difficoltà? ____ 3. Se sì, dove?____ 4. Ti è piaciuta l'attività proposta? usa una scala da 1 a 10, dove 1= non mi è piaciuta per niente 10 = mi è piaciuta moltissimo: Hai osservazioni da fare?

Queste le schede proposte:

Scheda numero 1

Attività: Dal linguaggio naturale al linguaggio formale in ambito numerico

Traduci dalla lingua italiana alla lingua matematica le seguenti frasi
Attento! Non ci interessa che tu calcoli il risultato.
es) aggiungi 7 a 5 diventa $5 + 7$

1) Togli 3 da 7 ____________________
2) Togli a 3 il 7 ____________________
3) Calcola il prodotto di 10 e 5 ____________________
4) Fai il doppio di 13 ____________________
5) Fai il doppio della somma fra 3 e 5 ____________________
6) Fai la somma di 3 col doppio di 5 ____________________
7) Calcola il quadrato del triplo di 2 ____________________
8) Calcola il triplo del quadrato di 4 ____________________
9) Togli 3 dal quadruplo di 15 ____________________
10) Togli il quadruplo di 3 da 15 ____________________

Scheda numero 2

Attività: Dal linguaggio naturale al linguaggio formale in ambito algebrico

Traduci dalla lingua italiana alla lingua matematica le seguenti frasi:

1) Togli x da y ____________________
2) Scrivi il prodotto di a e b ____________________
3) Fai il doppio di n ____________________
4) Fai il doppio della somma di a e b ____________________
5) Fai la somma di a col doppio di b ____________________
6) Scrivi il quadrato di x ____________________
7) Scrivi il quadrato del triplo x ____________________
8) Scrivi il triplo del quadrato di x ____________________
9) Scrivi il successivo di z ____________________
10) Togli t dal quadruplo di s ____________________
11) Togli il quadruplo di t da s ____________________

Scheda numero 3

Attività: Dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale

Traduci dalla lingua matematica alla lingua italiana le seguenti frasi:

1) $\frac{1}{2} \cdot a$ ____

2) $\frac{a}{2}$ ____

3) $a : 2$ ____

4) $x + 3y$ ____

5) $(a + b) \cdot 3$ ____

6) $(a + b)^2$ ____

7) $a^2 + b^2$ ____

Scheda numero 4

Attività: Dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa

Individua le frasi matematiche che corrispondono a queste traduzioni:

1. *La somma di y col cubo del triplo di x*
2. *La somma di 3 con la metà di x*
3. *Il prodotto fra il quadrato di x ed il cubo della differenza fra a e b*

Scegliendole fra le seguenti:

a) $\frac{1}{2}x + 3$

b) $x^2 \cdot (a-b)^3$

c) $y + (3x)^3$

d) $\left[x^2 \cdot (a-b)\right]^3$

e) $(3+x) \cdot \frac{1}{2}$

f) $y + 3x^3$

Scheda numero 5

Attività: Dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico: relazioni fra dati
Traduci dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico le seguenti frasi:

1) a è doppio di b ______________________________

2) a è la metà di b ______________________________

3) a è il successivo di b ______________________________

4) a supera b di 5 unità ______________________________

5) a è il quadrato di b ______________________________

6) il doppio di a è il numero che precede b______________________

Scheda numero 6

Attività: Esprimere relazioni fra dati

Situazione 1

Anna, Beatrice e Clara sono sorelle. Di loro sappiamo che Anna è la maggiore, Beatrice ha 2 anni meno di Anna e 3 anni più di Clara.

a) indica con tre lettere le età delle sorelle e esprimi in formule le relazioni fra le loro età

b) se le tre sorelle assieme hanno 35 anni, sapresti dire qual è l'età di ciascuna di loro? Spiega il tuo ragionamento.

Scheda numero 7

Attività: Esprimere relazioni fra dati

Situazione 2

Nella nostra scuola, gli studenti sono 6 volte i professori.
Scegli due lettere per indicare il numero degli studenti e quello dei professori.
Esprimi con una formula la relazione fra il numero degli studenti e quello dei professori.

Scheda numero 8

Attività: Esprimere relazioni fra dati

Situazione 3

Al bar della scuola, ogni 5 pizzette vendute si preparano 3 caffè.
Scegli 2 lettere per rappresentare il numero delle pizzette ed il numero dei caffè.
Esprimi con una formula la relazione fra il numero delle pizzette e quello dei caffè.

Scheda numero 9

Attività: Argomentare

Se n è dispari, cosa sai dire di:

a) $n + 1$ ____________________

b) $n - 1$ ____________________

c) $2n$ ____________________

d) $3n$ ____________________

e) $2n + 1$ ____________________

f) $3n + 1$ ____________________

g) n^2 ____________________

Scheda numero 10

Attività: Argomentare

SPIEGA I TUOI RAGIONAMENTI

1 - Sai che $a = b + 7$ e che $b = 5$. Che cosa puoi dedurre?

2 – Sai che $a + b = 117$ Che cosa puoi dire di $a + b + 2$

3 – Sai che $n - 318 = 572$ Che cosa puoi dire di $n - 319$

4 – Sai che $a + b = c$ e che $a + b + c = 50$ Che cosa puoi dedurre?

Scheda numero 11

Attività: Argomentare

Come puoi scegliere a e b affinché $27 + a + b$ sia:

a) Pari

b) Dispari

Scheda numero 12

Attività: Argomentare

Sai che n è un numero naturale. Per quali valori di n l'espressione $5n + 3$ risulta:

a) Pari

b) Multipla di 3

c) Multipla di 5

d) Dispari

Per quanto riguarda i contenuti, possiamo mettere in evidenza i seguenti aspetti:

PARTE 1 – DAL LINGUAGGIO NATURALE AL LINGUAGGIO FORMALE E VICEVERSA – ESPRESSIONI

Nella scheda 1 (tradurre in ambito aritmetico) e nella 2 (tradurre in ambito algebrico) sono presenti consegne analoghe, cui gli studenti rispondono in modo diverso. La presenza della lettera li confonde, ad esempio le stesse studentesse di fronte alla consegna "togli 3 dal quadruplo di 15" hanno risposto "(15×4)–3", mentre a "togli t dal quadruplo di s" hanno risposto "$t - (s)^2$. La struttura è identica, la differenza sta nel livello di astrazione. La presenza della lettera evidentemente confonde e disorienta gli studenti più di quanto gli insegnanti immaginino.

Per quanto riguarda il lessico, ci sono parole che molti studenti non conoscono, si evidenziano di fronte a queste parole due atteggiamenti diversi:

"il prodotto" viene confuso con la somma: "il prodotto di a e b" viene tradotto con "$a + b$" in molti protocolli, i ragazzi non ci pensano molto. Infatti, nessuno degli studenti fra quelli che danno questa risposta si mostra consapevole di questa disconoscenza: nessuno dichiara di aver incontrato difficoltà in questa traduzione. L'altra parola sconosciuta è "successivo", ma qui l'atteggiamento è molto diverso: i ragazzi dichiarano di aver incontrato difficoltà in questa traduzione, in genere lasciano in bianco la risposta, l'unica traduzione sbagliata è "$z + z$". Questa è una difficoltà percepita, a differenza della precedente.

Sono presenti con una certa frequenza confusioni fra termini diversi che riguardano prodotti e potenze, che si possono così classificare:

il doppio ↔ il quadrato

il triplo ↔ il cubo

il quadruplo ↔ la quarta potenza oppure il quadrato

Queste difficoltà a livello lessicale si ripresentano, seppur con minor frequenza, anche dopo che se ne è discusso in classe: il significato di questi termini evapora facilmente dalla memoria.

Altra considerazione significativa riguarda la frase "il doppio della somma di a e b": alcuni studenti traducono con "$a \cdot 2 + b \cdot 2$" applicando di fatto la proprietà distributiva, ma dando così una traduzione non fedele.

Altra riflessione è emersa in relazione alla scheda 4. Veniva chiesto di tradurre le frasi:

$\frac{1}{2} \cdot a$ $\qquad \frac{a}{2}$ $\qquad a : 2$

Le tre frasi vengono sempre percepite in modo diverso: in genere, $\frac{1}{2} \cdot a$ viene letta come una moltiplicazione**,** si presentano così diverse traduzioni, non sempre corrette, quali: "moltiplico un mezzo per a" o anche "moltiplica la frazione ½ per a" "moltiplica per un numero la metà di 1" "la metà di un numero moltiplicato per un altro numero" "dividi ½ per a"; le altre due frasi invece vengono percepite diversamente: ad esempio, Isabella scrive: "$\frac{a}{2}$: divido a per 2 in frazione; *a:2* divido a per 2" o anche "$\frac{a}{2}$ fai la metà di 2; a:2 dividi a per 2".

C'è infine da osservare che nella traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio formale prevale una traduzione di tipo procedurale, o anche una pedissequa scrittura in lettere della frase matematica. Ad esempio, $(a + b) \cdot 3$ non è mai il triplo della somma di a e b, ma "fai la somma di a più b e moltiplicalo per 3" o anche "$a + b$ tra parentesi per 3"; $x + 3y$ diventa aggiungo a x $3 \cdot y$. Inoltre, le lettere utilizzate quali variabili vengono spesso caratterizzate nella traduzione con "un numero", quasi che l'articolo indeterminativo rappresentasse anche l'indeterminatezza del valore di a o di b. Così, $x + 3y$ ad esempio diventa "un numero più tre volte un altro numero"

PARTE 2 – DAL LINGUAGGIO NATURALE AL LINGUAGGIO FORMALE E VICEVERSA – RELAZIONI

L'indice di gradimento nelle schede da 1 a 4 era andato gradatamente diminuendo, riprende invece a salire quando si cambia tipologia di prova, affrontando traduzioni di relazioni.

Scheda 5

Traduci dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico le seguenti frasi:
1) *a* è doppio di *b* ______________________________
2) *a* è la metà di *b* ______________________________
3) *a* è il successivo di *b* ______________________________
4) *a* supera *b* di 5 unità ______________________________
5) *a* è il quadrato di *b* ______________________________
6) il doppio di *a* è il numero che precede *b*______________________

La scheda 5 presenta alcune caratteristiche che si possono così riassumere:
"*a* è il successivo di *b*" diventa in un protocollo a/b, in un altro $b - a$
Gli studenti hanno trovato difficoltà anche nella traduzione di "*a* supera *b* di 5 unità", facendolo diventare $a + b = 5$ $a + 5 = b$ $b = a + 5$
Si sono verificati alcuni errori nella traduzione di "il doppio di *a* è il numero che precede *b*", che diventa: $2\,a - b$ ed anche $a2 = -1$
Ma soprattutto molte sono le traduzioni in cui i ruoli di *a* e *b* vengono invertiti, in alcuni casi in tutta la scheda. Così, ad esempio, "*a* è la metà di *b*" diventa $\frac{1}{2}a = b$. La prossima sperimentazione dell'attività potrebbe inserire un'attività di verifica delle frasi nelle due formulazioni naturale e formale, in cui sostituire alcuni valori numerici per verificare l'equivalenza delle due espressioni.
Le difficoltà incontrate non sono in genere riconosciute dagli studenti: alla scheda viene attribuito un livello di difficoltà fra i più bassi.

Scheda 6

Anna, Beatrice e Clara sono sorelle. Di loro sappiamo che Anna è la maggiore, Beatrice ha 2 anni meno di Anna e 3 anni più di Clara.
c) indica con tre lettere le età delle sorelle e esprimi in formule le relazioni fra le loro età
d) se le tre sorelle assieme hanno 35 anni, sapresti dire qual è l'età di ciascuna di loro? Spiega il tuo ragionamento.

La scheda 6 "l'età delle 3 sorelle", presenta una grande varietà di risposte, i 27 protocolli di una delle classi presentano le seguenti caratteristiche:
coloro che traducono correttamente le relazioni fra le età delle sorelle riescono poi a risolvere il problema: sono 15 studenti. Usano le lettere *a b c* oppure *x y z*. Dei 15 studenti, 11 risolvono il problema con un'equazione, 4 per via aritmetica. Solo 1 studentessa sbaglia la traduzione, dove utilizza le lettere *x y z,* e risolve correttamente il problema, utilizzando *a b c*, quasi che le due consegne fossero completamente scollegate fra loro.
I protocolli errati sono 11, e presentano le seguenti caratteristiche:
7 non danno risposte significative
3 simmetrizzano l'informazione: "Beatrice ha 3 anni più di Clara" e lo fanno diventare $c = b + 3$
1 perde il controllo sulle lettere usate, che vengono modificate in itinere ma non dovunque.
Sostanzialmente si può dire che la difficoltà del problema risiede nella traduzione delle relazioni in linguaggio formale, una volta superato questo scoglio il problema diventa semplice.

Scheda 7

Nella nostra scuola, gli studenti sono 6 volte i professori. Scegli due lettere per indicare il numero degli studenti e quello dei professori. Esprimi con una formula la relazione fra il numero degli studenti e quello dei professori.

La scheda 7 presenta minori difficoltà: su 27 protocolli ben 18 sono corretti (lettere utilizzate: 3 *a b*, 4 *s p*, 11 *x y*)e 2 sono parzialmente corretti (prof = x stud = $6x$)
6 risposte sono sbagliate, invertono la relazione (numero dei professori sestuplo rispetto al numero degli alunni.
Significativo un protocollo errato:
S=2
P=12
Numero stud = 6 volte num professori
Solo agganciandosi al concreto del numero questa studentessa riesce a cogliere il senso della frase.

Scheda 8

Al bar della scuola, ogni 5 pizzette vendute si preparano 3 caffè. Scegli 2 lettere per rappresentare il numero delle pizzette ed il numero dei caffè. Esprimi con una formula la relazione fra il numero delle pizzette e quello dei caffè.

La scheda 8 presenta una frequenza molto alta di errore: 28 sono i protocolli analizzati, di questi 21 sono sbagliati:
- 19 protocolli $5p=3c$ dove p è il numero delle pizzette e c il numero dei caffè,
- 1 errato $x = y$
- 1 parzialmente corretto: $\frac{p}{c} = \frac{5}{3} = 1,\overline{6}$ quante pizze ogni caffè (e fin qui va bene), ma poi $c = \frac{5}{3} p$

Ci sono poi 7 risposte esatte: 6 hanno lavorato con i rapporti, traducendo: $\frac{5}{3} = \frac{p}{c}$
Solo 1 ha tradotto $3x = 5y$ dove x è il numero delle pizzette e y il numero dei caffè
In nessuno dei protocolli c'è traccia di verifica

PARTE 3 – ARGOMENTARE IN AMBITO ALGEBRICO
Scheda 9

Se n è dispari, cosa sai dire di: a) $n + 1$ __________ b) $n - 1$ __________ c) $2n$ __________ d) $3n$ __________ e) $2n + 1$ __________ f) $3n + 1$ __________ g) n^2 __________

Gli studenti rispondono abbastanza bene ai quesiti della scheda (21/26), non sono però frequenti i protocolli in cui è presente una argomentazione (classe 1AS: 5/26). Da riflettere sulle seguenti situazioni:
alcuni ragazzi operano in ambito aritmetico, ad esempio:
$n + 1$ fa pari perché $3 + 1 = 4$
oppure

$n + 1$ fa pari esempio $3 + 1 = 4$
Rita, che sbaglia, scrive: ho difficoltà nel capire cosa bisogna fare. Tradotto: da quando in matematica occorre spiegare?
Silvia risponde alle domande con argomentazione ed esempio e nello spazio dedicato ai commenti scrive: "ho incontrato difficoltà nel trovare lo spazio (per scrivere la risposta) e nel avere il tempo di fare gli esempi per trovare le eccezioni" non è chiaro cosa intenda per eccezioni.
Interessanti due protocolli errati:
F.: $2n$ due volte n (vengono date risposte analoghe ad altre richieste)
Mostra che F non ha capito la consegna
S. : $2n+1 = 3n$
Presenta un errore piuttosto frequente, ed inoltre nell'area commenti S esplicita così la sua difficoltà: "non ho capito il perché n dispari".

Scheda 10: 29 protocolli.

SPIEGA I TUOI RAGIONAMENTI			
1 - Sai che $a = b + 7$	e che $b = 5$.	Che cosa puoi dedurre?	
2 – Sai che $a + b = 117$	Che cosa puoi dire di	$a + b + 2$	
3 – Sai che $n — 318 = 572$	Che cosa puoi dire di	$n — 319$	
4 – Sai che $a + b = c$	e che	$a + b + c = 50$	Che cosa puoi dedurre?

Viene percepita come difficile. Non molti risolvono il 4. Da osservare:

- taluni, per esprimere "*a* è uguale a 12" scrivono: "$a = a$ 12" oppure """*a*" = *a* 12"

Usano *a* sia per rappresentare la variabile sia per rappresentare la preposizione. Ma allora, di fronte ad una frase matematica letterale, qual è il senso che attribuiscono alla lettera?

- Nel quesito 4, cui molti non hanno risposto, alcuni deducono:
  $a + b = 25$ $c=25$ $a=12,5$ $b=12,5$
  Le lettere *a* e *b* sono diverse, perché vengono loro attribuiti valori uguali?
  O anche, analogamente, $c = \frac{1}{2}$ $a = \frac{1}{4}$ $b = \frac{1}{4}$ qui il messaggio è lo stesso, ma è da notare l'uso della frazione: è inteso come operatore, ma manca l'argomento su cui opera

Scheda 11

Come puoi scegliere *a* e *b*	affinché	$27 + a + b$	sia:
a) Pari			
b) Dispari			

(29 protocolli) gli studenti ritengono facile questa scheda, ed in effetti riescono ad affrontarla e a dare delle risposte, anche se le argomentazioni raramente sono chiare e complete. 10 persone danno solo delle risposte numeriche: individuano cioè due numeri che rispondano alla consegna, non caratterizzano *a* e *b*. Chi giustifica la scelta dice di aver "messo dei numeri a caso" o di "essere andato per tentativi". Da notare il commento "la consegna per me è incomprensibile forse deve usare termini più semplici", ma non è chiaro quali possano essere i termini troppo difficili.
19 protocolli danno risposte corrette, emergono queste particolarità:
Nella parte a:

- *a* e *b* spesso vengono scelti consecutivi. "scelgo *a* e poi aggiungo o tolgo 1"
- *"a* dispari e *b* pari*"* è una risposta frequente, rara invece *"a* dispari e *b* pari o viceversa*"*

Nella parte b:

- in ordine di frequenza le risposte presenti sono:
  - *a, b* devono essere entrambi pari (8)
  - *a, b* devono essere entrambi dispari (4)

- *a, b* devono essere entrambi pari o dispari consecutivi (1)
- non giustifica (1)
- altro (4)

Gli studenti evidenziano poche difficoltà, relative esclusivamente al linguaggio: “nel spiegare il ragionamento” “nella comprensione del testo”

Scheda 12:

Sai che n è un numero naturale. Per quali valori di n l’espressione $5n + 3$ risulta: a) Pari b) Multipla di 3 c) Multipla di 5 d) Dispari

La scheda risulta abbastanza gradita, tutti danno risposte più o meno corrette e complete. Da segnalare:
L’approccio è esclusivamente induttivo: gli studenti trovano valori che soddisfino le condizioni, alcuni, pochi, caratterizzano questi valori (metto un numero dispari, un numero multiplo di 3). Procedendo per via induttiva non riescono a dare risposta al quesito c, se non “è impossibile”, “non ho trovato numeri che andassero bene”, spesso non c’è risposta. Solo una studentessa motiva l’impossibilità: “moltiplicando 5 per qualsiasi numero da un n° terminante con 0 o 5 e aggiungendo 3 il risultato sarà 3 o 8 quindi non multipli di 5”.
Le difficoltà stanno nella comunicazione: “non so spiegare”

Ma che cosa è emerso dalla sperimentazione? Alcune considerazioni:
- Le consegne: non sempre vengono lette con attenzione, si può dedurre sia dalle domande di chiarimento poste dagli studenti, sia dalle risposte date.
- Il testo: emergono spesso difficoltà nella comprensione di termini anche semplici, a volte non è l’idea matematica che manca, ma la comprensione del messaggio; peggio è quando non c’è consapevolezza di questa difficoltà, lo studente decodifica il messaggio in modo sbagliato costruendo così un sapere basato su misconcetti.
- La valutazione: proporre un lavoro che non prevede valutazione ha il vantaggio di tranquillizzare gli studenti, ma per alcuni lo stimolo, o il timore, della valutazione rappresenta un forte fattore motivante: sono gli studenti meno disponibili a mettersi in gioco, che non colgono in genere le sfide intellettuali loro proposte;
- La discussione collettiva non sempre è partecipata da tutti, i quesiti non sono standard, perciò non danno indicazioni su “come prendere la sufficienza nel compito”, il voto è talvolta l’unica molla che riesce a catturare l’attenzione di alcuni

Per quanto riguarda la parte conclusiva di ogni scheda, quella in cui si chiedeva di valutare difficoltà e gradimento dell’attività, si è potuto osservare che
- il gradimento nei confronti dell’attività è stato piuttosto elevato nelle prime schede, è stata apprezzata la novità della proposta ed il carattere poco tecnico dell’attività
- quando la difficoltà è aumentata il gradimento è di pari passo diminuito: c’è una relazione inversa fra difficoltà e gradimento
- la percezione delle difficoltà raramente corrisponde alle effettive difficoltà incontrate: gli studenti hanno ritenuto facili quesiti che, alla luce dei risultati, li hanno messi in difficoltà; questa mancanza di consapevolezza penalizza in genere gli studenti
- alla domanda: “Hai osservazioni da fare?” praticamente non ci sono state risposte

In sostanza, la tipologia della proposta non è riuscita fino in fondo a coinvolgere le classi nella loro totalità, si può però dire che, sia sul piano linguistico sia sul piano logico, i risultati sono stati positivi. La ricaduta dell’attività è risultata evidente anche negli altri ambiti di lavoro.

Bibliografia

Matematica 2003 – attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica
Arzarello – Bazzini – Chiappini – L'algebra come strumento di pensiero – quad. n. 6 CNR
Iaderosa, Fait, Dorigotti (a cura di) Problemi e proposte sull'insegnamento dell'algebra – IPRASE del Trentino
Boffa – Matematica – S.E.I.