Situazioni problematiche con la Matematochetta
Analisi a priori

(ultimo aggiornamento 1 ottobre 2015)

Codice dei colori: blu per frasi in linguaggio matematico, rosso per frasi in linguaggio naturale

GRUPPO A: Situazioni che riguardano una sola tessera

Con i bambini della scuola dell'infanzia (se necessario anche con quelli della prima primaria) si riflette:

(a) sulla relazione fra il numero delle perle che porta la fatina e il punteggio del dado (questo consolida il concetto che è lo stesso numero);

(b) sulle sei possibilità 0-5 offerte dal dado magico e su come cambia il numero delle perle a seconda che la fatina porti 0, 1, 2, ecc. perle;

(c) sul fatto che man mano che aumenta il punteggio del dado tanto più aumenta il numero delle perle portate dalla fatina e quindi il numero delle perle possedute dalla principessa.

Si conclude che il numero massimo di passi si ha se il punteggio del dado è il più alto (5), perché così la fatina porta 5 perle e il numero delle perle della principessa è 10.

Alunni più grandi possono formarsi dei modelli mentali della situazione e poi argomentare mettendo in relazione: punteggio del dado, numero delle perle della fatina, numero totale delle perle della principessa, numero dei passi. Ad esempio:

"La principessa ha 5 perle; per poter fare più passi possibile vorrei che uscisse il punteggio più alto del dado, e cioè 5. In questo modo la principessa avrebbe 10 perle e io farei 10 passi".

Sarebbe importante da un punto di vista linguistico far riflettere sulla differenza tra questa possibile espressione di un alunno in prima persona singolare e la seguente:

"Si fa Il numero di passi più alto se il punteggio del dato è 5."

L'impersonale veicola il generale, si potrebbe esplorare se i bambini sanno cogliere ed esprimere la differenza, l'insegnante potrebbe guidarli a questa scoperta.

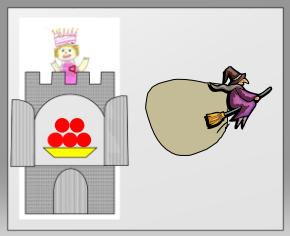
Una strategia utile per visualizzare le situazioni possibili è costituita dalla rappresentazione tabulare:

Numero di perle nel vassoio	Punteggio del dado	Somma dei due numeri	Numero dei passi
v	d	v+d	p
5	0	5+0	5
5	1	5+1	6
5	2	5+2	7
5	3	5+3	8
5	4	5+4	9
5	5	5+5	10

Si chiede di esplicitare la conclusione:

"Il numero di passi più alto lo faccio se il punteggio del dado è 5".

A2 – Riflessione su una tessera (Tavarado, Trieste)



Quale punteggio del dado vorresti ottenere per fare più passi?
Argomenta la risposta.

Problemi della Matematochetta. 4

Con i bambini della scuola dell'infanzia (se necessario anche con quelli della prima primaria) si riflette:

(a) sulla relazione fra il numero delle perle che ruba la streghetta e il punteggio del dado (questo consolida il concetto che è lo stesso numero);
(b) sulle sei possibilità 0-5 offerte dal dado magico e su come cambia il numero delle perle a seconda che la fatina porti 0, 1, 2, ecc. perle;
(c) sul fatto che man mano che aumenta il punteggio del dado tanto più aumenta il numero delle perle rubate dalla streghetta e diminuisce il numero delle perle possedute dalla principessa.

Si conclude che il numero massimo di passi si ha se la strega non ruba nemmeno una perla, e quindi se il punteggio del dado è 0.

Alunni più grandi possono formarsi dei modelli mentali della situazione e poi argomentare mettendo in relazione: punteggio del dado, numero delle perle rubate, numero totale delle perle della principessa, numero dei passi. Ad esempio:

"Per fare più passi vorrei che il punteggio del dado fosse 0, e quindi che la streghetta non portasse via nemmeno una perla".

Una strategia utile per visualizzare le situazioni possibili comporta l'uso di una tabella, come nella situazione precedente:

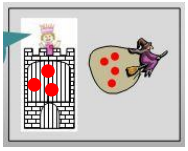
Numero di perle nel vassoio	Punteggio del dado	Differenza dei due numeri	Numero dei passi
v	d	v-d	p
5	0	5-0	5
5	1	5-1	4
5	2	5-2	3
5	3	5-3	2
5	4	5-4	1
5	5	5-5	0

Si chiede di esplicitare la conclusione:

"Per fare il maggior numero di passi ~~bisogna~~ è necessario che il punteggio del dado sia il minore numero possibile, e cioè 0".

La situazione presenta un problema inverso rispetto alla sottrazione; la strega infatti toglie ma attiva la concettualizzazione dell'addizione: per sapere quante perle aveva prima la principessa bisogna aggiungere a quelle che le sono rimaste quelle che la strega le ha sottratto.

Con i bambini della scuola dell'infanzia (se necessario anche con quelli della prima primaria) si può procedere per tentativi utilizzando i gettoni a disposizione dei giocatori.
Si aggiungono i tre gettoni della principessa.



Si invitano gli alunni a descrivere ciò che vedono, a formulare ipotesi, a trarre conclusioni.
In caso di difficoltà l'insegnante potrebbe sostituire la tessera del problema con un'altra in cui i 4 gettoni della streghetta siano mobili e spostarli dal sacco al castello in modo da mettere assieme gli 8 gettoni e ricostruire quindi con gli alunni la situazione iniziale.

Alunni più grandi possono formarsi dei modelli mentali della situazione e poi argomentare mettendo in relazione: punteggio del dado, numero delle perle rubate, numero totale delle perle della principessa, numero dei passi. Ad esempio:

"La streghetta ruba 4 perle. Se alla principessa sono rimaste solo 3 perle vuol dire che all'inizio ne aveva 4+3, e cioè 7".

Le rappresentazioni del processo per Brioshi possono essere più di una, ottenibili, dov'è possibile, con l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà simmetrica dell'uguaglianza.

Per esempio (p = numero delle perle all'inizio):

p=3+4	p-4=3
p=4+3	4+3=p
3=p-4	p-4=3
4=p-3	p-3=4

che vengono fatte esplicitare in linguaggio naturale È importante che gli alunni vengano avviati ad esprimere la risposta da un punto di vista <u>relazionale</u>:

(a) *"Il numero delle perle che aveva all'inizio la principessa è la somma fra quello delle perle che le sono rimaste (3) e quello delle perle rubate dalla streghetta (4)".*
(b) *"La differenza fra il numero delle perle che la principessa aveva all'inizio e quello delle perle che ruba la streghetta, cioè 4, è uguale a 3".*

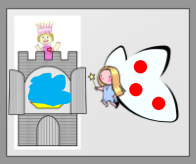
È probabile che nelle prime fasi gli alunni esprimano u punto di vista <u>procedurale</u> <u>(cosa faccio per trovare il numero?)</u>, per esempio:

(c) *"Per trovare il numero delle perle iniziali della principessa devo fare il numero delle perle che lei ha ora meno quello delle perle che ha rubato la streghetta".*

O misto relazionale/procedurale, ad esempio…

(c) *"Per calcolare il numero delle perle iniziali della principessa devo trovare la differenza fra il numero delle perle che lei ha ora e quello delle perle che ha rubato la streghetta".*

A4 – Riflessione su una tessera (Tavarado, Trieste)

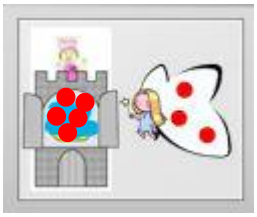


La strega, per fare un dispetto alla fatina, ha nascosto sotto una nuvoletta magica il vassoio della principessa.
Mi ha detto però di dirvi che, con le tre perle che porta la fatina, la principessa ora ha otto perle.
Chissà quante perle ci sono nel vassoio!
Argomentate la risposta.

Problemi della Matematochetta. 6

La situazione presenta un problema inverso rispetto all'addizione (parte da una situazione additiva, in quanto la fata dona le perle) ma richiede la concettualizzazione della sottrazione: per sapere quante perle aveva prima la principessa bisogna sottrarre a quelle che ha ora quelle che la fata le ha donato.

Con i bambini della scuola dell'infanzia (se necessario anche con quelli della prima primaria) si può procedere per tentativi utilizzando i gettoni a disposizione dei giocatori. Si aggiungono uno alla volta finché la somma fra i due numeri diventa 8.



Si riflette sulla situazione e si invitano gli alunni a descrivere ciò che vedono, a formulare ipotesi, a trarre conclusioni.

Alunni più grandi possono formarsi dei modelli mentali della situazione e poi argomentare mettendo in relazione: numero delle perle portate dalla fatina, numero totale delle perle della principessa, numero dei passi. Ad esempio:

"La fatina porta 3 perle. Se ora la principessa ha in tutto 8 perle vuol dire che all'inizio ne aveva 5, perché da 3 ad arrivare a 8 faccio 5 passi".

Le rappresentazioni del processo in linguaggio matematico per Brioshi possono essere più di una, ottenibili, dov'è possibile, con l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà simmetrica dell'uguaglianza.

Per esempio (p = numero delle perle):

8=3+p	3+p=8
8=p+3	p+3=8
3=8-p	8-p=3
p=8-3	8-3=p

È importante che vengono fatte esplicitare in linguaggio naturale e che gli alunni vengano avviati ad esprimere la risposta da un punto di vista relazionale; per esempio:

(a) *"La somma fra il numero delle perle che aveva all'inizio la principessa e quello delle perle che porta la fatina è 8".*
(b) *"Il numero delle perle che la principessa aveva all'inizio è uguale alla differenza fra il numero di tutte le perle e quello delle perle che ha portato la fatina".*

È probabile che nelle prime fasi gli alunni esprimano u punto di vista procedurale (cosa faccio per trovare il numero?), per esempio:

(c) *"Per trovare il numero delle perle iniziali della principessa devo fare il numero delle perle che lei ha ora meno quello delle perle che ha portato la fatina".*

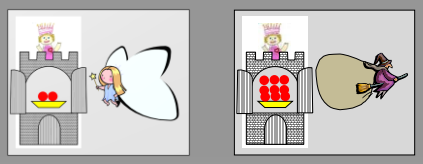
O misto relazionale/procedurale, ad esempio…

(c) *"Per calcolare il numero delle perle iniziali della principessa devo trovare la differenza fra il numero delle perle che lei ha ora e quello delle perle che ha portato la fatina".*

GRUPPO B: Situazioni che riguardano il confronto fra due tessere

(Adatte alla scuola primaria)

B1 – Confronto fra due tessere (Navarra, Castel S. Pietro 2012)



Sebastiano ha lanciato il dado e ha ottenuto un 3.
Su quale tessera preferiresti essere per fare più passi?
Argomenta le risposte.

Problemi della Matematochetta. 7

La situazione può trarre in inganno coloro che seguono lo stereotipo che comunque le situazioni con la fatina siano più convenienti perché si aggiunge.

Un'altra difficoltà può essere costituita dal fatto che gli alunni non sono abituati ad affrontare un problema che preveda come soluzione una risposta di tipo metacognitivo conseguente al confronto fra le due tessere e di conseguenza fra l'esito di due calcoli.

Un'argomentazione potrebbe essere:

"Siccome il punteggio del dado è 3, nella prima tessera la fatina porta 3 perle; le aggiunge alle 2 della principessa che ora ha 5 perle.
Nella seconda tessera la streghetta porta via 3 perle alle 9 della principessa che rimane con 6 perle.
Preferisco quindi trovarmi sulla tessera con la streghetta".

Si può procedere nella rappresentazione della situazione in linguaggio matematico che spieghi a Brioshi il ragionamento e la conclusione. Per esempio:

$$3+2=5 \qquad 9-3=6$$

da cui si ricaverebbe:

$$3+2<9-3 \qquad \text{e quindi} \qquad 5<6$$

Uscendo dal gioco della Matematochetta, si può proporre un'espansione che consente di giocare con le disequazioni. Si parte proponendo il confronto tra due numeri rappresentati in forma non canonica, per esempio 5+6 e 9+4 e gli alunni verificano che:

$$5+6<9+4$$

A questo punto si chiede alla classe "Secondo voi cambia qualcosa se si toglie 1 da entrambi i numeri?"
Gli alunni verificano che i numeri cambiano ma la relazione rimane la stessa. Scrivono:

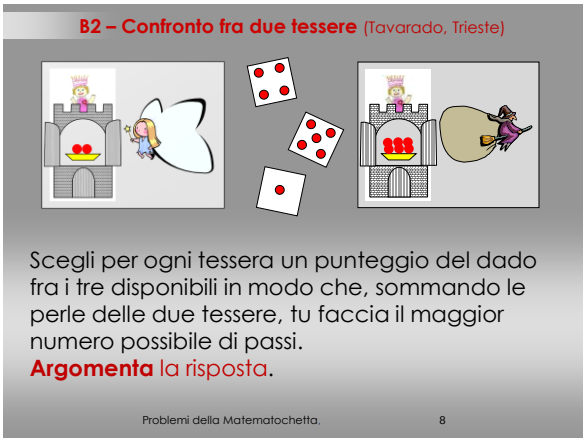
$$5+6-1<9+4-1$$

Ripetono la stessa esperienza sia togliendo che aggiungendo numeri e infine vengono guidati ad esprimere un principio generale; per esempio:

"Se aggiungo o tolgo la stessa quantità in entrambi i numeri la relazione fra i due numeri non cambia"

Con alunni più grandi o più esperti si può giungere ad un linguaggio più evoluto sul piano dei riferimenti matematici:

"Se aggiungo o tolgo la stessa quantità in entrambi i numeri la relazione di disuguaglianza fra essi non cambia".



Una probabile difficoltà è rappresentata dal fatto che gli alunni non sono abituati ad un problema che preveda come soluzione una risposta di tipo metacognitivo, conseguente all'analisi dei dati a disposizione (il testo, le due tessere, i tre possibili punteggi) e al confronto fra l'esito di due calcoli.

Una prima strategia potrebbe basarsi sull'analisi (possibilmente ordinata) di tutte le soluzioni possibili con il supporto del linguaggio aritmetico:
Tessera con la fatina: 2+1=3, 2+4=6, 2+5=7.
Tessera con la streghetta: 6-1=5, 6-4=2, 6-5=1.

Può essere utile il ricorso alla rappresentazione tabulare, utilizzando delle lettere per semplificare le scritture; ad esempio:
p = numero di perle della principessa
d = punteggio del dado

		Tessera con la fatina p+d		
		2+1	2+4	2+5
Tessera con la streghetta p-d	6-1	6-1+2+1=8	6-1+2+4=11	6-1+2+5=**12**
	6-4	6-4+2+1=5	6-4+2+4=8	6-4+2+5=9
	6-5	6-5+2+1=**1**	6-5+2+4=7	6-5+2+5=9

Confrontando i valori nelle caselle si conclude che :

Il maggior numero di passi si farebbe se per la tessera con la fatina il punteggio del dado fosse 5 e per quella della streghetta fosse 1.

Una conclusione più proiettata verso la generalizzazione potrebbe essere:

Il maggior numero di passi si farebbe se per la tessera con la fatina il punteggio del dado fosse 5 e per quella della streghetta fosse 1

seconda strategia, senza il ricorso ai calcoli parziali, comporta il capire che nella prima tessera la somma più alta si ottiene con il secondo addendo più alto e quindi con il punteggio del dado 5, mentre nella seconda la differenza più alta si ottiene con il sottraendo più basso e quindi con il punteggio del dado 1.

Una rappresentazione per Brioshi in linguaggio matematico potrebbe essere:
Tessera con la fatina: 2+5>2+4>2+1
Tessera con la streghetta: 6-1>6-4>6-5.
Conclusione: (2+5)+(6-1)=12.

GRUPPO C: Situazioni che comportano l'analisi di un episodio

(Adatte alla scuola primaria)

La situazione può trarre in inganno coloro che seguono lo stereotipo che comunque le situazioni con la fatina siano convenienti perché si aggiunge.

Un'argomentazione potrebbe essere:

"Cristina per arrivare alla tessera dove si trova ora ha fatto 5 passi. Sulla tessera dove si trovava con Michele si vede che la principessa ha 2 perle. Questo significa che il punteggio del dado è 5-2, cioè 3".

Le rappresentazioni del processo in linguaggio matematico per Brioshi possono essere più di una, ottenibili, dov'è possibile, con l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà simmetrica dell'uguaglianza.

Per esempio (d = punteggio del dado):

d+2=5	5=d+2
2+d=5	5=2+d
d=5-2	5-2=d

Una difficoltà verificata talvolta in classe o durante incontri di formazione con insegnanti è rappresentata dall'interferenza visiva delle tessere disposte fra il panno blu e la posizione di Pia, che si pensa possano far parte del problema. Le quattro tessere intermedie potrebbero essere tranquillamente grigie.

La riflessione che si dovrebbe promuovere, anche facendo eventualmente drammatizzare ad un alunno la situazione su un percorso costruito sul pavimento (non è necessario usare le tessere della Matematoca) inizia osservando che il disegno mostra che Pia, dalla tessera iniziale nascosta dal panno, in base al punteggio del dado (3) si è spostata in avanti di 5 passi.

E allora: com'è fatta la tessera?
Potrebbe contenere una fatina?
Sì: poiché Pia ha fatto 5 passi e il punteggio del dado è 3, significherebbe che la principessa ha nel suo vassoio 5-3 perle. Nella tessera nascosta dal panno la principessa possiederebbe quindi 2 perle.
Potrebbe contenere una streghetta? Sì: la principessa dovrebbe avere nel suo vassoio un numero di perle tale che, togliendone 3, permettesse a Pia di fare 5 passi, e cioè 5+3 perle. Nella tessera col panno la principessa possiederebbe quindi 8 perle.

Le rappresentazioni del processo risolutorio in linguaggio matematico per Brioshi possono essere più di una in entrambi i casi, ottenibili, dov'è possibile, con l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà simmetrica dell'uguaglianza (p = numero di perle della principessa).

Tessera con la fatina:

p+3=5	5=p+3
3+p=5	5=3+p
p=5-3	5-3=p

Tessera con la streghetta:

p-3=5	5=p-3
p=5+3	5+3=p
p=3+5	3+5=p

Si invita a far verbalizzare almeno alcune di queste scritture favorendo l'emergere di frasi costruite con un punto di vista relazionale; ad esempio:
3+p=5: "La somma fra il punteggio del dado e il numero delle perle della principessa è 5".
5=p-3: "Il numero dei passi di Lea, e cioè 5, è uguale alla differenza fra il numero delle perle della principessa e il punteggio del dado".

La risposta è il frutto dell'analisi, una alla volta, di tutte le partenze possibili di Iva, iniziando dalla prima visibile dopo la freccia (T = Tessera).

T1) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 6 passi. Non può essere partita da qui perché la principessa ha 5 perle e, anche se il punteggio del dado fosse 0 e la streghetta non portasse via nemmeno una perla, potrebbe fare solo 5 passi.

T2) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 5 passi. Potrebbe essere partita da qui perché la principessa ha 2 perle e la fatina potrebbe avergliene portate altre 3.

T3) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 4 passi. Potrebbe essere partita anche da qui perché la principessa ha 9 perle e la streghetta potrebbe avergliene rubate 5.

T4) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 3 passi. Non può essere partita da qui perché la principessa ha 4 perle e, indipendentemente da quante perle porti la fatina, farebbe comunque almeno 1 passo in più.

T5) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 2 passi. Non può essere partita da qui per le stesse ragioni spiegate per la tessera precedente.

T6) Per giungere alla tessera in cui si trova ora, Iva avrebbe compiuto 1 passo. Non può essere partita da qui per ragioni analoghe a quelle illustrate per T1.

In conclusione, Iva è partita o dalla seconda o dalla terza tessera.

Per muoversi dalla tessera precedente Marco avrebbe dovuto fare solo 1 passo. In quella tessera la principessa ha già 3 perle. La risposta quindi è no, indipendentemente dal punteggio del dado.

Una rappresentazione per Brioshi in linguaggio matematico potrebbe essere (d = punteggio del dado):

se $0 \leq d \leq 5$ allora $3+d>1$

Per renderla in linguaggio completamente matematico si può scrivere:

$$0 \leq d \leq 5 \Rightarrow 3+d>1$$

Attraverso questa situazione concreta e la relativa rappresentazione gli alunni potrebbero incontrare un simbolo decisamente poco frequentato (soprattutto a questo livello scolare): minore o uguale.
Si potrebbe anche presentare il simbolo 'fratello' ≥ (maggiore o uguale).

C5 - Analisi di un episodio (Da Canal, Ferrone, Mel (BL), Navarra)

Per trovarsi dov'è ora, Simone può essere partito dalla tessera con la streghetta dietro di lui?

Argomentate la risposta.

Problemi della Matematochetta. 13

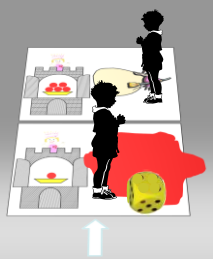
Per muoversi dalla tessera precedente Simone avrebbe dovuto fare solo 1 passo. In quella tessera la principessa ha 6 perle. La streghetta potrebbe portargliene via 5. Il numero dei passi sarebbe quindi 6-5. La risposta è sì.

Una rappresentazione per Brioshi in linguaggio matematico potrebbe essere (d = punteggio del dado):

se d=5 allora 6-d=1

C6 - Analisi di un episodio (Da Canal, Ferrone, Mel (BL), Navarra)

Piero vorrebbe arrivare sulla tessera dove c'è il suo amico del cuore Leo. Ha lanciato il dado ed è uscito lo zero.
Secondo te sarebbe meglio che sotto la stoffa ci fosse la fatina o la streghetta?



Argomentate la risposta.

Problemi della Matematochetta, 14

Una probabile difficoltà è rappresentata dal fatto che gli alunni non sono abituati ad un problema che preveda come soluzione una risposta di tipo metacognitivo, conseguente all'analisi dei dati a disposizione (il testo, le due tessere) e al confronto fra l'esito di due calcoli.

Piero deve fare solo 1 passo. Nella tessera su cui si trova la principessa ha 1 perla. Il punteggio del dado è 0. È indifferente che sotto la stoffa ci sia la fatina o la streghetta perché in entrambi i casi (1+0 o 1-0) l'unica perla rimarrebbe tale.

Una rappresentazione per Brioshi in linguaggio matematico potrebbe essere (d = punteggio del dado):

se $d=0$ allora $1+0=1-0$

o, in linguaggio formale (agli alunni piace):

$d=0 \Rightarrow 1+0=1-0$

Una probabile difficoltà è rappresentata dal fatto che gli alunni non sono abituati ad un problema che preveda come soluzione una risposta di tipo metacognitivo, conseguente all'analisi dei dati a disposizione (il testo, le cinque tessere, il punteggio 2 del dado) e al confronto fra l'esito di cinque ragionamenti (frutto di cinque calcoli elementari).

Un'altra difficoltà è rappresentata dal fatto che nella prima tessera a sinistra l'incognita (il punteggio del dado) non riguarda le perle portate in dono dalla fatina ma quello delle perle possedute dalla principessa.

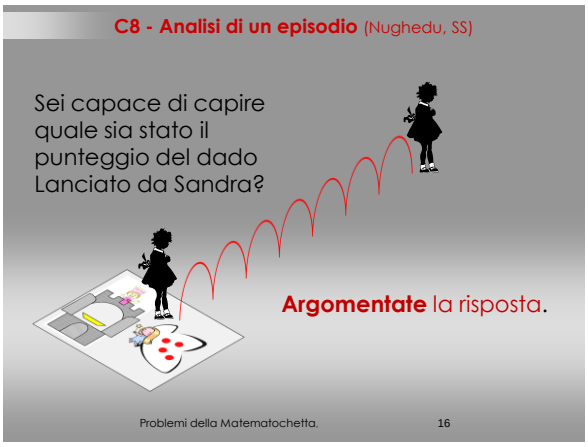
Le tessere sono analizzate iniziando da sinistra.

T1) La principessa ha 2 perle, la fatina ne porta 3, quindi si fanno 2+3 passi.
T2) La principessa ha 7 perle, la streghetta ne ruba 2, quindi si fanno 7-2 passi.
T3) La principessa ha 9 perle, la streghetta ne ruba 2, quindi si fanno 9-2 passi.
T4) La principessa ha 3 perle, la fatina ne regala 2, quindi si fanno 3+2 passi.
T5) La principessa ha 4 perle, la fatina ne regala 2, quindi si fanno 4+2 passi.

In conclusione: vorrei essere sulla tessera T3 perché farei 7 passi; non vorrei essere in nessuna delle tessere T1, T2, T4 perché farei in tutti e tre i casi solo 5 passi.

Una rappresentazione per comunicare il ragionamento a Brioshi in linguaggio matematico potrebbe essere:

$2+3=7-2=3+2=5$ $\qquad$ $9-2>4+2>5$



Una probabile difficoltà è rappresentata dal fatto che gli alunni non sono abituati ad un problema che preveda come soluzione una risposta di tipo metacognitivo, conseguente all'analisi dei dati a disposizione (il testo, il disegno).

Sandra ha fatto 7 passi. Sulle ali della fatina ci sono 4 perle. Questo significa che il punteggio del dado è 7-4.

Le rappresentazioni del processo risolutorio in linguaggio matematico per Brioshi possono essere più di una ottenibili, dov'è possibile, con l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà simmetrica dell'uguaglianza (d = punteggio del dado).

d+4=7	7=d+4
4+d=7	7=4+d
d=7-4	7-4=d