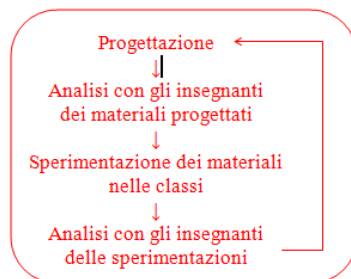


Questo diario fa riferimento al Progetto 'Approccio alle equazioni attraverso l'allestimento di Scene dinamiche' che illustriamo brevemente.

L'organizzazione del progetto presenta la seguente struttura:



Nasce all'interno del costrutto teorico [rappresentare/risolvere](#) un problema in relazione al quale, nelle classi che partecipano al progetto ArAl, sin dalla prima primaria, vengono proposte delle situazioni problematiche strutturate in modo tale che possano essere gestite

- sia aritmeticamente: gli alunni svolgono delle operazioni per trovare un risultato,
- che algebricamente: gli alunni *rappresentano la situazione in linguaggio matematico* affinché altri, per esempio Brioshi, l'amico di penna matematica (che poi, in realtà, sono gli stessi alunni che si immedesimano in questo personaggio), possano trovare il valore dell'incognita che la rappresentazione contiene.

Spesso le situazioni problematiche sono ottenute trasformando problemi dai libri di testo in uso. Ad esempio:

Problema verbale standard (prima primaria)	Testo in 'versione early algebra' (seconda primaria)
Matteo ha una collezione di modellini: 12 auto di Formula 1, 15 trattori e 9 aeroplanini. Da quanti modellini è formata la collezione? Soluzione: Dati: ... Da trovare: ... $12+15+9=36$ R: La collezione è formata da 36 modellini.	Matteo ha una collezione di modellini: 12 auto di Formula 1, 15 trattori e alcuni aeroplanini. In tutto ha 36 modellini. Rappresenta la situazione in modo che Brioshi possa trovare quanti sono gli aeroplanini.

Nel testo *in versione early algebra* la rappresentazione in linguaggio matematico è, di fatto, un'equazione:

$$a = \text{numero degli aeroplanini} \quad \rightarrow \quad 12+15+a=36$$

Una volta scritta la rappresentazione, in prima e seconda primaria gli alunni, non possedendo naturalmente le conoscenze necessarie in ambito algebrico, individuano il numero 'misterioso' attraverso intuizioni, tentativi, ipotesi guidati dall'insegnante: esplorano con gradualità quelle che chiamiamo *equazioni per gioco*.

Dall'ottobre 2015 stiamo sperimentando in numerose seconde e terze di scuola primaria (inizialmente tramite dei minivideo artigianali) strategie e attività progettate per favorire il passaggio graduale dalle *equazioni per gioco* alla comprensione di come si comporterebbe Brioshi per individuare, da un'equazione iniziale, il valore del *numero misterioso*. Interrotta per il momento la realizzazione di minivideo, la nuova strategia (ispirata comunque ad essi) si basa sulle *Scene dinamiche*, presentate alla classe attraverso slide Powerpoint, costruite sull'analogia tra l'equivalenza tra i membri dell'equazione e l'equiestensione tra strisce quadrettate che rappresentano i dati numerici del problema, tutte di lunghezza nota tranne una, che rappresenta il numero misterioso.

Le slide mostrano una breve successione di animazioni delle strisce che, analizzate e discusse dalla classe, fanno capire come si sviluppano i modi per individuare il valore dell'incognita presente nella scrittura iniziale, rappresentativa della situazione problematica.

Nel caso dell'esempio precedente gli alunni (immedesimandosi in Brioshi) organizzerebbero queste scritte:

$$27+a=36 \quad \rightarrow \quad 27+a=27+9 \quad \rightarrow \quad \cancel{27}+a=\cancel{27}+9 \quad \text{oppure} \quad \cancel{27}-\cancel{27}+a=\cancel{27}-\cancel{27}+9 \quad \rightarrow \quad a=9$$

Precisiamo che le *Scene dinamiche* vanno utilizzate finché l'insegnante ritiene che siano un necessario traghetto semantico. Si vede che, dopo un certo numero di esperienze, gli alunni iniziano a costruirsi *il modello mentale delle Scene*, ed elaborano autonomamente le relative rappresentazioni in linguaggio matematico.

Lo sviluppo dell'attività nell'esplorazione di pseudo-equazioni ed equazioni attraverso l'uso di opportuni mediatori didattici è quindi il seguente: (i) prima-seconda: *equazioni per gioco*; (ii) fine seconda-terza-inizio quarta: *Scene dinamiche*; (iii) quarta-quinta-prima secondaria: *bilancia a piatti*.

NOTA

La terza primaria che ha svolto l'attività alla quale si riferisce il diario è stata una delle prime classi con le quali, in precedenza, sono state sperimentate le *Scene dinamiche*, quindi la strategia è nota.

Come spiega l'insegnante nella presentazione dell'attività, in questo caso le slide Powerpoint non erano disponibili. L'insegnante le ha sostituite con delle simulazioni alla LIM.

Commenti dell'insegnante di classe
 Commenti degli insegnanti del gruppo
 Commenti dell'IR Giancarlo Navarra

20 Aprile 2016

1 (Uso del registratore)

Presentazione dell'attività

Si propone alla classe di rappresentare per Brioshi il testo del problema delle librerie, con lo scopo di affrontare situazioni problematiche nella prospettiva del risolvere e del rappresentare, risolvere semplici problemi con un'incognita, argomentare la procedura utilizzata.

In questa occasione non avevamo a disposizione la scena dinamica, ma agli alunni è stata proposta alla lavagna la rappresentazione elaborata da Brioshi.

L'attività è stata svolta dall'ins. Della Picca, mentre l'insegnante Cargnelutti era presente in classe e ha redatto il diario.

Descrizione della situazione proposta

In una classe terza ci sono due piccole librerie colorate una di rosso e una di blu.

Nella libreria ci sono 7 libri sul primo scaffale, 9 sul secondo e altri sul terzo. Nella blu ci sono 11 libri sul primo scaffale e 12 su secondo.

Rosa osserva: "Nelle due librerie c'è lo stesso numero di libri".

Rappresenta...

1. Riccardo legge il testo del problema¹.
2. I: È chiaro? Chi mi sa raccontare con le sue parole quello che c'è scritto nel problema? Cristina.
3. Cristina: Ci sono due scaffali.
4. I: Due scaffali?
5. Cristina: No, due librerie.
6. I: Due come la nostra vero? (L'insegnante indica una libreria presente in aula) una rossa e una blu.
7. Cristina: Nella rossa ci sono 7 libri sul primo e 9 sul secondo e altri sul terzo. Nell'altra libreria ci sono 12 libri sul primo scaffale.
8. Matteo L: No, sono 12 sul primo e 11 sul secondo.
9. I: Hai ragione, ma cambia?
10. Matteo L.: No.
11. I: Per la matematica cambia poco se ci sono 11 libri sul primo scaffale e 12 sul secondo o viceversa². Che cosa c'è da dire ancora che c'è scritto sul problema?
12. Cristina: Che dobbiamo rappresentare in linguaggio matematico la situazione di modo che Brioshi la possa trovare.
13. I: Sì, che cosa dovrebbe trovare Brioshi secondo te?
14. Matteo L.: Trovare il numero dei libri sul terzo scaffale.
15. I: C'è qualcosa che Cristina non ha detto?
16. Elisabetta: Sì, che nelle due librerie c'è lo stesso numero di libri.
17. I: È importante?
18. Alcuni bambini rispondono di sì.
19. I: Perché è importante?
20. Elia: Perché... perché se no dopo si capirebbe... dopo ti viene il numero uguale e... ma come può essere un numero uguale? Ti deve dare le informazioni.
21. I: Cosa intendi dire?
22. Elia: Prima me lo deve dire...
23. I: Ci servirà sapere che nella libreria c'è lo stesso numero di libri?
24. Marco: Sì, perché se no non si può trovare...
25. Matteo L.: Non si può trovare il risultato, la risposta³.
26. I: Il numero...
27. Alcuni bambini in coro: Il numero dei libri sul terzo scaffale.
28. I: Va bene, la situazione l'avete capita. Ce la immaginiamo? Occorre disegnare? Disegniamo la libreria?
29. Matteo L. e altri: Nooo, io me la immagino!
30. I: Quante sono le librerie?

¹ Il problema lo abbiamo affrontato insieme Cargnelutti e io; io scrivevo alla LIM i passaggi, e talvolta ho anche cancellato (ad es. quando Marco si accorge che $9+7=?$ (49) non va bene).

² Ciò che dice l'insegnante è vero, ma in questo modo la traduzione del testo in linguaggio matematico non è più così fedele. Sono d'accordo. L'importante è che anche questo aspetto venga condiviso con la classe, in modo da aumentare la sensibilità degli alunni verso l'interpretazione delle scritte in linguaggio matematico.

³ Questo ci fa capire come i bambini siano istintivamente orientati al risolvere una situazione problematica.

31. Matteo L.: Due, una blu e una rossa.
32. I: E sul terzo scaffale non sapete quanti libri sono?
33. *Alcuni accennano un 7 altri dicono no.*
34. I: Ancora non lo sapete. Lui (*riferendosi a Marco*) ha detto un numero ma non so il ragionamento che ha fatto. A cosa hai pensato tu?
35. Marco: Ho fatto $7+9$ che faceva 16 e ho fatto $16+4$ che fa 20, $11+12$ fa 23 ho aggiunto al 4 il 3 ed è diventato $12+7$.⁴
36. I: Non capisco, mi puoi rispiegare di nuovo?
37. Marco: Che sullo scaffale della prima libreria ci sono 7 libri, sul secondo 9 e in tutto i due numeri è 16. Ho fatto 16... ho fatto $11+12$ che faceva 23 e il numero da 16 per arrivare a 23 è 7.⁵
38. I: E quindi tu hai risolto questo problema e sai già che sul terzo scaffale ci sono 7 libri. Come possiamo fare per raccontare a Brioshi? Come glielo scriviamo? Me lo sai spiegare tu?
39. *Marco va alla lavagna.*
40. I: Innanzitutto direi che dobbiamo scrivere prima la situazione e dopo quello che lui ha pensato per risolvere. Prima di tutto si può raccontare con il linguaggio matematico quello che abbiamo letto nel problema? Tu sapresti scrivere in linguaggio matematico?
41. Alcune voci: Io sì...
42. I: Cosa scriveresti?
43. Marco: $9+7$...
44. I: Aspetta un momento, c'era scritto primo scaffale 7, secondo scaffale 9, terzo scaffale altri. Dopo c'era scritto altra libreria...⁶
45. Matteo L.: Nel primo 11 e nel secondo 12.
46. I: Ti dico l'ordine perché così era scritto. Cosa possiamo scrivere per raccontare a Brioshi con il linguaggio matematico?
47. Marco: Posso scrivere $9+7$...
48. I: Spiegami cosa hai scritto e perché.
49. Marco: $9+7$ =numero misterioso.
50. I: È un numero misterioso $9+7$?
51. Matteo L: Perché Brioshi lo deve scoprire.
52. Marco: $11+12=9+7+?$ ⁷
53. I: Io questo lo capisco (*indicando la seconda scrittura (v. rigo 52)*), questo no (*indicando $9+7=?$ (v. rigo 49)*). Cosa capisce Brioshi se gli mostri questo?
54. Matteo L. : Niente.
55. I: Se tu gli mostri questo (*indicando l'equazione (rigo 49)*) lui capisce di cosa stai parlando?
56. Diego: Io non sarei d'accordo perché $9+7+macchia=11+12$.⁸

⁴ *Due osservazioni:*

1) *relativa alla frase di Marco: Marco ha ragionato per tentativi, e si può spiegare alla classe che anche questa è una strategia, che in certi casi può essere utile se non se ne trovano altre, ma è efficace solo con numeri piccoli altrimenti diventa troppo dispendiosa (poco economica). Un esempio efficace per innescare nella classe anche una possibile soluzione per tentativi (forse più adatta alla quarta che alla terza) può essere una piramide a tre piani in cui si conoscano il numero in alto (ad es. 24) e i due numeri nei mattoni laterali alla base (7 e 9). Ci sono sì una strategia algebrica ($24=7+2 \times x+9$), oppure una aritmetica ($[24-(7+9)]:2$), ma l'esperienza mostra che molti alunni procedono per tentativi (mettono nel mattone centrale 2, poi 3 e infine 4 e vedono che va bene). Se però il numero in alto fosse 91 e gli altri due 7 e 12 la strategia non sarebbe efficace. Giustamente l'insegnante (36) chiede a Marco di spiegarsi meglio ed evidenzia il suo ruolo.*

2) *di carattere generale: non mi è chiaro il passaggio dall'analisi iniziale del problema (1-33) alla riflessione sulla strategia individuata da Marco (35-52) e poi su quella proposta da Diego (56-62). Gli alunni hanno risolto il problema individualmente? Le loro proposte sono state poi ricopiate alla LIM? (se sì, bisognerebbe trascriverle nel diario per favorire la lettura). Più che far parlare gli alunni su alcune proposte sarebbe più efficace ricopiare quelle elaborate (o almeno una parte significativa) in modo che siano visibili e confrontabili e poi aprire la discussione. Mi sembra di capire che l'insegnante abbia invece lavorato su idee e intuizioni di alcuni alunni, e credo che questa strategia non favorisca un reale confronto collettivo, ma un dialogo fra l'insegnante e alcuni alunni.*

⁵ *Marco ha la soluzione dall'inizio e l'ha ottenuta giocando anche con la proprietà commutativa per comodità di calcolo... forse il mio errore è stato mischiare la sua strategia (tutta orientata sulla risoluzione) con la rappresentazione che ne è venuta fuori (52): $11+12=9+7+?$*

⁶ *Solo un suggerimento di metodo: per non interrompere il lavoro collettivo, si può lasciare che un alunno scriva la sua proposta anche se modifica l'ordine degli enti nella sua rappresentazione rispetto a quello che essi hanno nel testo. Appena l'insegnante riterrà che sia il momento per farlo, potrà far riemergere questo aspetto e riflettere su di esso assieme alla classe. Lo scopo principale è quello di favorire negli alunni la sensibilità nel cogliere certe sfumature perché in realtà l'ordine dei numeri in questo caso è indifferente.*

⁷ *L'alunno intuitivamente rappresenta la situazione così come viene costruita nella scena dinamica.*

57. I: Quello che dici è giusto ma guarda che in effetti lui poi lo ha fatto. Guarda bene sotto cosa ha scritto. Marco mette il punto di domanda, Diego dice che $9+7=?$ non andava bene e stava dicendo...
58. Diego: ... più macchia.
59. I: E dopo?
60. Diego: Uguale.
61. I: Cosa?
62. Diego: Uguale quello che viene dopo.
63. I: Che cos'è $9+7+macchia$?
64. Marco: Sono il numero di libri della libreria, perché sono 9 nel primo scaffale, 7 nel secondo e la macchia nel terzo.
65. I: E la macchia cosa sarebbe?
66. Matteo B: Il numero dei libri sul terzo scaffale.
67. I: Siete tutti d'accordo? Marco lo ha scritto ma solo che ha scritto prima ciò che viene dopo, cambia qualcosa?
68. Alcuni bambini: No, no.
69. Elia: No, perché è sempre la stessa cosa.
70. I: Perché?
71. Marco: Per la proprietà commutativa.
72. I: Di cosa?
73. Marco: Di $11+12$, $9+7$ +un numero che ancora non si sa perché non lo abbiamo ancora capito.
74. I: Ditemi perché posso scrivere anche come avete detto voi $9+7=?$ (*invece della macchia*)= $11+12$. Va bene?
75. Tutti: Sì!
76. I: Perché?
77. Elisabetta: Perché è la stessa cosa.
78. I: Perché?
79. Matteo B: Perché hai solo invertito... diciamo...
80. Elia: Le librerie.
81. Matteo B: I numeri.
82. I: E cos'è che fa stare bene sia in un modo che nell'altro?
83. Alessandro: Perché tutte e due le librerie hanno lo stesso numero di libri.
84. I: E da cosa lo si capisce?
85. Alessandro: Perché c'era scritto sul testo.
86. I: Sì, ma nel linguaggio matematico da cosa lo si capisce? Giustamente Ale ha detto che c'è scritto nel testo.
87. Elia: L'uguale.
88. I: **Esatto!**⁹ (*cerchia il segno nell'equazione*). Il segno uguale mi fa capire che tutto quello che sta di qua è uguale a quello che sta di là (*con riferimento all'equazione*), se lo giro è la stessa cosa. Il segno uguale è la cosa importante in questa storia, mi fa capire che c'è lo stesso numero di libri da una parte e dall'altra. Brioshi se poi vede questo non è nemmeno detto che capisca che parliamo di libri, per il momento vede numeri e anche noi possiamo lavorare sui numeri e basta, potrebbero essere cioccolatini, quadratini...
89. Ins Y: Posso farvi una domanda? Se nel primo scaffale della libreria rossa ci sono 7 libri e 9 sono sul secondo scaffale, noi abbiamo rappresentato proprio questo nella nostra traduzione in linguaggio matematico?
90. Elia: No.
91. Ins. Y: Che cosa abbiamo rappresentato?
92. Elia: Quanti sono... il numero dei libri del secondo scaffale più il numero dei libri del primo scaffale.
93. I: Quindi che cosa è diverso dal testo del problema?
94. Elia: Che li abbiamo invertiti.

⁸ *Diego è più attento alla fedele rappresentazione del testo. I bambini hanno abbracciato subito la strategia di Marco (52), non si sono scomposti di fronte al cambio d'ordine degli elementi (a parte Diego, v. (56)). Peccato che io abbia da lì in poi isolato l e dimenticato la parte sopra del disegno... (v. Commento 20 alla scrittura del rigo 240).*

⁹ *Un'osservazione a margine del lungo scambio (53-88). Mi sembra (ma può darsi che mi sbagli) che l'insegnante (53) proponesse un confronto tra la prima scrittura errata di Marco $9+7=?$ (49) e la successiva corretta $11+12=9+7=?$ (52) e che questo confronto sia stato in seguito opacizzato dalle riflessioni sull'aderenza della seconda rappresentazione al testo, sulla proprietà commutativa e sul significato dell'uguaglianza. Probabilmente questo è stato fatto per non interrompere il flusso della discussione. Aggiungo che l'ultima parte di questo episodio (79-88) potrebbe portare a parlare anche di proprietà simmetrica dell'uguaglianza, quando i due membri dell'equazione vengono invertiti (scrittura in 56 e scrittura in 74). È importante quello che dice l'insegnante (88) quando conduce ad osservare che Brioshi non sa che si parla di libri, e che potrebbe essere qualsiasi cosa. L'evoluzione di questa frase potrebbe portare alla formulazione di testi diversi partendo dalla stessa equazione (forse in altre occasioni lo avete già fatto); si potrebbe concludere parlando di analogia strutturale.*

95. I: Abbiamo invertito l'ordine di apparazione¹⁰, cioè Marco lo ha fatto perché aveva dimenticato quanto letto, secondo me. Ti ricordavi che 9 era il numero dei libri del secondo scaffale?
96. Marco: Sì, però a me veniva più facile fare $11+12$ =quello che è di là.¹¹
97. I: Ahh, hai usato la proprietà...
98. Alcuni esclamano: Commutativa!¹²
99. I: Per tua comodità. E quindi... bene... perché avevi già in mente che avresti dovuto fare un calcolo. Ok... e va bene? Si può scrivere $9+7$ invece che $7+9$?
100. Alcuni: Sì!
101. Matteo B.: È sempre lo stesso risultato.
102. I: È sempre lo stesso risultato facendo un calcolo, ma leggendo... $9+7$ che cos'è? Vediamo chi è algebrico in questa classe!
103. Matteo B.: Sono il numero dei libri...
104. I: Sì, rappresenta il numero dei libri del primo e del secondo scaffale... ma sei io prendo $9+7$ così... cos'è?
105. Qualcuno dice: È la somma.
106. I: Sì, è la somma di $9+7$ che è... è come dire...
107. Matteo L: L'addendo...
108. I: No, no, no... adesso non stiamo parlando dei termini dell'addizione. Se io vi dico "Ragazzi, $9+7$... Non fate il calcolo... cos'è $9+7$?"
109. Matteo B.: È la somma tra 9 e 7.
110. I: Quindi che cos'è?
111. Elia: È 16.
112. I: È la forma non canonica di 16. Che cosa vuol dire forma canonica?
113. Elia: È il numero proprio, il numero come sta.
114. I: E la forma non canonica che cos'è?
115. Matteo B.: Ahh, ad esempio 10 è la forma canonica e la forma non canonica è $5+5$.¹³
116. I: Bravo! Bene, quindi possiamo anche dire che $9+7$ è la forma non canonica di...
117. Alcuni in coro: 16!
118. I: Bene, come procediamo? Io avrei un'idea. Non mi piace tanto quel punto di domanda perché noi abbiamo già imparato a...
119. Elisabetta: Le letterine!
120. I: Cosa ci mettiamo?
121. Alcuni bambini avanzano delle proposte, viene scelta la lettera l.
122. I: La l che sta per... ?
123. Alcuni rispondono: libri, libreria.
124. I: Libri? Adesso scrivo... $9+7$ + libri=...¹⁴
125. Matteo L: No, numero di libri.
126. I: l allora in linguaggio naturale cosa vuol dire per noi?
127. Alunni: "Numero di libri".
128. I: Di che libri?¹⁵
129. Alcuni in coro: "Numero di libri del terzo scaffale".
130. I: Della libreria rossa.

¹⁰ Riprendo un'osservazione fatta nei commenti 4 e 7. Dal mio punto di vista direi che è importante che si sottolinei quello che l'insegnante ha indicato in modo molto espressivo come "Abbiamo invertito l'ordine di apparazione" ma non enfatizzerei troppo questo aspetto.

¹¹ Marco dimostra di possedere la competenza del manipolare i numeri, sebbene ci ritroviamo sempre sul piano del risolvere.

¹² Mi sembra che, nel susseguirsi delle riflessioni su $7+9$ e $9+7$, e $11+12=7+9+?$ e $7+9+?=11+12$, si confondano proprietà commutativa e simmetrica dell'uguaglianza. In un'altra occasione varrebbe la pena puntualizzare questo aspetto.

¹³ Un'osservazione: è sempre bene precisare, generalizzando la questione posta dall'insegnante "La forma non canonica di 16" (112), che si parla di forma canonica e non canonica di un numero. In questo senso forse è più forte parlare di rappresentazione di un numero. Quindi: c'è la rappresentazione canonica di un numero e infinite rappresentazioni non canoniche di quel numero, ognuna portatrice di un suo significato. Quindi, quando Matteo (115) parla di "la forma non canonica è $5+5$ " sarebbe meglio puntualizzare che " $5+5$ è una forma (o rappresentazione) non canonica di 10". Si può anche aggiungere che è una rappresentazione additiva di 10. Tutti questi sono aspetti che contribuiscono, intersecandosi con continuità gli uni con gli altri, a chiarire significati e a costruire sensibilità e competenze.

¹⁴ Ottima puntualizzazione.

¹⁵ Lo so che viene spontaneo formulare queste domande, ma per evitare l'effetto 'botta e risposta' sarebbe più efficace chiedere (127-130) anziché "Di che libri?" qualcosa come "Vorrei una frase completa che dica cos'è l". In questo modo sarebbero gli alunni ad assumersi la responsabilità della completezza delle loro argomentazioni: "l è il numero sconosciuto dei libri sul terzo scaffale della libreria rossa".

131. Si scrive la frase alla LIM:

$9+7+l=11+12$

132. Giuseppe: Ho trovato come trovare il numero misterioso! Sei noi facciamo $9+7$ che fa 16, $11+12$ che fa 23, se troviamo la differenza tra 23 e 16 troviamo la l .
133. I: E come lo scrivo? Cosa devo scrivere?
134. Giuseppe: $23-l$.
135. I: Ma da dove esce il 23? Non è trasparente.
136. Giuseppe: $11+12=23-16$ e scopriamo il numero.¹⁶
137. Diego: Io so già la differenza.
138. I: Ma io devo scoprire il numero?
139. Matteo B.: No, lo deve scoprire Brioshi.
140. I: Appunto, noi dobbiamo scoprire qualcosa perché lui scopra il numero, mica noi. Noi lo abbiamo già scoperto. Noi dobbiamo raccontare per lui. Come facciamo a raccontargli di questa cosa di modo che lui possa capire quanto è. Forse lui è bravo e si arrangia, ma noi potremmo dargli delle dritte.
141. Giuseppe: Gli facciamo fare il calcolo $11+12$, poi gli facciamo fare il calcolo $9+7$.
142. I: E come glielo facciamo fare? Cosa gli scriviamo? Da quello che abbiamo fatto qua come facciamo a fargli capire come procedere?
143. Cristina: Maestra, prima fa $9+7$ e scopre che fa 16.
144. I: E come glielo faccio capire che deve fare prima questo? C'è un modo matematico?
145. *Qualcuno suggerisce di usare le parentesi.*
146. I: Potrebbe essere un'idea, metto tra parentesi $9+7$, così capisce che deve farlo per prima, dici così? E il resto metto $+l$. E di qua cosa faccio?
147. Matteo L: $11+12...$
148. I: Lascio così?
149. Giuseppe: No, $11+12-l$.
150. Matteo L: Ma come 'meno'?
151. Alcuni dicono: Sì, è giusto.
152. Elia: Sì, perché $11+12$ è 23, meno l così scopre...
153. I (*riferendosi a Giuseppe*): Dimmi quello che intendi, io starò zitta per non confonderti le idee.
154. Giuseppe: Sì, trova $9+7$ e fa 16. Facendo $11+12-l$ arriva a 16.
155. I: Allora tu dici se lui fa $9+7+l$.
156. Giuseppe: Allora $9+7$ fa 16, allora arriva a fare $16+l$, l non lo sa, allora facendo $11+12-l$ toglie per arrivare a 16 e così...
157. I: **E cosa toglie?**¹⁷
158. Alan: $11+12-l$ diciamo che fa 16. Così riesci a capire quanto è l .
159. I (*riferendosi a Giuseppe*): Proviamo a scrivere. Tu dici che se lui fa...
160. Giuseppe: $9+7+l$ e poi uguale come ha detto Alan trova il risultato all'indietro e poi però facendo fra 23 e 16 capisce il numero misterioso.
161. I: Ma puoi scrivere $9+7+l=11+12-l$?
162. Alcuni dicono di no.
163. I: Così è scritto, non posso aggiungere un $-l$, cambia l'uguaglianza. Vorrebbe dire un'altra cosa. Ma lui dice (*parlando di Giuseppe*): "Se io faccio $11+12-l$ è uguale come $9+7$ " e questo è vero.
164. Giuseppe: Se fai $9+7$ solamente uguale a $11+12-l$ si arriva sempre a 16.
165. I: Aspetta che lo scrivo. Se tu fai $9+7$ e non metti l , quindi hai tolto $l...$ allora scriviamo così $9+7+l-l$, perché la vuoi tirare via, è uguale a cosa?
166. Giuseppe: $11+12-l$.

$9+7+l-l=11+12-l$

167. I: Adesso cosa si potrebbe fare?
168. Giuseppe: Eh, fa $9+7$ e arriva a 16 poi c'è il $+l$ ma $-l$ quindi non può fare niente, poi scopre che $11+12$ fa 23 e se toglie la l allora c'è la differenza tra 23 e 16.
169. Matteo B: Maestra, ma se c'è $+l-l$, cosa cambia, si può non metterla.
170. *Elia si avvicina alla maestra con il quaderno aperto e le dice qualcosa che poi l'insegnante ripete: Lui dice che Giancarlo, la scorsa volta che è venuto, ha tagliato quando sono più e meno. Allora lui dice che possiamo tagliare e quindi cosa resta?*

¹⁶ Dal diario non si capisce se questa frase di Giuseppe sia detta a voce o scritta alla LIM. Nel secondo caso andrebbe puntualizzato che $11+12 \neq 23-16$.

¹⁷ *Balbettito algebrico.*

171. Matteo L: $9+7=11+12-l$.
172. I: E quindi come trova Brioshi la l ?
173. Giuseppe: Cerca il numero tra le due cifre.
174. I: E come fa? Io direi che qua dobbiamo aiutarci con i quadratini e aiutarci con la rappresentazione grafica.
175. *L'insegnante riscrive l'equazione sottolineando che l'ordine in cui compaiono i numeri non rispecchia il testo, ma è un ordine che è stato scelto da Marco in quanto pensava di dover fare dei calcoli, ma viene comunque assunta come rappresentazione matematica in quanto non cambia niente.*
176. I: Che cosa disegno? Voglio fare con quelle striscioline di quadratini. Datemi un'idea.
177. Elia: 9^{18} .
178. I: Faccio una strisciolina di 9 e questo è il primo.
179. Elia: Ah no, 16, maestra.
180. I: Dopo?
181. Elia: 7. Maestra, ma basterebbe mettere 16.
182. *L'insegnante disegna i due pezzi e sopra ognuno ci mette una parentesi graffa per sottolineare che rappresentano i due scaffali distinti, come nell'animazione.*
183. I: Poi?
184. Elia: 11.
185. I: Dove? Vicino?
186. Elia: No, sotto.
187. I: Perché?
188. Elia: Perché sarebbe come se li calcoliamo tutti assieme.
189. I: Invece? Noi vogliamo distinguere che cosa?
190. Elia: Le librerie.
191. I: Metto 11 e dopo?
192. Elia: 12 attaccati.
193. I: E adesso?
194. Alessandro: E adesso il pezzo che manca. Se guardi la fine della prima striscia, c'è un pezzo che rimane.
195. I: Lo disegno?
196. Matteo L: No.
197. I: Non occorre? Non devo far capire che c'è?
198. Alessandro: Sì che devi.
199. I: Così sembra che una libreria abbia solo due scaffali.
200. Matteo L.: Uno in rosso.
201. I: Perché in rosso?
202. Matteo L.: Perché non sappiamo quanti libri ha.
203. I: Allora prendo il rosso e quanti faccio?
204. Alcuni rispondono 7.
205. I: Perché 7?
206. Marco: Quanti vanno in meno dal 23 alla fine.
207. I: Provate a pensare a come Giancarlo in questo tipo di lavoro fa capire che quello che c'è sopra è uguale a quello che c'è sotto. Come fa? C'è qualcosa che lui disegna.
208. Alan: Una righetta.
209. Matteo L.: Dove finisce il 16.
210. I: Ma lui ha un modo di mostrare con una cosa grafica che si fa con la matita, un modo per farci capire che il numero dei libri della prima libreria è uguale al numero dei libri della seconda. C'è un modo che lui usa... pensate ai filmini. Cosa faccio qua? Cosa disegno?
211. Alcuni dicono 7.
212. Elia: Aggiungi quanti mancano.
213. I: Per arrivare dove?
214. Elia: Per arrivare a 23.
215. I: Ma 23 cos'è? Voi volete che io vado fino a 23, ho capito bene?
216. Alcuni: Sì!
217. I: Disegno tanti quadratini finché arrivo al 23, alla stessa lunghezza dell'altra striscia. Quindi voi vedete adesso che queste librerie hanno lo stesso numero di libri? Io adesso ho messo i quadratini, ma dobbiamo far finta che non lo sappiamo. A noi non interessa, lo deve capire Brioshi. Allora Giancarlo ha inventato un sistema per far capire che questi due pezzi sono uguali, voi non lo ricordate ma lui ha usato questo segno qua (*l'insegnante disegna il segno dell'uguale in verticale, come nell'animazione*), queste due righe gialle per far vedere che quello che c'è sopra è uguale a quello che c'è sotto. Se voi guardate bene sono due righe, se le rovesciamo... cos'è?
218. Alcuni: È l'uguale!

¹⁸ *Viste le competenze maturate negli alunni anche nell'ambito della verbalizzazione, si può esigere da Elia una vera argomentazione.*

219. I: Che cosa facciamo adesso?
220. Giuseppe: Ah, c'è il 16.
221. I: Ma dove è questo 16?
222. Giuseppe: Ah, è il 7 tolto nel 12, se tu guardi sotto c'è la righetta che è il 7.
223. I: Aspetta, nel 12 c'è nascosto il 7?
224. Giuseppe: Se tu guardi la stessa misura.
225. I: Di cosa? Allora sapete che Giancarlo usava le forbici.
226. Cristina: Mette vicino i due pezzi e poi li colora dove sono uguali e poi li taglia così rimane il numero misterioso. *Cristina va alla lavagna.*
227. I: Cosa fa?
228. Cristina: Lui mette vicino il 9+7 e 11+12, poi guarda dove arriva il 9+7 e taglia là.
229. I: Se non può metterli vicini ma sono così e basta cosa farà?
230. *Brusio, non si capisce.*
231. I: Avete capito cosa ha detto Cristina? Lei dice che su questa striscia di 11+12 lui prende 9, fa un segno, mette 7 e là taglia e a questo punto cosa succede? Il segno giallo dove lo spostiamo? *Gli alunni indicano dove è stato tagliato.* Quindi rosso è uguale a questo pezzettino. Dobbiamo adesso scrivere in linguaggio matematico. Cosa scrivo? Quello che ha fatto Cristina cos'è?
232. Cristina: $11+12-9+7=l$.
233. I: Siete d'accordo? Quindi come arriviamo a trovare l? **Che calcolo dovresti fare qua?**¹⁹
234. Cristina: Faccio 11+12, faccio il calcolo, meno...
235. I: Allora scrivo $23-9+7=l$. Dopo?
236. Cristina: Dopo faccio 9+7 e lo tolgo a 23.
237. I: Quindi faccio $23-16=l$.
238. Cristina: Dopo faccio il calcolo e viene $7=l$.
239. I: Brioshi aveva un'altra idea! Giancarlo lo aveva già mandato a Brioshi. Adesso vi mostro. Lui ha fatto in un altro modo, forse più facile. Voi avete fatto giusto ma avete fatto un sacco di calcoli. Cristina non ha fatto -9 e poi quello che rimaneva -7, mi ha detto devo fare -16, tu volevi mettere insieme il 9 e il 7. Quindi come lo faccio capire?
240. Su suggerimento dell'alunna si aggiungono le parentesi:

$$(11+12)-(9+7)=l^{20}$$

241. I: Lei dice: "Io dalla somma di tutti i libri della seconda libreria tiro via i 9 del primo scaffale con i 7 del secondo scaffale e taglio". Quindi lei dice: "Faccio la somma dei libri della seconda libreria, tolgo la somma dei libri della prima libreria e rimarrà il pezzettino che rappresenta i libri del terzo scaffale"²¹. Ci siamo? Lei fa $23-16$ è uguale a l e una volta fatto il calcolo trova il valore. Questo è il modo che voi avete scelto. Vediamo cosa ha fatto Brioshi.
242. *L'insegnante simula alla lavagna la procedura della scena dinamica utilizzando i disegni delle strisce di carta.*
243. *Porta l'attenzione dei bambini al fatto che Brioshi toglie il 7 dall' 11 e il 9 dal 12.*
244. I: Vediamo se qualcuno di voi mi sa spiegare cosa ha fatto Brioshi. Io non ho l'animazione ma lo potete immaginare. Questo va via e questo va via (*riferendosi alle strisce che rappresentano il 7 e il 9 sia sotto che sopra*).
245. Giuseppe: Allora toglie, trova subito il numero perché lui... lui fa più o meno la stessa cosa ma il numero, il 7, non lo ha fatto tutto intero ma lo ha tagliato in due parti.
246. Matteo L.: Eh sì. Perché 4+3 fa 7.
247. I: Ma lui ha tagliato il 7 in due parti? Ha fatto questo?
248. Molti: Nooo!
249. I: Cosa fa Brioshi?
250. Cristina: Ha preso i 7, li ha colorati e li ha tolti dal 23.
251. I: Dal 23?
252. Cristina: No, dall'11 e dal 12, poi ha preso il 9 e dall'11 più 12 ha tolto anche il 9.
253. I: Sei sicura che lo ha tolto da 11+12? Sì, dalla striscia dove c'è 11+12, ma se tu guardi cosa ha fatto lui... Questi sono 7. Lui prende 7 e li taglia via da dove?
254. Matteo L.: Dall'11.
255. I: Forse dal disegno non si capisce. Voi vedete che qua c'è un pezzo di carta e qua un altro pezzo di carta. Cosa taglia lui?
256. Cristina: Io credo il 7 dall'11 e il 9 dal 12.
257. I: Quindi lui non fa quello che avete fatto voi, lui riporta il 7 sull'11 e lo taglia, poi mette il 9 sul 12 e lo taglia. Quindi con la matematica cosa fa? Scriviamo?

¹⁹ *Risolvere!*

²⁰ *Guardando solo la striscia che ha l...*

²¹ *Forse si dovrebbe precisare che si toglie la somma dei libri che conosco della prima libreria.*

258. Cristina: Fa... 11-7...
259. I: Fa 11-7 e...
260. Elisabetta: ... 12-9.
261. Elia: 11-7-12-9.
262. I: Meno?
263. Matteo L.: No, più 12-9.
264. I: Perché? Cosa succede qua? Mando via i pezzetti tagliati, che cosa succede adesso?
265. Elia: Che rimangono il 4 e il 3.
266. I: Se adesso spingo questi 4 vicini ai 3 io mi ritrovo a fare quello che avete fatto voi. Lo vedete? Cosa ha fatto? Ha fatto 11-7, ha fatto 12-9 e cosa ha fatto di questi tagli?
267. Elisabetta: Li ha uniti.
268. I: Brioshi considera questo 11 come se fosse fatto da... Lui quando taglia qua vede l'11 fatto come... Non come 11 ma come 7...
269. Matteo L.: 7+4.
270. I: **Esatto, al posto di 11 mettiamo 7+4 e taglia 7 da una parte e dall'altra²²**. Come vede il 12? Lui ha tolto il 9 e vedeva il 12 fatto come 9...
271. Elia: 9+3.
272. I: È la forma non canonica di 12. *L'insegnante sostituisce al 12 la sua forma non canonica e taglia il 9 da una parte e dall'altra.*
273. I: Brioshi non ha fatto nemmeno un calcolo, ha solo immaginato il numero in forma non canonica. Matteo B. rispieghi tu? Perché siamo arrivati qua? Cosa fa Brioshi senza fare nessun calcolo?
274. Cristina: Si è immaginato l'11 come 7+4 e ha tolto il 7 da sopra e da sotto.
275. I: Ha spaccato in due l'11 immaginando il taglio dove stava il 7 così non occorre calcolare.
276. Cristina: Il 12 se lo è immaginato come 9+3, quindi ha tolto il 9 ed è rimasto il 3.
277. I: Scrivendolo sarebbe:

$7+4-7+9+3-9=l$ ²³

278. I: Toglie il 7 con il -7, il 9 con il -9 e non fa nessun calcolo.

24

²² *Quando ho presentato la strategia di Brioshi i bambini l'hanno capita perfettamente, sebbene io abbia dovuto guidarli nella definizione dell'11 come forma canonica di 7+4.*

²³ *Ma sto guardando solo la striscia con l...*

²⁴ *Personalmente ritengo molto utile questo diario perché ci fa ben capire come ragionino spontaneamente gli alunni, sebbene siano comunque orientati al risolvere più che al rappresentare la situazione. Gli alunni fin da subito hanno unito tra di loro gli elementi dell'equazione, ad esempio parlano di 23 invece di 11+12, invece hanno fatto molta fatica a comprendere che 11 e 12 si possono rappresentare anche in modo diverso e in questo hanno dovuto essere guidati dall'insegnante di classe. Rimane tuttavia il ragionevole dubbio su come avrebbero risposto alla visione della scena dinamica, che magari li avrebbe illuminati maggiormente su questo aspetto. Nelle prossime occasioni sperimenteremo l'attività usando anche le scene dinamiche e proporremo situazioni con numeri più alti per osservare se negli alunni viene dato più spazio al rappresentare che al far di conto.*

*Nell'elaborare la rappresentazione e la risoluzione della situazione problematica secondo Brioshi, personalmente avrei mantenuto i due termini dell'equazione, partendo dalla corretta rappresentazione a cui gli alunni erano giunti all'inizio del diario. **Suppongo che la commentatrice si riferisca alla scrittura al rigo 131.***

Infatti $9-9+7-7+l=9+3-9+7+4-7$ è quello che avrei dovuto scrivere per rappresentare correttamente quello che si vedeva alla lavagna, dopo aver puntualizzato che 12 è 9+3 e che 11 è 7+4. Effettuati gli opportuni tagli (9-9 e 7-7) alla fine avrei ottenuto $l=3+4$.

Il fatto che la rappresentazione di Brioshi/Navarra servisse a scoprire il numero dei libri del terzo scaffale mi ha tradito, spingendo anche me nella direzione del risolvere più che rappresentare, isolando la lettera l (232)..

Comunque leggendo il diario, al di là della mia conduzione e degli errori, mi pare che il balbettio algebrico dei miei alunni abbia buone possibilità di diventare un vero e proprio linguaggio, con il tempo e se la maestra si impegnerà di più...

Ho molto riflettuto su queste rappresentazioni, provando a rappresentare molte equazioni diverse sia con le striscioline sia con le bilance, partendo dal presupposto che una rappresentazione deve aiutare ad arrivare a lavorare solo con numeri e lettere sapendo cosa si sta facendo, quindi pensando anche a quello che questi bambini faranno più in là negli anni.

Ad esempio: $9+7+l=12+11$ verrà risolto così:

*1) $l=12+11-9-7$ (adulti e ragazzi della secondaria di primo grado cui ho chiesto mi dicono che portano lettere da una parte e numeri dall'altra cambiando segno... anche se nessuno sa spiegare perché...). **Non mi meraviglio.***

2) Poi a seconda delle preferenze personali (esclusivamente legate al calcolo) continuano così:

$l=(12+11)-(9+7)$	Oppure	$l=23-9-7$
$l=23-16$		$l=14-7$
$l=7$		$l=7$

e la maggior parte non riscrive la l nell'uguaglianza dopo il primo passaggio.

Allo stesso modo $20-n=4+5$ viene svolto così:

$20-4-5=n$	Oppure	$n=20-(4+5)$
$n=16-5$		$n=20-9$
$n=9$		$n=11$

Tutti cercano di risolvere, e se chiedo un disegno che rappresenti ciò che fanno mi disegnano segmenti che rappresentano solo la situazione iniziale e subito la risoluzione per trovare l'incognita.

Ergo: è molto molto importante quello che stiamo facendo, ma una volta di più sarebbe necessario un confronto con gli insegnanti della secondaria... non si potrebbe pensare a una scheda/sondaggio da distribuire ai colleghi della secondaria in cui chiediamo come spiegano le equazioni ai ragazzi? Potremmo dire che ci serve per una ricerca...

Io in conclusione credo che la lettera che indica un numero che non conosco sia un potente invito per chiunque a scoprire che numero è, a maggior ragione se possiamo farlo prima di Brioshi..., quindi trovo che, dopo aver lasciato che risolvano pure l'equazione come gli viene istintivo, dobbiamo dedicarci tranquillamente a rappresentare con consapevolezza i vari passaggi.

²⁵ Alcune riflessioni conclusive.

Condivido i commenti precedenti degli insegnante di classe e della co-autrice (con le quali mi congratulo) e considero anch'io davvero molto importante questo lungo diario.

In termini generali, esso permette di capire quanto sia complesso per gli insegnanti di scuola primaria, che si confrontano con una didattica innovativa e mettono in gioco le proprie conoscenze e le proprie convinzioni, gestire l'approccio alle equazioni soprattutto perché, per i loro studi a livello di scuola superiore o di università a sfondo umanistico, o per la distanza temporale da quel periodo della loro vita, hanno perso il contatto con il mondo dell'algebra. Molte scelte nella conduzione dell'attività presentata in questo diario (e di altre simili) e molti dubbi da parte sua derivano dall'inevitabile scarsa esperienza in questo ambito; le insegnanti sono 'fuori allenamento' sia per quanto riguarda le conoscenze teoriche che le tecniche per la soluzione di un'equazione di primo grado.

Queste considerazioni portano all'opportunità / necessità di organizzare momenti formativi di approfondimento su questo tema. È necessario infatti che l'insegnante comprenda che la vera difficoltà sta nel capire come rappresentare una situazione problematica in linguaggio matematico: quella che abbiamo chiamato, nella strategia delle Scene dinamiche, Allestimento della Scena. Ciò che viene dopo è routine: si applicano i principi di equivalenza, si sostituiscono rappresentazioni canoniche con equivalenti non canoniche o viceversa, si applicano il principio di cancellazione o la regola del trasporto e poco più.

La strada più semplice nel risolvere l'equazione (in un 'giusto' equilibrio fra trasparenza ed economia) è dettata dall'esperienza.

Alcuni insegnanti hanno osservato che, quando i numeri sono piccoli, i bambini trovano facilmente il valore dell'incognita e perdono interesse per l'attività. Ma questo è un falso problema, perché il punto di vista va spostato: non è questione di numeri grandi o piccoli, perché l'attenzione della classe va guidata lentamente dal risolvere al rappresentare. Gli alunni vanno educati a capire che il loro obiettivo non è quello di trovare il numero sconosciuto, ma organizzare una rappresentazione che permetta ad altri di trovarla. L'esperienza dice che gli alunni capiscono e accettano senza grandi difficoltà un contratto didattico impostato in questo senso, a patto naturalmente che esso sia chiaro, negoziato e condiviso, distribuito nel tempo, costantemente ripreso, analizzato, approfondito attraverso la soluzione di situazioni problematiche significative.

Concludo dicendo che all'invio del diario da parte dell'insegnante è seguito un fitto, intenso carteggio concernente richieste di chiarimenti, approfondimenti, spiegazioni sulla relazione fra problema, scene dinamiche, rappresentazioni in linguaggio matematico, modalità di soluzione delle equazioni. Alcune riflessioni dell'insegnante nel corso di questo scambio sono confluite nei commenti.