

Analisi critica di processi di classe in ambito aritmetico-algebrico come modalità di formazione degli insegnanti

Dopo un breve richiamo alla valenza di un approccio anticipato all'uso delle lettere nell'insegnamento-apprendimento della matematica e all'importanza data nei programmi scolastici italiani all'individuazione e alla rappresentazione di relazioni, si riflette sul problema di un'adeguata formazione degli insegnanti sul doppio versante: (a) metodologico, per la costruzione collettiva delle conoscenze, (b) dei contenuti, per un approccio all'algebra centrato sui significati dei simboli nelle rappresentazioni costruite. Ci si sofferma sulla descrizione di alcuni strumenti messi a punto per la formazione iniziale degli insegnanti, si riflette sulle modalità del loro utilizzo e si conclude con considerazioni espresse da insegnanti circa la loro utilità.

Nicolina Malara e Giancarlo Navarra

Dipartimento di Matematica e SSIS, Università di Modena & Reggio Emilia

1. INTRODUZIONE

Uno dei problemi più sentiti dagli insegnanti nel passaggio dalla scuola secondaria di primo a quella di secondo grado riguarda le *difficoltà che gli studenti incontrano nell'approccio all'algebra*, dovuto in gran parte al mancato riconoscimento *del significato* da attribuire allo studio delle forme algebriche, cosa che dà luogo all'allontanamento dalla matematica.

Sin dagli anni 80 la ricerca ha messo in luce come molte di tali difficoltà abbiano radici nell'insegnamento dell'aritmetica nella scuola primaria, troppo rivolto agli aspetti di calcolo e finalizzato al raggiungimento di 'risultati', ed ha posto il problema della necessità di una *rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in chiave pre-algebrica* centrata sull'osservazione di *processi* e sulla individuazione di *analogie* tra di essi (Davis 1985, Kieran 1989, 1992, Linchevski 1995).

In quegli anni a livello internazionale viene individuato in ambito aritmetico uno spazio di insegnamento nella scuola dell'obbligo specificamente dedicato ad attività pre-algebriche. Vengono proposti percorsi didattici innovativi rivolti all'individuazione di regolarità, alla rappresentazione di procedimenti operativi (sia aritmetici che rispetto a situazioni problematiche in contesti realistici), alla loro 'lettura' in termini relazionali e/o strutturali, e viene proposto un *uso anticipato delle lettere* per la rappresentazione in termini generali di relazioni osservate.

In diversi studi si promuove l'uso di strumenti fisici come mezzo di mediazione semeiotica nel quadro di una *visione dell'algebra come linguaggio* e vengono indicate modalità didattiche di tipo *socio-costruttivo* in cui l'insegnante non trasmette il sapere da apprendere ma devolve agli allievi la sua costruzione attraverso attività di interazione di classe a partire dalla proposizione della esplorazioni di apposite situazioni problematiche (Da Rocha Falção, 1995; Meira, 1990, Radford 2000).

Tali studi, iniziati in un primo tempo con allievi di 11-14 anni, hanno condotto ad una crescente attenzione verso la scuola primaria ed ad una loro evoluzione verso livelli scolari più bassi, fino all'affermarsi della cosiddetta '*early algebra*', area d'insegnamento ormai presente nei programmi di alcuni paesi quali il Regno Unito (1991) e negli Standard statunitensi (2000).

2. UNO SGUARDO AI PROGRAMMI ITALIANI PER LA SCUOLA DELL'OBBLIGO

Per quanto riguarda il nostro paese c'è da sottolineare che già nei programmi della scuola media del '79, in vigore fino a pochi anni fa, viene ridimensionato il tradizionale insegnamento dell'aritmetica (centrato sull'esecuzione di algoritmi e sulla semplificazione di espressioni) mentre viene promosso un insegnamento di tipo *relazionale* rivolto all'esplorazione del reale, con una forte proiezione verso il riconoscimento di analogie strutturali anche in riferimento ai vari tipi di numeri (si parla di ambiti o

sistemi numerici). E' indicato un *approccio linguistico* all'algebra per lo studio di situazioni problematiche, sia realistiche sia interne alla matematica, per evidenziare leggi e/o elaborare informazioni. Questi indirizzi si ritrovano in continuità nei programmi per la scuola elementare entrati in vigore nel 1987, nei quali prevale *una visione della matematica centrata sul problem solving e sull'individuazione di relazioni anche in ambito aritmetico*.

Tali indirizzi sono amplificati nelle proposte messe a punto, nell'ambito della riforma Berlinguer, dalla commissione della Unione Matematica Italiana ed esemplificate nel testo *Matematica 2001* (si veda UMI 2001). In tali proposte organizzate per 'nuclei fondanti', ossia per temi chiave, l'area aritmetico-algebrica è coperta dai temi 'Il numero', 'Le relazioni' ma anche da 'I dati e le previsioni', nonché dai temi trasversali 'Argomentare e congetturare' e 'Risolvere e porsi problemi'.

Un'attenzione agli aspetti relazionali è presente anche nei cosiddetti 'programmi Moratti', sebbene più didascalici e meno ambiziosi rispetto all'impianto del *Matematica 2001*, in riferimento al tema 'Sviluppo del pensiero razionale'. Nelle recentissime indicazioni ministeriali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di Istruzione (sett. 2007), in cui si riprende l'impianto culturale di *Matematica 2001*, i temi 'Numeri', 'Relazioni, misure, dati e previsioni' coprono l'area aritmetico-algebrica e si configura un'approccio all'early algebra in alcuni obiettivi di apprendimento quali '*riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure*' alla fine della scuola primaria e '*costruire, interpretare e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà*' alla fine della scuola secondaria di primo grado. Ma ciò che dà loro spessore, è il quadro metodologico, di tipo costruttivo, tipico dell'early algebra, espresso nelle indicazioni di accompagnamento. Nel paragrafo 'Matematica', dove se ne chiariscono le peculiarità, si legge infatti: "*caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana... . Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione tra pari, l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problema, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive. ... In particolare nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. ... Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni ed i procedimenti seguiti*".

3. IL PROBLEMA DELLA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Quanto esposto sinora pone il problema di un'adeguata *formazione degli insegnanti*.

Gli studi relativi all'area dell'early algebra non affrontano solo questioni di implementazione di attività innovative nella scuola primaria ma affrontano anche il problema della formazione degli insegnanti, com'è stato documentato in diversi contributi al 12-esimo ICMI Study '*The future of learning and teaching of Algebra*' (Cick & Al. 2001). Per l'Italia non va dimenticato che il modello di insegnamento tuttora dominante è quello tradizionale, spesso praticato anche dai giovani, nonostante le opportunità offerte dai corsi istituzionali di formazione (Facoltà di Scienze della Formazione e Scuola per l'Insegnamento nella Scuola Secondaria). Tra l'altro, essendo recente l'istituzione di tali corsi di studio, non sempre l'offerta formativa è adeguata ed in particolare, non sempre l'attività di tirocinio nelle classi offre modelli d'insegnamento innovativi, in sintonia con quelli in genere proposti nei corsi di didattica disciplinare.

Il nostro '*Progetto ArAl*' (Malara & Navarra, 2003) nasce e si sviluppa nel quadro degli studi che hanno concorso alla nascita dell'early algebra e coniuga l'innovazione nella classe con la formazione degli insegnanti. Esso propone una rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in chiave pre-algebrica nella scuola dell'obbligo ed un avvio all'algebra di tipo linguistico-costruttivo. Nel nostro approccio l'elemento chiave è l'insegnante, occorre infatti che egli attui una didattica che consenta

l'affermarsi di un'autentica attività matematica socialmente condivisa, in cui si dia grande spazio agli aspetti meta-cognitivi ed alla rappresentazione di informazioni e processi. Per questo, la struttura metodologica del progetto è concepita come *sistema formativo integrato*: gli insegnanti, attraverso seminari e incontri di approfondimento, partecipano alla messa a punto dei materiali da sperimentare nelle classi, alla redazione dei verbali relativi alla sperimentazione e alla periodica valutazione delle attività. La nostra metodologia di lavoro con gli insegnanti, come mostriamo nel paragrafo seguente, ha subito nel tempo importanti evoluzioni, grazie anche al ruolo più impegnato e partecipe assunto da questi ultimi (Malara 2003, 2005, Malara e al. 2004, Malara 2007a).

4. LA NOSTRA METODOLOGIA

Sin dalla seconda metà degli anni '90 le nostre ricerche si sono rivolte all'*analisi dei processi di classe*, svolte guardando alle interrelazioni tra comportamenti dell'insegnante e conoscenze costruite dagli allievi. Attraverso tale analisi vengono individuate modalità ottimali per la costruzione dei concetti o, più frequentemente, la genesi di ostacoli o di deviazioni rispetto alle previsioni dei docenti, e vengono evidenziati aspetti critici circa decisioni e comportamenti dell'insegnante nello sviluppo del processo.

La metodologia attuale, che viene seguita anche per la realizzazione delle tesi di diploma SSIS, si basa su: (i) *la trascrizione delle audioregistrazioni* di quanto avviene nella classe; (ii) *riflessioni e commenti scritte a latere delle audioregistrazioni*, a carattere sia locale che generale, di insegnanti, mentori e ricercatori; (iii) *incontri di confronto critico* sui risultati dalle analisi svolte. I processi attualmente in esame riguardano l'esplorazione di situazioni che puntano allo studio di successioni e di funzioni da un punto di vista relazionale, in cui viene devoluta agli allievi la rappresentazione delle regolarità osservate in linguaggio algebrico e secondo altri registri rappresentativi.

L'obiettivo di tali studi è duplice. Da un lato, si vogliono esplorare delle modalità che favoriscano negli insegnanti la consapevolezza di come loro conoscenze, concezioni, atteggiamenti, modi di comunicare influenzino la qualità dell'apprendimento degli allievi e conducano, nel tempo, alla maturazione di una professionalità più articolata. Dall'altro si vogliono raccogliere materiali e mettere a punto strumenti da utilizzarsi in attività di formazione e tirocinio, dirette o a distanza, nell'area dell'early algebra.

Il nucleo della nostra attività consiste nel guidare gli insegnanti ad analizzare specifici processi di classe (propri o altrui) ed a *riflettere* attorno ad essi a vari livelli e secondo tre punti di vista: lo sviluppo della costruzione matematica degli allievi, l'azione dell'insegnante, la partecipazione dei singoli nella costruzione collettiva delle conoscenze. Per questo facciamo ricorso a strumenti come:

- *'animazioni di discussioni di classe'*, con quesiti specifici su momenti particolari della discussione, concepite per mettere a fuoco problematiche che emergono nell'attuare specifici processi didattici con modalità costruttive (Malara 2005);
- *'set di scene di processi di insegnamento-apprendimento'*, una tipologia di attività laboratoriale a livello individuale, da noi appositamente concepita per la formazione dei futuri insegnanti, centrata sull'analisi critico-previsionale di scene costitutive un dato processo di classe (Malara & Navarra 2007);
- *'unità di apprendimento'* nei quali si chiede al docente in formazione di analizzare brevi frammenti significativi di audioregistrazioni di attività di classe corredati da commenti di vari autori (insegnante, mentori, ricercatori).

5. IL WORKSHOP

Durante il workshop, dopo un breve richiamo sulle problematiche dell'early algebra e i principali elementi del nostro quadro teorico, ci si è soffermati sull'analisi di due casi, uno relativo alla animazione di una discussione di classe svolta in terza elementare, l'altro relativo alla analisi critico-previsionale di un set di scene di un processo di insegnamento svolto in una prima media. Ci

soffermiamo brevemente su di essi.

5.1. l'analisi di una discussione in terza elementare sul ruolo delle parentesi

Si è presentato uno stralcio di discussione svolta in una terza elementare relativa ad una attività legata all'implementazione dell'Unità ArAl *'Verso il numero sconosciuto: il gioco della Matematóca'* e rivolta a: la rappresentazione algebrica di semplici espressioni verbali indicanti procedimenti aritmetici; l'interpretazione verbale di formule rappresentanti procedimenti relativi ad un dato contesto. Si è analizzata in particolare una discussione attuata da un'insegnante in una attività di espansione del percorso indicato nell'Unità, visti il gradimento e i risultati della classe circa l'Unità. L'attività riguardava la traduzione della seguente frase di un cartellino della Matematóca:

'Aggiungi al punteggio del dado il punteggio del dado e poi dividi tutto per due'.

Con la discussione l'insegnante voleva portare gli allievi a scontrarsi con la *necessità di utilizzare le parentesi*, da loro già incontrate ed usate in altri 'giochi' legati al riconoscimento di semplici rappresentazioni numeriche equivalenti. Gli allievi avevano anche già imparato a rappresentare con una lettera l'esito del dado, variando questo da caso a caso.

Nel workshop la discussione è stata analizzata da un duplice punto di vista:

a) *dell'azione dell'insegnante* nella gestione della discussione, in particolare nel modo di guidare la riflessione degli allievi sul significato dell'uso delle parentesi;

b) *delle influenze reciproche degli alunni*, intesi come *sistema sociale*, in relazione alla considerazione e al riconoscimento attribuiti ai contributi dei compagni nello sviluppo della costruzione collettiva delle conoscenze. Per approfondimenti sul caso presentato si veda Malara (2005).

5.2. Uno 'strumento' per la formazione degli insegnanti: l'analisi critico-previsionale di processi di classe

La nostra ricerca, condotta *con/per* gli insegnanti e mirata ad un approccio socio costruttivo dell'insegnamento dell'algebra, ci ha resi consapevoli delle difficoltà che essi incontrano sia nella progettazione che nella conduzione delle *discussioni di classe*. I nostri studi hanno inoltre messo in evidenza come, nello sviluppo di una discussione, gli insegnanti spesso assumono atteggiamenti non adeguati, che ricalcano il modello trasmissivo, che li portano a: non rendere gli studenti partecipi delle finalità del problema o delle conclusioni da raggiungere; non dare spazio ad interventi potenzialmente produttivi da loro non previsti, ratificare immediatamente la validità di interventi significativi senza rilanciare alla classe la loro validazione (Malara 2003).

Per queste ragioni abbiamo concepito un *modello di compito* che dia agli insegnanti la possibilità di confrontarsi anche in una prospettiva teorica con la pratica dell'insegnamento costruttivo e li guidi a concentrarsi sugli aspetti *previsionali* e su quelli collegati alla *riflessione a diversi livelli sui processi di classe*: sviluppo delle conoscenze matematiche degli alunni, azione dell'insegnante, partecipazione individuale, ecc..

Il compito si sviluppa solitamente in cinque o sei *Scene strutturate come un insieme connesso di compiti* e in una *Riflessione Finale*. Le Scene si basano su estratti di trascrizioni di una delle tante sperimentazioni in classi partecipanti alle nostre sperimentazioni. Ogni Scena si riferisce ad un'attività parzialmente autonoma rispetto alle altre e colloca l'insegnante in formazione in modo 'realistico' in una situazione di classe. Si compone di due sezioni: (I) la prima presenta una sintesi della trascrizione; (II) la seconda pone delle questioni, relative alla sintesi, nelle quali si chiede agli insegnanti di esprimere la loro opinione sulla significatività del compito proposto alla classe, di formulare ipotesi sulle produzioni, sulle affermazioni, sulle difficoltà degli alunni, di produrre esempi di discussioni 'immaginate' attorno al confronto collettivo dei protocolli. Nel loro insieme le Scene pongono quindi l'insegnante in formazione di fronte a un *processo di classe simulato*.

Gli insegnanti ricevono le Scene in sequenza, ad intervalli regolari di tempo (in media 20-30 minuti). Quando lavorano attorno alla prima Scena non conoscono ancora la seconda; quando

elaborano la seconda non conoscono la terza e così via sino alla conclusione della prova. Dopo aver analizzato l'input proposto nella prima parte di ogni Scena, l'insegnante formula delle ipotesi sulle reazioni della classe; nella scena seguente confronta le sue ipotesi con ciò che è davvero accaduto nel prosieguo dell'attività e così via fino all'ultima Scena. Alla fine del percorso viene chiesta una riflessione a due diversi livelli: *sull'attività didattica in sé* (i processi di classe analizzati dal punto di vista della costruzione dei concetti matematici e da quello della valutazione educativa degli alunni) e sulla *struttura della prova* (la significatività del compito proposto in relazione allo sviluppo professionale di un docente in formazione).

Questo genere di compito si è sviluppato nel tempo e può essere visto come il *risultato di un processo di ricerca*: da una prima idea di produrre materiali di lavoro interconnessi e da utilizzare anche nella formazione a distanza (spesso tratti da trascrizioni di processi preparatori alle Unità ArAl) alla loro successiva trasposizione in veste di *compito* per i laboratori metodologico-disciplinari per gli insegnanti in formazione. Durante il workshop è stato analizzato un compito relativo ad una situazione problematica a cavallo tra problem solving e funzioni riguardante la modellizzazione di informazioni di tipo funzionale espresse verbalmente e l'attivazione ed interpretazione di loro composizioni per dedurre altre informazioni (Malara 2007b), altri esempi di compito riguardanti l'individuazione di regolarità e leggi di corrispondenza si trovano in Malara & Navarra (2007).

CONCLUSIONI

La metodologia che abbiamo presentato si ripropone di guidare il docente -attraverso la riflessione- ad una riconversione di conoscenze, convinzioni, suoi personali atteggiamenti nella classe, affinando la capacità di gestione dell'attività ed il controllo di sé nell'azione in modo da condurlo verso *l'acquisizione della consapevolezza dell'importanza della coerenza fra una teoria di riferimento e la prassi didattica*. Come conseguenza di tale rinnovamento, gli alunni dovrebbero essere guidati, attraverso la fase del balbettio algebrico verso la progressiva conquista della capacità di rappresentare algebricamente proposizioni, relazioni e proprietà, e viceversa di interpretare formule in riferimento ad un dato contesto facendo loro assumere una visione dell'algebra come linguaggio di descrizione e di esplorazione del reale. L'ambiente educativo socio-costruttivista dovrebbe favorire, soprattutto attraverso l'affinamento delle competenze linguistiche e argomentative, la capacità di lavorare e di confrontarsi in gruppo, contribuendo ad una costruzione socialmente condivisa delle conoscenze.

Strumenti come *l'analisi previsionale di processi di classe* hanno permesso di ottenere riscontri interessanti sul campo nei vari ambienti e situazioni nei quali essi hanno trovato applicazione: collaborazioni, corsi di formazione, e-tutoring, corsi SSIS. Riportiamo in appendice, a titolo di esempio, alcuni brani delle osservazioni conclusive di specializzandi sottoposti a questo strumento come prova d'esame al termine di corsi laboratoriali sull'early algebra. Le loro osservazioni riflettono molto chiaramente l'obiettivo principale della prova: porre il docente in situazione in modo tale da permettergli di collegare criticamente fra loro tre nodi: il suo rapporto con la matematica precedente alla scuola di specializzazione, il conflitto con tale preparazione indotto dall'incontro con l'early algebra, la mediazione fra questi due nodi imposta da una simulazione credibile con una micro-realtà di classe.

BIBLIOGRAFIA

- Chick, E. & Al. (eds): 2001, *The future of the teaching and learning of algebra*, Proc. 12th ICMI Study, University of Melbourne, Melbourne, Australia
- Davis, R.B.: 1985, ICME-5 report: Algebraic thinking in early grades, *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208
- Da Roca Falcão, J.T.: 1995, A case study of Algebraic Scaffolding: from Balance to algebraic notation, proc. PME 19, vol. 2, 66-73

- DFE (Department for Education): 1991, *Mathematics in the National Curriculum*, HMSO, London
- Fiorini, R., Marchi, S., Nasi, R., Stefani, P.: 2006, Progetto ArAl: U9: *Verso le funzioni*, Progetto ArAl Pitagora, Bologna.
- Kieran, K.: 1989, The Early Learning of Algebra: a Sctrutturale Perspective, in Wagner S. and Kieran K. (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, LEA, Reston Virginia, 33-56
- Kieran K.: 1992, The learning and teaching of school algebra, in Grouws D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, NY, 390-419
- Linchevski L.: 1995, Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra, *Journal of Mathematical Behaviour*, vol. 14, 113-120
- Malara, N.A.: 2003, Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project, *Proc. PME 27*, vol. 1, 33-48
- Malara, N.A. 2005, Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra, Santos, L. & Al. (eds), *Mathematics Education: Paths and Crossroads*, Lisbona, 285-304
- Malara, N.A., 2007a, Crossed Critical Reflections as a Way of Promoting Teachers' Awareness and Improving Their Professional Development, presentazione su invito al WG 'Teachers Education' del "The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education",
- Malara, N.A.: 2007b, Studi con e per gli insegnanti di analisi critica su processi di classe in early algebra, Convegno UMI, Bari, settembre 2007, conferenza su invito
- Malara, N.A., Navarra G.: 2003, *Progetto ArAl: Quadro teorico e glossario*, Pitagora, Bologna.
- Malara, N.A.: 2005, Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra. In L. Santos et al. (Eds.), *Mathematics Education: Paths and Crossroads*, Lisbon, PT: Etigrafte, 285-304
- Malara, N.A., & Navarra, G.: 2007, A task aimed at leading teachers to promoting a constructive early algebra approach. *Proc. CERME 5 - W.G.12: From a study of teaching practice to issues in teacher education*, Larnaka, Cypro (in stampa)
- Malara N.A., Incerti, V., Fiorini, R., Nasi, R.: 2004, *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebraica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Pitagora, Bologna.
- Meira L. L., 1990, Developing knowledge of functions through manipulation of a physical device, *PME 14*, vol.2, 101-108.
- MPI, 2007, Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione, Tecnotd editrice, Napoli
- Navarra, G., Giacomini, A.: 2004-2006, *Progetto ArAl: Unità 1-8*, Pitagora, Bologna.
- NCTM, 2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, traduzione italiana in <http://kidslink.bo.cnr.it/fardicono/>
- Radford L.: 2000, Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 42, n.3, 237-268
- UMI, 2001, *Matematica 2001: Materiali per un nuovo curricolo di Matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica*, Pitagora, Bologna

Brani delle osservazioni conclusive di specializzandi per l'insegnamento nella scuola media (classe A059) di fronte ad un compito laboratoriale di analisi critico-previsionale di processi di classe.

"La struttura della prova mi ha posto di fronte a un grande problema: spesso non sono stata in grado di prevedere gli atteggiamenti e le difficoltà che ragazzi possono incontrare nell'avvicinarsi all'algebra. La mia formazione di tipo matematico ha condizionato il mio modo di analizzare un problema tanto da non riuscire spesso a trovare possibili analisi alternative. Leggere i diari ArAl mi ha arricchito di un'esperienza che non ho (quella della discussione collettiva) ma che, sono ormai convinta, è molto utile per l'avvio dei ragazzi allo studio dell'algebra, e non solo."

"Nella mia esperienza di alunna non ho mai incontrato docenti che adottassero questi tipi di approcci (mi riferisco in modo particolare alla scuola media) e questo ha fatto sì che tutti i concetti presenti in questa situazione fossero dilazionati nel tempo, noi studenti ci siamo imbattuti per caso in essi, con il rischio, a volte, di possedere questi concetti ma scollegati fra loro, quasi che non fossero proprio la stessa cosa. Per questo io stessa sono molto stupita di quante siano le esplorazioni possibili e di quanto lavoro sia necessario fare su se stessi per superare concezioni di algebra così statiche e meccaniche a cui sono abituata".

"In relazione alla significatività di questa prova mi sento in effetti chiamata in causa in prima persona. La mia formazione scolastica mi ha portato, lo riconosco, ad una visione dell'algebra, e della matematica in generale, di tipo decisamente "operazionale", cioè legata alla risoluzione di problemi e finalizzata ad ottenere un risultato. L'aspetto metacognitivo non è mai stato fra le priorità di studio e di analisi. Davvero ho vissuto l'algebra (quasi sempre) come un insieme di regole indirizzate al prodotto, senza nulla chiedermi sul processo... Quanto ci è stato detto a lezione mi ha quindi decisamente colpito, e credo che molti degli insegnanti della mia generazione siano nella stessa situazione. Un approccio come quello proposto da questa prova credo sia utile, se non indispensabile, per insegnarci ad affrontare l'algebra in modo diverso, sia come docenti che come persone."

"Una delle più grandi difficoltà che ho sempre trovato in me stessa e negli studenti ai quali ho parlato di algebra (durante le lezioni private) è davvero la sua apparente inapplicabilità alla realtà tangibile. Come ho già detto, questa è una prova che accompagna studente e insegnante a scoprire l'algebra come linguaggio per descrivere la realtà. Fare il passaggio dall'astrazione in cui ci è stata introdotta l'algebra alle superiori alla concretezza con cui essa descrive la realtà è molto difficile anche per noi insegnanti. È come fare il percorso dal particolare al generale, che pure è già difficoltoso, all'incontrario: dal generale e ritornare in un certo senso (spero di non essere fraintesa) al particolare. Cioè: dietro il problema della classica "spesa" c'è l'algebra... Se fin dalla scuola dell'infanzia ci si abitua a vedere l'algebra come una "nuova lingua" allora la si utilizza senza problemi in futuro (si potrebbe fare una analogia con lo studio delle lingue straniere). L'approccio è interessante perché parte da qualcosa di vicino ed arriva alle funzioni, di solito oggetti matematici molto ostici proprio a causa del loro grado di astrazione. Sicuramente lo studio e la riflessione proposti sono uno stimolo notevole per l'insegnante stesso che accompagna gli studenti e può essere utile svolgerlo a tavolino come abbiamo fatto oggi. Solo richiede, per non essere reso banale, tempi, a mio parere, molto più lunghi e rilassati. Proprio perché è molto ricco, il compito va *scrutato intensamente* e non solo *sbirciato*. Sarebbe molto utile a tal proposito il supporto Web."