"Cinque per tre fa quin… ?" "… dici" "Bravo!"
La metodologia delle trascrizioni pluricommentate come strumento per lo studio dei comportamenti linguistici dei docenti di matematica e la promozione di sensibilità e competenze in tale ambito[1]

Giancarlo Navarra[2]

1. Introduzione

Nelle Indicazioni Nazionali per il Curricolo (2012) si individuano – distribuiti fra gli aspetti metodologici e quelli relativi ai contenuti disciplinari - numerosi elementi di innovazione dell'insegnamento della matematica, soprattutto per quanto concerne gli *aspetti linguistici*. Per l'enfasi data alla discussione, all'argomentazione e alla costruzione sociale della conoscenza il linguaggio verbale diviene elemento cardine per la costruzione dei concetti matematici e la riflessione su di essi, per l'oggettivazione delle reti che li connettono e per il coordinamento tra i vari sistemi di rappresentazione della matematica: diventa esso stesso *oggetto di insegnamento*.

2. L'approccio al pensiero prealgebrico in una prospettiva linguistica e la Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate

La nostra prospettiva nell'approccio al pensiero prealgebrico (early algebra) è *linguistica e metacognitiva* e si basa sull'ipotesi che vi sia un'analogia tra le modalità di apprendimento del linguaggio naturale e del linguaggio algebrico[3]. Spieghiamo questo punto di vista con la metafora del *balbettio algebrico*. Il bambino, nell'apprendimento della lingua madre, si appropria poco alla volta dei suoi significati e delle regole che la supportano, che sviluppa gradualmente sino agli approfondimenti nell'età scolare. Analogamente prefiguriamo debba avvenire per il linguaggio algebrico. La metafora del balbettio si contrappone alla didattica tradizionale dell'algebra nella quale si inizia privilegiando lo studio delle regole come se la manipolazione formale fosse indipendente dalla comprensione dei significati; si propone invece di costruire il pensiero algebrico progressivamente, parallelamente all'aritmetica, partendo dai significati e attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo informale l'elaborazione autonoma, sperimentale, di un nuovo linguaggio nel quale le regole possano gradualmente trovare la loro collocazione, all'interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente 'promiscui'.

La *Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate (MTP)* è lo strumento che supporta l'insegnante nella costruzione delle competenze necessarie per sviluppare la propria didattica in un ambiente 'early algebra'. MTP favorisce la riflessione sull'attività di classe dal punto di vista *matematico, linguistico*, *metodologico* attraverso trascrizioni di registrazioni di attività di classe commentate da docenti e mentori su vari temi: modalità della conduzione, attenzione per i contenuti, aspetti linguistici, dinamiche sociali [4].

I diari sono importanti dal punto di vista:

- <u>diagnostico</u>: forniscono un quadro delle competenze e della sensibilità dell'insegnante;
- <u>formativo</u>: consentono all'insegnante di riflettere sulla qualità dell'azione didattica;
- <u>valutativo</u>: danno a insegnante e ricercatori elementi per valutare l'efficacia degli interventi;
- <u>sociale</u>: consentono, mediante la loro diffusione, la condivisione dei saperi in gioco.

I commenti più frequenti forniscono chiavi di lettura degli atteggiamenti più diffusi nei docenti e hanno permesso di evidenziarne alcuni più o meno produttivi. Illustreremo ora quattro aspetti di ciò che stiamo

[1] ~~L'articolo,~~ Il testo, la cui stesura scritta è a cura di G. Navarra, presenta l'evoluzione del progetto di ricerca illustrato al convegno GISCEL 2012 (Deon, Navarra, 2014) ed è organizzato con la collaborazione di Donatella Lovison (GISCEL Veneto).

[2] Giancarlo Navarra, co-responsabile scientifico e coordinatore nazionale del 'Progetto ArAl: Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico', responsabile scientifica Nicolina A. Malara, Università di Modena e Reggio Emilia.

3 Cusi, Malara, Navarra, 2011.

[4] Nel 2005 è stato avviato il progetto MTPAL (applicazione di MTP all'Ambito Linguistico) che raccoglie ricercatori ArAl, esperti GISCEL e docenti dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di I grado di quasi tutte le regioni italiane, nel corso del quale sono stati commentati diari sia in ambito linguistico che matematico (Deon e Navarra, 2014).

dicendo attraverso alcuni episodi di classe tratti da diari MTP, centrati su questioni linguistiche da due punti di vista:

(a) delle relazioni fra linguaggio naturale e linguaggio matematico;

(b) del linguaggio usato in classe durante lo svolgimento di attività matematiche. [5]

3. Primo aspetto. Nella costruzione collettiva delle conoscenze produrre e interpretare parafrasi sono strategie basilari per il passaggio dall'oralità allo scritto e per la traduzione dal linguaggio naturale a quello algebrico e viceversa; sul piano matematico, favoriscono l'approccio alla generalizzazione

L'approccio all'early algebra con alunni fra i 5 e i 14 anni comporta il riconoscimento dell'importanza delle relazioni tra le capacità di *argomentare* e di *generalizzare*. Condizione necessaria perché questo rapporto si espliciti è che l'argomentazione rappresenti per insegnante e alunni un valore condiviso e aiuti l'alunno a comprendere come la parola affini la capacità di *riflettere su ciò che dice*. Verbalizzare collegando fra loro casi particolari, aiuta a superare la loro individualità perché permette di rendere *trasparenti* le loro affinità facendo emergere gradualmente il filo logico *generale* che le unisce. Si tratta quindi di esplorare ambiti, metodologie, atteggiamenti che – da diversi punti di vista: linguistico, percettivo, sociale, matematico - possano favorire la costruzione di premesse significative per un approccio graduale alla generalizzazione. In questo senso diventa centrale il ruolo dell'insegnante; la discussione matematica svolge un ruolo nodale e la sua gestione richiede competenze che non riguardano solo la conoscenza della disciplina, ma anche la consapevolezza verso i suoi aspetti linguistici.

Gli episodi A1 e A2 si riferiscono rispettivamente ad attività con le 'piramidi di numeri' (unica regola: ad ogni coppia di numeri scritti in due 'mattoni' affiancati corrisponde la loro somma nel mattone della fila di sopra 'a cavallo' fra essi) e alla ricerca di regolarità come approccio alle funzioni. Entrambi evidenziano come il p*arafrasare* in linguaggio matematico porti l'alunno ad esplorare le relazioni fra gli elementi del problema (*sviluppo del pensiero relazionale*) e a scoprire l'analogia strutturale con altre rappresentazioni (*sviluppo del pensiero analogico*). Viene favorita in questo modo l'evoluzione del *balbettio logico-linguistico*. Il controllo di rappresentazioni diverse della stessa situazione, costantemente supportato dall'argomentazione, favorisce l'interiorizzazione dei concetti.

3.1 Ep. A1 (Quinta prim.)

L'insegnante guida la classe verso l'individuazione della 'legge' che permette di esprimere il numero nel mattone in alto in una piramide a tre piani in funzione dei numeri alla base *senza eseguire i calcoli intermedi*. Data una piramide (Fig.2a) il completamento 'classico' (Fig.2b) non permette di individuare la legge generativa in quanto conduce ad un risultato (20) *inespressivo del processo che lo determina*.

7	4	5

Fig.2a

	20	
11		9
7	4	5

Fig.2b

	7+4×2+5	
7+4		4+5
7	4	5

Fig.2c

Sono invece le rappresentazioni *non canoniche*[6] (Fig.2c) che permettono di costruire una definizione del numero in alto. L'insegnante quindi chiede agli alunni di scrivere ciò che suggerisce loro la rappresentazione del numero in alto. Alcuni esempi tratti dai diari:

- "Per trovare il numero in alto si fa il numero a sinistra, poi si moltiplica per 2 il numero in mezzo e poi si aggiunge il numero a destra".
- "Ho aggiunto al primo numero il doppio di quello dentro il mattone nel centro e poi ho sommato l'ultimo".
- "Il numero in alto è una somma".

[5] Legenda dei diari: RIC = ricercatore, INS = insegnante, COM = Commento.

[6] Tra le possibili rappresentazioni di un numero una (per esempio 12) è il suo nome, chiamato *forma canonica*, tutti gli altri (3×4, (2+2)×3, 36/3, 10+2, ...) sono sue forme *non canoniche*, e ciascuna di esse acquista senso in relazione al contesto e al processo soggiacente. Saper riconoscerle e interpretarle permette di costruire le basi per la comprensione delle espressioni algebriche. Le rappresentazioni non canoniche sono *traghetti semantici* verso la generalizzazione.

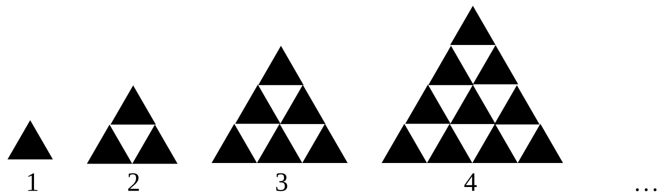
Le prime due sono definizioni *procedurali*, dicono cioè cosa bisogna *fare* per trovare un *risultato*. La terza è l'embrione di una definizione *relazionale*, esprime cioè la relazione, in questo caso additiva, fra i numeri in gioco (uno di essi, 4×2, è dato attraverso una rappresentazione moltiplicativa). È favorendo la riflessione degli alunni su quest'ultimo tipo di frasi che si può giungere all'elaborazione negoziata di una definizione *relazionale ontologica* del numero in alto, che costituisce l'esplicitazione in linguaggio naturale della legge generale: *"Il numero in alto è la somma fra i due numeri laterali e il doppio del numero centrale".* Dopo un certo numero di verifiche su diverse piramidi, il passaggio davvero importante è dato dalla comprensione che la frase in linguaggio naturale presenta quello che chiamiamo un *generale potenziale* attraverso il quale si conquista (in questo caso in modo pressoché letterale) la sua traduzione in linguaggio algebrico:

$$\underbrace{\text{Il numero in alto}}_{n}\ \underbrace{\text{è}}_{=}\ \underbrace{\text{la somma fra i due numeri laterali e il doppio del numero centrale}}_{a+2b+c}$$

La produzione e il confronto tra le parafrasi esalta il ruolo degli alunni come *produttori di pensiero matematico 'originale'.* La 'legge' espressa attraverso il linguaggio naturale e tradotta in un linguaggio formalizzato costituisce un momento di *coagulo* nell'evoluzione del balbettio algebrico. Tradizionalmente invece è l'insegnante a fare da tramite fra i momenti chiave del pensiero matematico istituzionale e la loro applicazione, e gli alunni sono semplici *riproduttori* di una teoria alla cui organizzazione sono fondamentalmente estranei.

3.2 Ep. A2 (Prima sec. di 1° grado)

Questo episodio si collega al precedente. Si esplora una serie di disegni ('piramidi') allo scopo di individuare delle leggi che pongano in relazione certe caratteristiche di ogni figura con il relativo numero di posto. Gli alunni hanno deciso di cercare una legge per trovare il numero di triangoli neri della fila di base in una figura qualsiasi.



Ylenia: "Sulla linea dove si appoggiano le piramidi… per esempio nella quarta piramide, i triangoli neri sono quattro e i bianchi tre… la mia di sei piani ha sulla base sei triangoli neri e cinque bianchi… I bianchi sono sempre uno meno dei neri… Forse una piramide con un qualsiasi numero di piani ha i triangoli neri sulla base che sono uguali al numero dei piani e i bianchi sono tanti quanti i neri meno uno". [INS-COM]

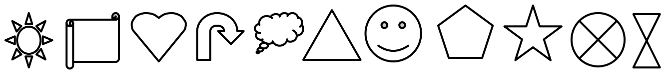
INS_{COM}: Ylenia non era giunta a questa considerazione prima del suo intervento ma, *mentre verbalizzava, deduceva ed esprimeva la regola generale*. La sua frase ha poi permesso alla classe di pervenire alla traduzione in linguaggio matematico.

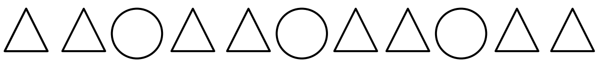
L'esempio evidenzia la relazione potente fra capacità di argomentare e parafrasare, e quella di generalizzare. Ribadiamo che la condizione necessaria affinché tale relazione si espliciti è che essa possieda per insegnante e alunni un valore riconosciuto e condiviso. Questo significa per l'alunno *assumersi la responsabilità del proprio apprendimento*. La ricchezza maggiore che emerge dall'argomentazione è che colui che la costruisce *non conosce davvero le sue idee fintantoché non le esprime*.

4. Secondo aspetto. Nel rispettare un contratto didattico basato sul decentramento l'insegnante propone domande-guida che, anziché orientare gli alunni, provocano la dispersione di osservazioni e conquiste fatte; spesso domande così formulate mettono a disagio lo stesso insegnante che non sa come comportarsi di fronte all'eterogeneità delle risposte

4.1 Ep. B1 (Prima prim.)

L'insegnante affronta per la prima volta il tema della ricerca di regolarità (ha attinenza con l'episodio A2). Propone il confronto fra due file di disegni; nelle sue intenzioni il primo dovrebbe suggerire una mancanza di regolarità e quindi una casualità nella continuazione, il secondo invece dovrebbe suggerire l'idea di qualcosa che si ripete con regolarità all'infinito secondo il modulo triangolo-triangolo-tondo.

CASO 1  …

CASO 2  …

Ins: Che cosa ne pensate? [RIC-COM]
Marco: Nel primo caso ci sono tutte figure diverse, nel secondo solo triangoli o cerchi.
Filippo: Questo può essere un modo diverso di fare il problema.
Simone: Nel primo caso certe figure non sono chiuse, nel secondo sono chiuse.
Jamila: Nel primo caso certe figure si possono prolungare, nel secondo no…

RIC_{COM}: Di fronte a situazioni troppo aperte o poco espressive per gli allievi, domande generiche come "Cosa ne pensate?" - diffuse e spontanee (in taluni casi forse opportune) - destano perplessità dal punto di vista dell'efficacia perché lasciano spazio alle risposte più disparate. È vero che il contratto didattico prevede il decentramento nella costruzione delle conoscenze, ma l'insegnante è comunque la figura tutor e dovrebbe prevedere, e cercare di evitare, le eventuali difficoltà didattiche che potrebbe incontrare nel guidare le riflessioni degli alunni verso il suo obiettivo. Sarebbero più produttive domande centrate sulla situazione, *che favoriscano l'intuizione di qualcosa che si ripete con una certa regolarità*, per esempio: "Osservate le figure che formano i due disegni e ditemi cosa notate", oppure "In un caso sono stata più ordinata; in quale dei due?"

In termini generali, altri interventi poco produttivi sono:

- Domande a risposta corale Sì-No
  Es: Avete capito?, Va bene?, OK?, Ci siamo?
- Domande apparentemente dubitative di fatto asseverative
  Es: Questi calcoli sono davvero necessari?, È proprio questo quello che in realtà ci serve?
- Domande 'a botta e risposta'
  Es: Luca: 14 meno 6 è uguale a 7 / Ins: Siamo sicuri che 14 meno 6 è uguale a 7? / Tutti: No! / Ins: E a quanto è uguale? / Giulia: 8 / Ins: Possiamo verificare se è vero? / Tutti: Sì! / Ins: E come possiamo fare? / Marco: Contare [continua].

Altri inviti, come quelli di 'rilancio' all'alunno, sono invece da potenziare in quanto stimolano comportamenti metacognitivi:

- Richieste interlocutorie
  Es: Prova a dirlo in un'altra maniera, Fammi capire meglio, Cerca di essere più chiaro.
- Invito a socializzare una spiegazione
  Es: Vedo che hai capito. Potresti spiegare ai compagni che non hanno le idee chiare come le tue?
- Invito a riformulare la propria argomentazione
  Es: Scusa, non ho capito bene. Puoi spiegarti con altre parole?
- Invito a riformulare l'argomentazione di un compagno
  Es: Andrea, hai capito cosa vuole dire Jessica? Prova a ripeterlo
- Invito alla collaborazione

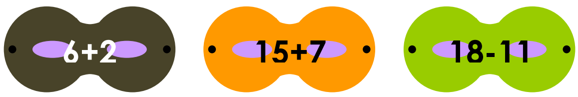
Ins: Proviamo a scrivere questa regola alla lavagna: come abbiamo trovato la posizione dell'ovale e poi quella del triangolo nella successione?
Rita: Si può scrivere la tabellina del 2 per i numeri pari che sono gli ovali e poi aggiungi al numero pari 1, e hai i dispari che sono i triangoli.
Ins: Buona idea! Mi aiuti a scriverla?

- Incoraggiare l'esplicitazione di intuizioni opponendosi a 'tentativi di fuga':
  Ho capito ma non so come dirlo, Lo so ma non so spiegarlo, Cosa devo dire?
- Appoggiarsi alla comunicazione non verbale
  Di fronte alle prime parole di un alunno l'insegnante può rimanere in un 'silenzio invitante' e compiere con le mani gesti eloquenti per significare *Vai avanti! Continua!*

5. Terzo aspetto. l'insegnante spesso avvia delle frasi e chiede agli allievi di completarle, costringendoli ad entrare in sintassi e in testualità *imposte*, limitando così lo sviluppo delle loro competenze linguistiche

5.1 Ep. C1 (Prima prim.)

La classe sta esplorando il 'gioco delle mascherine', elaborato nel progetto ArAl per portare a riconoscere rappresentazioni diverse di uno stesso numero (canoniche e non canoniche) e ad esprimere la loro uguaglianza.



Ins: Non continuiamo a dire addizione e risultato. Miriam, nella mascherina il 10 che cos'è? Un…
Miriam: … numero?
Ins: Un numero… non c'è scritto da nessuna parte che questo sia un risultato. È un numero. Va bene? E 6 più 4 che cos'è, la… ?
Miriam: … forma non canonica di 10…
Ins: … e quindi è sempre un …
Classe: … numero!
Ins: Però questa volta il numero si è voluto…
Nicola: … mascherare… perché non voleva farsi riconoscere.
Ins: Quindi abbiamo detto che 10…
Gruppo: … è un numero!
Ins: … e 6 più 4 è la… ?
Nicola e Miriam: … forma non canonica del numero 10! [RIC-COM]

RIC1$_{COM}$: In numerose occasioni l'insegnante svolge un ruolo troppo importante nella discussione, proponendo frasi aperte che gli alunni chiudono con una parolina o poco più. Bisognerebbe che gli alunni organizzassero le argomentazioni in forme articolate, assumendosi la responsabilità di definire i concetti attorno ai quali stanno lavorando.

RIC2$_{COM}$: Aggiungo qualche ragione linguistica a rinforzo. È dimostrata la connessione tra lessico e sintassi: non si può usare una voce lessicale a prescindere da una sua collocazione morfologica e sintattica. Le scelte lessicali sono legate alla scelta sintattica che si fa mentre si produce lingua. Chiedere all'allievo di completare con una voce lessicale segmenti linguistici prodotti dall'insegnante, quindi di 'entrare' nella sua sintassi e nella sua testualità, quasi per 'indovinare' la parola, non è produttivo per lo sviluppo della competenza linguistica e delle conoscenze, perché l'allievo non produce lingua e quindi non struttura i concetti.

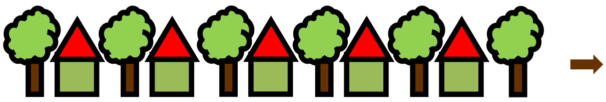
Questi interventi dell'insegnante li classifichiamo come 'a completamento' o 'a risposta obbligata'. Essi contengono in sé il suggerimento 'telefonato' di ciò su cui gli alunni si devono concentrare. Siccome la formulazione la organizza l'insegnante, questo comporta la certezza che *è proprio lì che bisogna andare a parare*. Se un alunno avesse in mente una risposta diversa probabilmente la considererebbe sbagliata.

Domande di questo tipo sono riferite a ‘microuniversi chiusi’: gli alunni hanno dato proprio *quelle* risposte (banalmente corrette) perché le domande costituivano l’ennesima riformulazione di quesiti ‘a risposta obbligata’. Esse creano dipendenza dall’insegnante e non aprono all’argomentazione in quanto lasciano spazio solo a frammentari prodotti del pensiero. Domande come: In conclusione si può dire che queste lettere sono la traduzione di… ?, Il calcolo si può fare anche con… ?, Quindi questo è un procedimento più… ? comportano per l’alunno l’idea che *chi le formula sappia perfettamente quale sia l’unica continuazione possibile*. L’attenzione si allontana dagli aspetti concettuali e si concentra sulla preoccupazione di *capire cosa voglia l’insegnante*. La questione dovrebbe essere formulata in modo da lasciare agli alunni la responsabilità di organizzare l’argomentazione (che potrebbe anche rivelarsi sbagliata); per esempio: “Riprendi il filo di quello che stai dicendo e prova ad arrivare ad una conclusione” o “Spiega con altre parole quello che vuoi dire”.

Il ricercatore francese Guy Brousseau ha coniato un costrutto teorico che ha chiamato *effetto Topaze* [7]. Un precettore sta facendo un dettato di francese a casa dell’allievo. Il tema è: capire dal contesto se una certa parola è detta al singolare o al plurale (nel francese parlato non si pronuncia la –s del plurale) in modo da arrivare alla scrittura corretta di quel termine. La parola in questione è ‘moutons’ (montoni). L’allievo non sa che pesci pigliare e il precettore gli gira attorno sussurrando ‘moutons’ poi, non vedendo risultati, insiste con ‘moutonss’… ‘MOUTONSSS’. Finalmente l’alunno scrive la –s alla fine della parola. Brousseau vuol dire: l’insegnante non mostra attenzione verso l’apprendimento dell’allievo ma vuole fare in modo che si raggiunga *comunque* l’obiettivo prefissato, *indipendentemente dalle modalità in cui ciò avviene e dalla qualità della comprensione da parte dell’alunno*. (per studi analoghi v. Berruto, Finelli, Miletto, 1983).

6. Quarto aspetto. La scelta dell’insegnante di limitarsi al Perché? senza spingersi a chiedere “Come hai fatto a capire?” blocca la verbalizzazione metacognitiva.

La classe sta lavorando con le successioni figurali (v. 3.2, 4.1). Il problema è:



Che elemento c’è al 93° posto?

6.1 Ep. D1 (Prima sec. di 1° grado)

Lucia:	Il 93° disegno è un albero.
Ins:	Come hai capito che è un albero?
Lucia:	Ho visto che l’albero si trova nei posti dispari e siccome il 93 è dispari allora ci dev’essere un albero.

6.2 Ep. D2 (Quinta prim.)

Marco: Al 93° posto c’è un albero.
Ins: Perché il 93° disegno è un albero?
Marco: Perché il 93 è dispari.

Le domande dei due insegnanti sono solo apparentemente simili. La domanda contenente il Perché conduce ad una risposta che enuncia un prodotto: “Ti dico dove mi ha portato il mio ragionamento”. La domanda “Come hai fatto a capire” intende condurre ad una risposta che è l’illustrazione di un processo: “Adesso ti spiego il mio ragionamento”. Nel primo caso il processo rimane opaco, nel secondo è trasparente, e permette di capire come Lucia sia giunta a quella conclusione.

[7] Il nome è tratto dal titolo della commedia ‘Topaze’ di Marcel Pagnol, andata in scena per la prima volta nel 1928.

Conclusioni

Gli episodi pongono in evidenza l'efficacia formativa, per il docente di matematica, di una riflessione mirata da un lato alle relazioni fra il linguaggio naturale e i linguaggi della matematica, in modo da favorire la consapevolezza della pluralità dei registri e dei sistemi di rappresentazione su cui si fonda lo sviluppo del discorso matematico (Aspetto 1); dall'altro, ai modi in cui egli interagisce linguisticamente con gli alunni (Aspetti 2-3-4). È quindi importante che il docente acquisisca la capacità di realizzare percorsi didattici che guidino gradualmente gli allievi, sin dai primi anni della scuola primaria, verso l'uso attento del linguaggio naturale, della sua semantica e della sua sintassi, per apprendere il nuovo linguaggio algebrico, dotato anch'esso di una semantica e una sintassi. Avrebbe una rilevante valenza formativa la partecipazione a comunità, costituite da ricercatori e docenti che prendono parte ad attività di indagine linguistico-cognitiva come strumento per sviluppare meta-conoscenza, secondo prospettive *significative* di trasversalità.

Sul piano della formazione universitaria di base dei futuri docenti, lo studio degli aspetti linguistici delle discipline scientifiche necessita di istituzioni e specialisti che siano in grado di mediarli con gli insegnanti sia negli aspetti teorici che in quelli della prassi. Un aspetto delicato in questo ambito è rappresentato dal fatto che *gli specialisti-formatori dovrebbero procedere a cavallo fra due epistemologie*; sarebbe opportuno in questo senso, per favorire la conoscenza reciproca, ipotizzare l'avvio di percorsi, con la partecipazione di docenti e ricercatori delle discipline linguistiche e discipline matematiche, facenti riferimento, analogamente a quanto avviene nel progetto MTPAL, a lenti teoriche e a metodologie condivise continuamente aggiornabili in relazione a ciò che avviene durante l'evoluzione dei percorsi.

Bibliografia

AA.VV, *Collana Progetto ArAl*, Pitagora Editrice, Bologna.

Altieri Biagi M. Luisa, Speranza F. (1981), *Oggetto, parola, numero: itinerario didattico per gli insegnanti del primo ciclo*, Nicola Milano.

Berruto G., Finelli T, Miletto A.M. (1983), *Aspetti dell'interazione verbale in classe: due casi italiani*, in Orletti F. (a cura di) "Comunicare nella vita quotidiana", Il Mulino, pp.175-204.

Cusi A.L., Malara N.A., Navarra G. (2011), "Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics", in Cai J., Knuth E. (Eds). *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives, in: Advances in Mathematics Education.* Springer. 483-510 (ISBN 978-3-642-17734-7).

De Mauro T. (1988), "Linguaggi scientifici e lingue storiche", in A.R. Guerriero (a cura di), *L'educazione linguistica e i linguaggi delle scienze*, La Nuova Italia, Firenze, pp. 9-19.

Deon V., Navarra G. (2013), "Come parlano gli insegnanti?", *Atti del Convegno Nazionale GISCEL 2012*, Reggio Emilia, pp. 243-255.

Graffi G., Scalise S. (2002), *Le lingue e il linguaggio*, Il Mulino, Bologna.

Malara N.A., Navarra G. (2002), "Brioshi e altri strumenti di mediazione per un insegnamento relazionale dell'aritmetica nell'ottica di un avvio all'algebra come linguaggio", in Malara N.A. & Al. (Eds.), *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice Bologna, pp. 211-222.

Navarra G. (2008), "La metodologia dei diari pluricommentati nel progetto ArAl e la formazione degli insegnanti", in D'Amore B. (Ed.), *Atti Incontri con la matematica n.22: La didattica della matematica in aula*. Castel S. Pietro, Pitagora Editrice Bologna, pp. 136-139.

Navarra G. (2009), "Early algebra: un approccio relazionale all'aritmetica per promuovere una concezione linguistica dell'algebra", In Baratter P. e Dallabrida S. (a cura di), *Lingua e grammatica*, Quaderni GISCEL, Franco Angeli, Milano, pp. 133-153.

Vygotsky Lev (1954), *Pensiero e linguaggio*, Giunti-Barbera, Firenze.

Sitografia

www.progettoaral.wordpress.com
www.aralweb.unimore.it
Gruppo Progetto ArAl in Facebook