UN LABORATORIO
SULLA STORIA DELLA MATEMATICA

MOLTIPLICAZIONE «A GELOSIA», BASTONCINI DI NEPERO, REGOLI DI GENAILLE

Un'interessante ed originale attività di laboratorio sulla storia della matematica che, oltre ad evidenziare l'evoluzione degli strumenti di calcolo, legata alla progressiva diffusione dei viaggi e degli scambi commerciali, consente agli alunni di riflettere su alcune conoscenze già acquisite, quali l'algoritmo della moltiplicazione e la notazione posizionale.

Giancarlo Navarra

L'attività che illustreremo fa parte di un programma di ricerca sull'insegnamento della matematica in chiave storica[1]. È stata sviluppata, con criteri diversi, in due contesti: in una classe prima a tempo prolungato della Scuola media di S. Giustina (Belluno) — nella quale ha costituito un approfondimento specifico nell'ambito matematico all'interno di un percorso triennale interdisciplinare scienze/storia — e in una quinta della Scuola elementare di Bribano (Belluno), nella quale è stata condotta in compresenza con l'insegnante dell'area logico-matematica Cosetta Vedana.

Le due classi presentavano, rispettivamente, un profilo medio basso la quinta (15 alunni, uno solo di livello alto), e uno medio alto la prima (20 alunni, il 30% di livello alto, un portatore di handicap mentale non grave).

Il lavoro si è articolato in due fasi: la prima (sulla moltiplicazione «a gelosia» e i Bastoncini di Nepero) è stata svolta, con modalità differenti, in entrambe le classi, ed è durata circa 8 ore; la seconda (sui Regoli di Genaille) è continuata nella sola prima e ha richiesto altre sei ore di tempo.

La storia nell'insegnamento della matematica

La scelta di introdurre la storia nell'insegnamento della matematica sin dalla scuola dell'istruzione obbligatoria si fonda sul presupposto che essa possa favorire:

- da un lato, la formazione di una concezione *evolutiva* della matematica e quindi il superamento di quella tradizionale che la vede prevalentemente come un insieme consolidato — generalmente astruso e spesso noioso — di regole, procedure, linguaggi, problemi, di fronte ai quali l'unico ruolo possibile per gli allievi è quello di fruitori passivi attraverso l'immodificabile mediazione dell'insegnante;
- dall'altro, un ampliamento della comprensione della storia come *frutto di interrelazioni di natura scientifica fra civiltà diverse.*

In questo quadro si possono individuare alcuni obiettivi particolarmente significativi, dal più generale:

- far cogliere, anche se in forma embrionale, *il rapporto fra le condizioni storiche contingenti e lo sviluppo delle scienze* (nel nostro caso, il progressivo dilatarsi a scala intercontinentale dei viaggi e degli scambi commerciali che, a partire dal medioevo, porta con sé la necessità di facilitare e di velocizzare l'esecuzione dei calcoli conducendo alla ricerca di *automatismi*),

ad altri più specifici:

- indurre negli alunni una visione delle proprie conoscenze come di un insieme dinamico, modificabile non soltanto *per sovrapposizioni successive imposte dall'esterno,* ma anche attraverso *rielaborazioni autonome*;
- insegnare ad interpretare rappresentazioni e simbologie in uso in diversi periodi storici e a ritrovare le loro «parentele» con l'universo matematico moderno — nei metodi per svolgere le operazioni, nell'applicazione implicita di proprietà, ecc. — favorendo la riflessione, in particolare, sull'algoritmo della moltiplicazione;
- far comprendere come conoscenze apparentemente soltanto strumentali (come le procedure per eseguire un'operazione) o ormai «confinate» in lontane acquisizioni nei primi anni della scuola elementare (come la notazione posizionale) possano diventare a loro volta efficaci mezzi per indagare su oggetti matematici.

Temi e struttura dell'articolo

L'attività del laboratorio esplora, in un arco di tempo di circa quattro secoli, tre strumenti di calcolo strettamente imparentati fra loro:

1) la moltiplicazione comunemente chiamata «a gelosia» o «araba» (XVI secolo);
2) i «Bastoncini di Nepero» (1617);
3) i «Regoli di Genaille» (fine del XIX secolo).

I primi due sono stati analizzati in entrambe le classi mentre il terzo, più complesso, è stato studiato solamente nella prima media. Questa differenza (che verrà chiarita più avanti in modo dettagliato) ha condotto alla scelta di due differenti strategie. Mentre lo studio della moltiplicazione «a gelosia» e dei Bastoncini di Nepero consente sin dall'inizio un pieno coinvolgimento degli alunni, stimolati ad utilizzare e rielaborare conoscenze che già possiedono, la comprensione dei Regoli di Genaille è condizionata dall'elaborazione da parte dell'insegnante di accorgimenti *ad hoc.* Nel primo caso, di conseguenza, la partecipazione degli alunni è più libera, nel secondo è più dipendente, almeno nelle fasi iniziali, dagli input forniti dall'insegnante. La varietà degli approcci, comunque, non interferisce con la valenza educativa complessiva dell'esperienza.

L'articolo si struttura in due parti: nella prima esamineremo l'attività comune alle due classi, nella seconda quella svolta nella sola prima media. Di volta in volta commenteremo i momenti più significativi: gli accorgimenti didattici elaborati dagli insegnanti per sviluppare gli argomenti; le reazioni, le osservazioni degli alunni e le ipotesi operative che essi hanno formulato durante le discussioni collettive; le verbalizzazioni relative all'individuazione delle operazioni analizzate (moltiplicazioni e addizioni), delle proprietà usate e degli algoritmi applicati nei vari casi.

Il confronto tra i comportamenti delle due classi consente un'interessante lettura di come e quanto si modifichino, in meno di un anno di scuola, alcuni tratti importanti della personalità dei ragazzi (competenze in campo matematico, capacità di concentrazione e di organizzazione, maggiore o minore cautela nel formulare delle ipotesi, ecc.).

[1] Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto CNR n. 96.00191.CT01. È stato presentato al primo Convegno Internuclei Scuola dell'obbligo, Salsomaggiore Terme, 1994 e al GIRP 23 (Groupe international de recherche en pédagogie de la mathématique), Bressanone 1994.

ɔarte: l'attività svolta entrambe le classi

a **moltiplicazione «a gelosia».** *A) Gli ɔprocci.* L'argomento viene affrontato ·lle due classi secondo due differenti odalità. Nella prima media illustriamo sieme all'insegnante di lettere il conte- ɔ socioculturale in cui lo strumento si sviluppato (la contrapposizione fra ıbacisti» e «algoristi», le necessità di igliorare le procedure di calcolo in nzione della crescita dei traffici dei ercanti, le scuole d'abaco, il progressi- ɔ aumento di una *cultura diffusa*). Nel- quinta invece scegliamo un inizio più ntasioso, e introduciamo l'argomento ggendo assieme agli alunni un breve cconto, avente per protagonista un ar- ıeologo che trova nella biblioteca di un ıstello un antico libro di matematica ɔntenente, fra l'altro, un'enigmatica fi- ıra (*fig.* 1) che si chiede agli alunni di terpretare vestendo i panni dello stu- oso.

Il disegno misterioso

Il celebre archeologo stava trascorrendo una tranquilla vacanza nel vecchio castello di un suo carissimo amico e passava gran parte del tempo ammirando le sale, i quadri, le armature, i preziosi arazzi alle pareti, gli incantevoli giardini.

Amava soprattutto soffermarsi nell'imponente biblioteca, ricca di centinaia di volumi.

Un pomeriggio decise di salire sulla lunga scala sino agli scaffali più alti e dopo qualche minuto la sua attenzione venne attratta da un grosso libro rivestito di pelle color rosso scuro. La scritta dorata sul dorso diceva che si trattava di un antico Libro Di Matematica.

Lo estrasse delicatamente, scese, lo appoggiò sul leggìo e cominciò a sfogliarlo con grandissima cautela. Fu dopo circa mezz'ora di appassionata lettura che trovò una pagina molto sgualcita, in parte rotta e bruciacchiata, e anche sbiadita, come se, chissà quando, qualcuno avesse cercato di impedire che il fuoco — forse una candela lasciata maldestramente accesa — la distruggesse, e l'avesse strofinata con uno straccio umido.

Insomma, l'unica cosa ancora chiaramente visibile era uno strano disegno, mentre le scritte attorno ad esso erano del tutto illeggibili.

L'archeologo inforcò sul naso gli occhialetti per leggere da vicino, accostò ancora di più la lampada al leggìo e cominciò ad esaminare il disegno con grande attenzione...

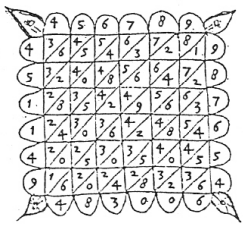


Fig. 1

I dubbi sorti in sede di programmazione sull'eccessiva complessità della figura per una quinta elementare vengono dissipati dalla constatazione che proprio tale complessità stimola negli alunni la curiosità e di conseguenza la varietà delle ipotesi e la relativa discussione.

B) Analisi di due diari di bordo. Su un piano generale, confrontando i comportamenti delle due classi, osserviamo che la quinta affronta l'interpretazione del disegno con maggiore entusiasmo e con un atteggiamento di più evidente *disinvoltura esplorativa,* effettuando un'indagine a tutto campo, più creativa, anche se per questo più dispersiva.

La maggiore competenza degli alunni di prima media e il desiderio di ben figurare fanno inizialmente da deterrente e conducono al contrario ad una maggiore *cautela esplorativa* (conquista di razionalità, perdita di fantasia... si può vedere in questo una «responsabilità» della scuola?).

L'anno di differenza si nota soprattutto in alcune maggiori competenze matematiche (nel calcolo posizionale e nelle operazioni) e in un migliore controllo delle competenze linguistiche. Si evidenzia anche una certa diversità, ma non così rilevante come si potrebbe pensare, sul piano del mantenimento dell'attenzione per periodi piuttosto lunghi (un'ora e mezza circa).

Come prassi costante curiamo molto in entrambe le classi la proprietà del linguaggio e la coerenza dell'argomentazione; gli alunni della prima redigono anche delle verbalizzazioni scritte. Nella quinta, la presenza contemporanea dell'insegnante e del ricercatore consente di prendere degli appunti, che ora sintetizzeremo.

Specialmente nelle battute iniziali dell'esplorazione, quando c'è ancora tutto da scoprire, si potrà notare che ci sono osservazioni scorrette, bizzarre, talvolta strampalate; esse sono comunque produttive, però, nel bilancio globale della discussione collettiva, perché permettono di individuare, poco alla volta, e quindi di accantonare, i «rami secchi» dell'interpretazione a favore di quelli «sani» (evidenziati in grassetto):

Alcuni stralci significativi del verbale della discussione nella classe quinta durante l'analisi del disegno misterioso

Paola: «Nei triangolini in alto ci sono *delle frazioni:* 3/6, 4/5, 5/4, ecc.».

Lucio: «Nella prima riga in alto del quadrato e nella prima colonna a destra ci sono *somme costanti uguali al 9* scritto nella "cupolina" esterna» [l'alunno viene a mostrare sul disegno 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = ... = 9 e poi 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = ... = 9].

Debora: «Nella quinta riga nei triangolini in alto ci sono *coppie di numeri uguali:* 2 - 2, 3 - 3, 4 - 4 e in quelli in basso ci sono 5 e 0».

Eros: «Nella seconda colonna da destra, dall'alto, nei triangolini in basso, mi pare che ci sia *la tabellina del 2*». [Anche lui viene a mostrare, e indica 1, 2, 3, fino a 6].

Melissa: «Sembra una ***tabella della moltiplicazione***».

.....

Fabrizio: «I numeri nei triangolini si possono leggere assieme: nella prima riga 36, 45, 54, 63, ecc.: è la ***tabellina del 9***; sotto: 32, 40, 48, ecc.: è la ***tabellina dell'8***».

.....

Daniela: «La diagonale nelle caselle ***separa le unità dalle decine***».

.....

Fabrizio: «Se è una tabella della moltiplicazione, ***mi chiedo a cosa servano i numeri nelle cupoline***».

.....

[L'insegnante chiede di confrontare mentalmente le tabelline "normali" con il disegno].

Michele: «Quell'altra [la tabellina "normale"] ***serve a trovare i risultati di tutte le moltiplicazioni***».

[L'insegnante suggerisce di provare a leggere i numeri nelle cupole non separatamente l'uno dall'altro].

Vari [le voci si accavallano] ***leggono 456 789*** e ***987 654,*** e intuiscono che potrebbero essere i fattori di una moltiplicazione. Qualcuno lancia l'ipotesi che ***le cifre nelle cupole della colonna di sinistra e della riga in basso si leggano a partire dall'alto in questo modo: 451 149 483 006 e che questo sia il prodotto fra i due numeri precedenti.***

Più o meno a questo punto, in entrambe le classi, rifacciamo il disegno iniziale, senza gli orpelli, allo scopo di renderlo più chiaro (*fig.* 2*a*).

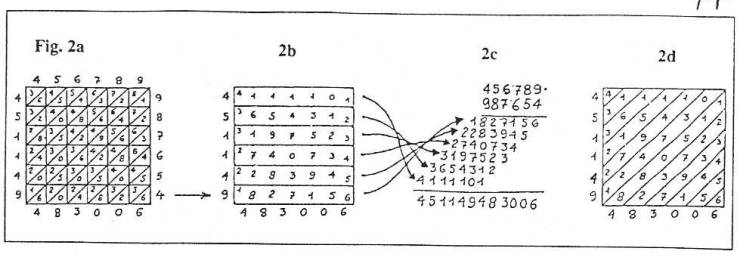
C) Il confronto tra i due algoritmi. Chiediamo ora di eseguire la moltiplicazione 456 789 × 987 654 nel modo consueto (l'operazione impressiona e diverte, soprattutto in quinta, per la grandezza inconsueta dei fattori, ma solo due alunni hanno bisogno di interventi sostanziali da parte degli insegnanti per completarla correttamente). Poniamo poi sulla lavagna luminosa le due rappresentazioni (*fig.* 2*a* e *fig.* 2*c*) e chiediamo di confrontarle.

Risulta innanzitutto chiaro che la figura della moltiplicazione «a gelosia» è una tabella a doppia entrata, e che ogni casella contiene il prodotto delle cifre corrispondenti che compaiono all'esterno della riga in alto e della colonna di destra.

Poi qualcuno, intuendo delle analogie, propone di eseguire le somme, a partire da destra, delle due cifre «in diagonale» che si leggono in ciascuno dei cinque parallelogrammi in ogni riga della figura. Un alunno esegue ad alta voce i calcoli della riga in basso (*fig.* 2*a*), cominciando da destra: «3 più 2 fa 5, 3 più 8 fa 11 con riporto di 1, 2 più 4 fa 6 più il riporto fa 7, 2 più 0 fa 2, 2 più 6 fa 8». Man mano che procede scrive i risultati sotto la figura (ricopiando i due numeri agli estremi della riga, 1 e 6) e osserva che il numero ottenuto - 1827156 - è uguale al primo prodotto in alto della moltiplicazione «moderna» (*fig.* 2*c*). Gli stessi calcoli eseguiti nelle altre cinque

righe della moltiplicazione «a gelosia» confermano l'osservazione: *le somme* (che trascriviamo nella *fig. 2b*) *sono identiche ai prodotti della moltiplicazione «moderna» ma sono disposte in ordine inverso* (il primo numero in basso della moltiplicazione «a gelosia» corrisponde al primo in alto della «moderna» e così via). Alcuni notano che *le colonne della moltiplicazione «moderna»* (*fig. 2c*) *corrispondono alle linee oblique della «gelosia»* (*fig. 2d*) (*v. riquadro in alto*).

Per consolidare tutte le scoperte *locali* fatte sino a questo momento in una visione *generale*, ricostruiamo i due algoritmi e li trascriviamo in modo da poterli confrontare (i termini fra virgolette sono quelli usati dagli alunni). Predisponiamo inoltre, per la moltiplicazione «a gelosia», un disegno come quello della *fig. 2a*, riscrivendo però soltanto i due numeri esterni (i fattori) e lasciando vuote le caselle interne che riempiremo man mano, effettuando i relativi calcoli.



Moltiplicazione «a gelosia»

1) Eseguo 36 moltiplicazioni (anche con un ordine casuale) fra le sei cifre dei due fattori e scrivo i prodotti nelle rispettive caselle;
2) eseguo 12 addizioni «in diagonale» con gli eventuali riporti;
3) scrivo ogni somma in corrispondenza della «fine della rispettiva diagonale»;
4) leggo il prodotto a partire dall'alto a sinistra percorrendo una «L».

Moltiplicazione «moderna»

1) Eseguo la moltiplicazione di ogni cifra del moltiplicando per la cifra delle unità del moltiplicatore e scrivo i prodotti con gli eventuali riporti nella prima riga;
2) ripeto l'operazione sei volte scrivendo ogni prodotto sotto il precedente spostato di una cifra verso sinistra;
3) eseguo 12 addizioni «in verticale» con i relativi eventuali riporti;
4) leggo il prodotto a partire da sinistra.

In entrambe le classi, ma in particolare nella quinta, questa fase costituisce una verifica della conoscenza del valore di posizione, in quanto la moltiplicazione «a gelosia» evidenzia molto bene gli allineamenti fra unità, decine, ecc. e aiuta a riflettere sulla ragione per la quale ogni prodotto parziale nell'operazione «moderna» risulta spostato verso sinistra rispetto a quello soprastante. Per fissare questo risultato, trascriviamo assieme agli alunni il quadrato della moltiplicazione «a gelosia» evidenziando unità, decine, centinaia, ecc. (*fig. 3*).

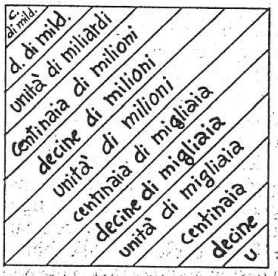


Fig. 3

Il confronto fra gli algoritmi consente di cogliere in filigrana un aspetto molto significativo anche dell'evoluzione storica di questo metodo: mentre nella moltiplicazione «a gelosia» i trentasei prodotti sono *scritti*, e quindi facilmente controllabili, nella «moderna» essi non compaiono. Possiamo dedurre che i calcoli «nascosti», proprio perché sono più difficilmente *ricostruibili*, presuppongono la conquista di una progressiva sicurezza nella capacità di effettuare il *calcolo mentale*, di conseguenza una minore necessità di «trasparenza» dei controlli, e quindi un risparmio di tempo.

Svolgiamo, infine, vari esercizi di difficoltà crescente (*fig. 4*), per esempio: conoscendo i prodotti nelle caselle, individuare i fattori (uno solo o entrambi), oppure: conoscendo alcuni prodotti individuare quelli mancanti e anche i fattori, e così via. Sono esercizi molto stimolanti per gli alunni di entrambe le classi perché rappresentano una sfida praticamente alla portata di tutti, e quindi gratificante anche per i meno dotati, e portano a riconoscere aspetti relazionali fra i numeri di una tavola pitagorica generalmente non esplorati (il risalire dai prodotti ai fattori).

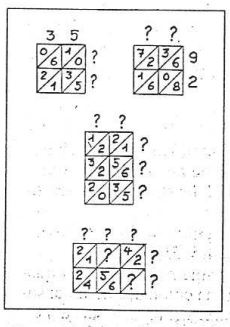


Fig. 4

Al termine di questa fase si ritiene opportuno dare agli alunni della quinta — tramite una scheda — delle informazioni che consentono di incorniciare storicamente l'indagine sin qui svolta dalla classe. Ci serviamo anche di alcune immagini per illustrare la ragione della denominazione «a gelosia»: alle finestre delle case delle città arabe venivano poste delle grate di legno per consentire alle mogli (di mariti, per l'appunto, *gelosi*) di curiosare quello che succedeva in strada senza essere viste (*fig. 5*).

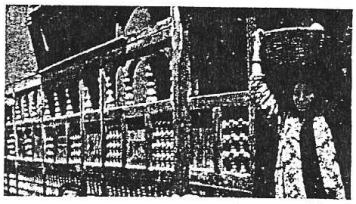
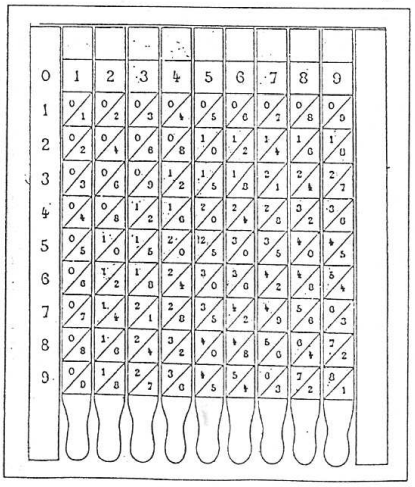


Fig. 5

Dalla moltiplicazione «a gelosia» ai bastoncini di Nepero. *A) L'introduzione dell'argomento.* John Napier, il matematico scozzese ideatore delle tavole logaritmiche, pubblica nel 1617 un volumetto, intitolato *Rabdologia* (dal greco *rabdòs* — ramoscello, verga, bastone — si pensi anche a *rabdomante*) in cui presenta il suo metodo e i relativi strumenti — i «Bastoncini» (*fig. 6*) — ideati per accelerare e semplificare la tecnica della moltiplicazione «a gelosia», da cui deriva. Dal punto di vista didattico lo sviluppo di questa fase del lavoro non crea eccessive difficoltà né in quinta né in prima. Nella quinta introduciamo l'argomento con una scheda contenente, assieme alle informazioni storiche che illustrano in modo semplice il contesto in cui Napier ha elaborato il metodo, il disegno dei Bastoncini che verranno successivamente incollati su un cartoncino e ritagliati in modo da poter essere manipolati per effettuare i calcoli.

Fig. 6



B) Lo studio dei bastoncini. Cominciamo con l'esaminare il disegno dei Bastoncini. Riportiamo anche in questo caso le osservazioni più interessanti fatte dagli alunni della quinta durante la discussione:

Alcuni stralci significativi del verbale della discussione nella classe quinta durante l'analisi dei regoli di Nepero

Vari discutono sui numeri esterni (in alto e a sinistra) e giungono a concludere che *essi non sono più, come nella moltiplicazione «a gelosia», le cifre di un moltiplicando e di un moltiplicatore particolari.*
Vari si accorgono che *manca anche il numero che nelle cupole «a L» della tavola della moltiplicazione «a gelosia» costituiva il prodotto;*
Vari notano che *ci sono soltanto i prodotti locali nelle caselle.*
Vari rilevano la *somiglianza con la Tavola Pitagorica.*
Vari intuiscono che, mentre lo schema della moltiplicazione «a gelosia» serve per risolvere una moltiplicazione alla volta, ***i Bastoncini hanno probabilmente una validità più generale.***

Una volta completata e perfezionata assieme agli alunni una prima decodifica del significato dei Bastoncini, passiamo alla comprensione del loro funzionamento (un esempio nella *fig.* 7: il prodotto 684 × 752).

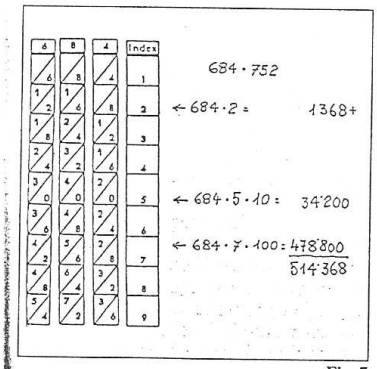
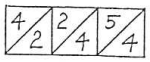


Fig. 7

Il vantaggio rispetto alla moltiplicazione «a gelosia» diventa evidente: non è più necessario effettuare le moltiplicazioni parziali in quanto sono prestampate sui Bastoncini. È sufficiente accostare tra loro i Bastoncini che riportano in alto le cifre del moltiplicando, porre alla loro destra quello, diverso dagli altri, del moltiplicatore (che in alcune versioni viene chiamato *index*) e poi eseguire i calcoli. Analogamente a quanto abbiamo fatto con la moltiplicazione «a gelosia», proponiamo anche in questo caso degli esercizi. Nella prima media viene richiesto agli alunni di argomentare per iscritto il modo in cui pervengono all'individuazione dei numeri mancanti (la verbalizzazione — scritta e orale — è una prassi generale quando esploriamo delle situazioni o risolviamo dei problemi). Ecco, a titolo di esempio, la trascrizione di uno dei protocolli concernente l'individuazione dei fattori conoscendo i prodotti (*fig.* 8).

(Alessia) I REGOLI DI NEPERO



Qual è il moltiplicando?
Qual è il moltiplicatore?

le tabelline contengono 42 24 54

Fattori

	- ando	-atore
42	6	7
24	3 4	8 6
54	6	9

Trovo le tabelline:

42 = 7 x 6 6 x 7	24 = 4 x 6 3 x 8 6 x 4 8 x 3	54 = 6 x 9 9 x 6

In ogni colonna c'è un "x 6", quindi il moltiplicatore è 6. Il numero che corrisponde al primo 6 è 7, il secondo è 4, l'ultimo è 9, quindi il moltiplicando è 749.
L'operazione è:

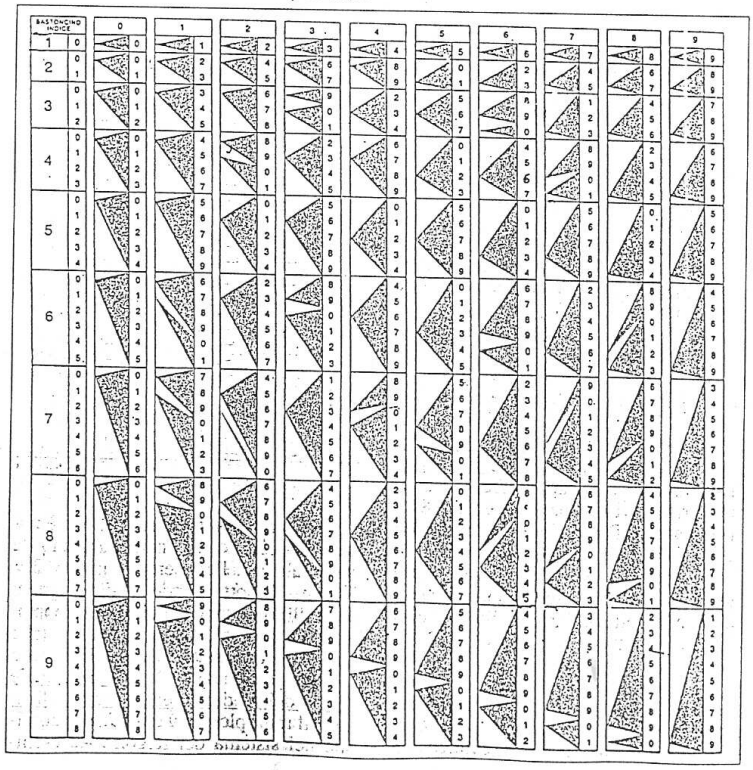
749 x 6 = 4494

Fig. 8

II parte: l'attività svolta in prima media

Dai Bastoncini di Nepero ai regoli di Genaille. *A) Le ragioni di un diverso approccio didattico.* Data la fisionomia delle due classi e la maggiore complessità di quest'ultima fase rispetto alle precedenti, abbiamo preferito sviluppare questa parte dell'attività solamente nella prima media, ma riteniamo che questa scelta possa essere diversa, a seconda delle situazioni. L'argomento è molto stimolante, e permette di approfondire numerosi temi (riflessioni sui multipli di un numero, sull'algoritmo della moltiplicazione, sulla notazione posizionale) da punti di vista del tutto inconsueti. Pone però dei problemi di ingegneria didattica notevolmente diversi rispetto alle due fasi precedenti, nelle quali il ruolo dell'insegnante si esplicava prevalentemente nel coordinare e nel razionalizzare le esplorazioni e le scoperte degli alunni. In questo caso invece sono determinanti la *fase preparatoria* dell'attività e l'organizzazione di una serie di supporti didattici necessari alla graduale comprensione da parte degli alunni del *cambio di rappresentazione* che si opera nel passaggio dai Bastoncini di Nepero ai Regoli di Genaille (*fig.* 9, *in basso*), notevolmente diversi fra loro dal punto di vista grafico.
La moltiplicazione «a gelosia» e i Bastoncini, che sono molto somiglianti fra loro e facilmente confrontabili, sono stati presenti ai ragazzi sin dall'inizio, come si è visto, *nella loro interezza.* Con i Regoli di Genaille riteniamo, invece, opportuno modificare la strategia e decidiamo di non mostrarli nella loro globalità, ma di condurre gli alunni gradualmente alla loro *ricostruzione matematica.* Il contratto didattico deve essere molto chiaro, affinché la classe sia con-

Fig. 9 - *I bastoncini calcolatori di Henry Genaille.*



sapevole che non si tratta di un'attività del tutto differente rispetto alle due che l'hanno preceduta, ma che si comincia ad affrontare in un modo diverso un'ulteriore rappresentazione dell'evoluzione storica dell'algoritmo della moltiplicazione, finalizzata alla velocizzazione del calcolo, e che tutto risulterà chiaro al termine della parte propedeutica che ora illustreremo. Per le stesse ragioni scegliamo di non inquadrare storicamente i Regoli, ma di rimandare questa fase al momento in cui gli alunni avranno ormai compreso la loro struttura logica[2].

Quello che stiamo per iniziare è un percorso realmente molto interessante che illustra lo sviluppo dell'idea matematica di Genaille sino alla sua rappresentazione grafica «riassuntiva»; in altre parole, che cerca di far cogliere l'originalità dei Regoli. Ma, per ottenere questo, dobbiamo scoprire a nostra volta l'idea di Genaille, «sezionando» la sua invenzione e predisponendo una sequenza di passaggi adeguatamente supportati (tabelle, abaco, accorgimenti vari che verranno chiariti fra poco) che trasformino i Regoli in un oggetto didattico da proporre alla classe.

Una volta chiariti i nodi concettuali iniziali, la comprensione dei Regoli nel loro insieme assume un'impennata, perché non si tratta che di estendere a tutte le 90 caselle che li compongono quello che si è ormai capito per le prime (per questa fase sono necessarie tre ore, con l'aggiunta di circa un'ora di attività supplementari per gli alunni meno capaci).

Al termine del laboratorio, inquadrando storicamente lo strumento, è stato interessante far riflettere gli alunni sul fatto che, se dal punto di vista dell'«economia di calcoli» rispetto ai Bastoncini di Nepero, i Regoli di Genaille offrono il vantaggio di evitare a chi li usa di dover fare mentalmente alcune operazioni, tale vantaggio non è stato sufficiente per determinare, all'epoca, il loro successo. Infatti, la contemporanea realizzazione di numerosi strumenti meccanici per la velocizzazione dei calcoli, tipica della fine del XIX secolo, ha fatto sì che i Regoli apparissero probabilmente più come un ingegnoso *divertissement* matematico che come un effettivo sussidio di carattere operativo.

Esamineremo ora nel dettaglio, commentandoli, i passi salienti della sequenza, cominciando con l'invitare il lettore ad un confronto preliminare tra i Bastoncini di Nepero (*fig.* 6) e i Regoli di Genaille (*fig.* 9). Sono formalmente diversi, ma possiedono la medesima struttura: entrambi sono delle tabelle a doppia entrata, divise rispettivamente in 81 e in 90 caselle. Per ragioni che capiremo fra poco, mentre i Bastoncini di Nepero sono formati da caselle quadrate tutte uguali, i regoli di Genaille sono formati da caselle rettangolari di altezza crescente (dall'alto verso il basso).

B) L'attività in classe. Tenendo presenti queste osservazioni, esaminiamo le fasi del lavoro.

Vogliamo innanzitutto far capire con esempi ed esercizi (*fig.* 10) il *cambio di rappresentazione* rispetto ai Bastoncini di *Nepero* e utilizziamo quelle che battezziamo «colonnine di studio» aventi tutte, provvisoriamente, un'altezza uguale di 9 quadratini (quelli di sinistra sono prenumerati da 0 a 8 e quelli di destra sono vuoti). Quando in una colonnina dobbiamo rappresentare un numero (di una o due cifre) facciamo così: nel primo in alto dei quadratini vuoti scriviamo la cifra delle unità (che nelle caselle dei Regoli di Nepero stava nel triangolino in basso a destra) e la colleghiamo mediante una linea con uno dei numeri prestampati che faremo corrispondere alla cifra delle decine, e che marchiamo con un pallino.

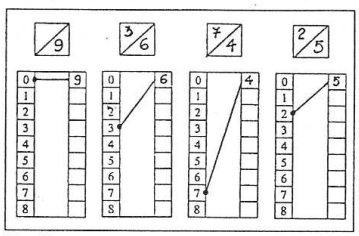


Fig. 10

Come passo successivo mostriamo come si rappresentano con questo metodo le moltiplicazioni tra fattori di una cifra (*fig.* 11). Cominciamo con l'accostare due colonnine ponendo a sinistra quella segnata *indice* (il moltiplicatore) e a destra quella del moltiplicando; poi (prendiamo come esempio il primo calcolo) moltiplichiamo 7 per 6 e scriviamo il prodotto 42 ponendo il 2 nel primo quadratino in alto a destra, segnando con un pallino il 4 e collegando le due cifre con una linea.

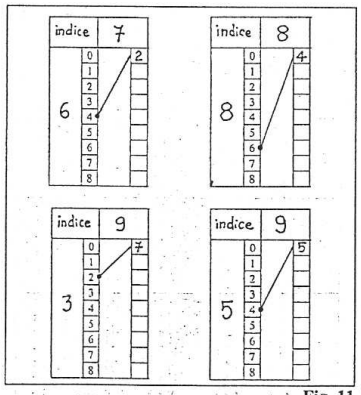


Fig. 11

Scopriamo a questo punto che non è necessario che le colonnine abbiano la stessa altezza. Per esempio: in 9 × 3 = 27 (*fig.* 11) sotto il 2 dell'*indice* segnato col pallino ci sono sei cifre «di troppo» che possiamo eliminare. L'altezza delle colonnine quindi può variare. E da cosa dipende la variazione? Dalla cifra delle decine del prodotto per 9 del moltiplicatore (il multiplo per 9 è il più alto possibile nel sistema dei Regoli). Ad esempio, per il numero 5 la cifra delle decine più alta è 4 (infatti 9 × 5 = 45), per 8 invece è 7 (9 × 8 = 72) e così via.

Questo spiega perché nei Regoli di Genaille (*fig.* 12) le altezze dei rettangoli variano all'aumentare del moltiplicatore da 1 a 9: aumenta anche la cifra delle decine del relativo prodotto, sino ad un massimo di volta in volta diverso (per il moltiplicatore 2 è 1, perché il più grande multiplo di 2 ammesso nei Regoli è 18, per il 3 è 2, perché il più grande multiplo è 27, e così via sino all'8 di 81).

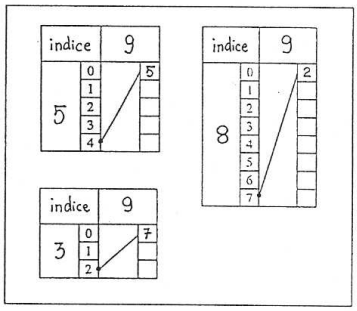


Fig. 12

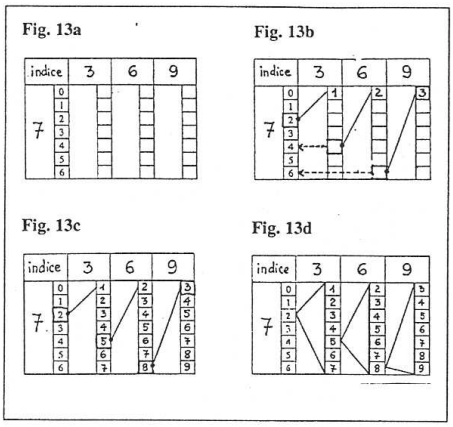
Eseguiamo ora come esercizio delle moltiplicazioni di difficoltà crescente fra un moltiplicando a più cifre e un moltiplicatore a una sola cifra usando l'ormai consueta rappresentazione (i calcoli iniziano da destra e le cifre che formano il prodotto continuano ad essere provvisoriamente unite da linee e pallini). La colonnina *indice* è fissa a sinistra.

Riassumiamo questa fase del lavoro esaminando passo dopo passo l'esempio «369 × 7» (*fig.* 13*a*).

Cominciamo (*fig.* 13*b*) col moltiplicare 9 × 7, scriviamo il 3 nel quadratino in alto a destra e lo colleghiamo con la solita linea al quadratino corrispondente al 6 prestampato nell'*indice*, che marchiamo con un pallino e che lasciamo per ora vuoto. Poi moltiplichiamo per 7 il 6 di 369, scriviamo il 2 nel quadratino in alto sotto il 6 e lo colleghiamo con il quadratino corrispondente al 4 dell'*indice*, lasciandolo anche questa volta per il momento vuoto. Infine moltiplichiamo 3 × 7, scriviamo l'1 in alto e lo colleghiamo con il quadratino contenente il 2. Ci con-

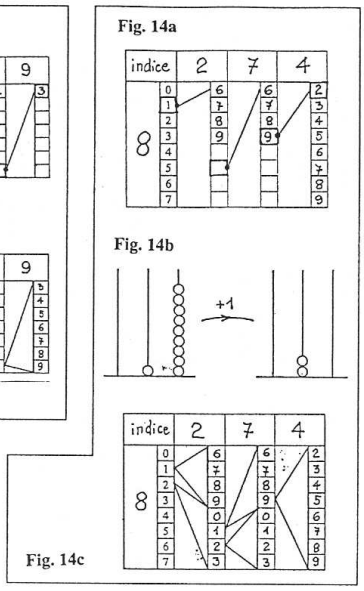
[2] Henry Genaille era un ingegnere francese delle ferrovie dello stato di Tours, che si dilettava in quelle che Edouard Lucas (v. *bibliografia*) chiama le sue «*admirables inventions*» nella ricerca di accorgimenti che rendessero più rapidi certi calcoli. I Regoli che noi abbiamo preso in esame sono del tipo più semplice, di quelli piatti. Genaille aveva messo in commercio anche delle scatole di regoli a quattro facce — pure Nepero aveva fatto la stessa cosa — in modo da consentire calcoli con numeri più grandi (sino ad un massimo di venti cifre). Lucas racconta di essersi impegnato lui stesso nel tentativo di rendere ancora più efficace lo strumento di Genaille, aggiungendovi degli slittamenti fra i Regoli, ma confessa di essere ancora lontano da un risultato ottimale, concludendo comunque ottimisticamente: «*questa [mia] macchina sarà veramente popolare perché il prezzo non supererà i venti franchi*» [del 1892]. Questo testimonia l'interesse diffuso sin da allora verso la popolarizzazione degli strumenti di calcolo.

centriamo ora sul «percorso» (che sarà leggibile da sinistra verso destra) avente per tappe i quattro quadratini. I due centrali momentaneamente sono vuoti, e bisogna riempirli.



Per capire come farlo, invitiamo un alunno alla lavagna e gli chiediamo di eseguire «normalmente» l'operazione 369 × 7 descrivendo tutti i passaggi ad alta voce: «7 per 9 fa 63, scrivo 3 e *riporto il 6*; 7 per 6 fa 42 e *6 che riportavo* fa 48, *scrivo l'8* e *riporto il 4*; 7 per 3 fa 21 e *4 che riportavo* fa 25. Il prodotto è 2583». Aiutiamo i ragazzi a capire come utilizzare questo algoritmo per riempire i quadratini (*fig.* 13*c*): nella colonnina del «6» di «369» la prima cifra nel quadratino in alto è 2. Ad essa dobbiamo ora aggiungere *il riporto 6* (decina del risultato 63 fra 9 e 7) e facciamo questo scrivendo sotto il 2 sei cifre consecutive *sino all'8*. Analogamente, nella colonnina del «3», all'1 del quadratino in alto dobbiamo aggiungere *il riporto 4* (decina del risultato 42 fra 6 e 7). Scriviamo quindi le cifre fino al 5 e completiamo la colonnina fino al 7. In questo modo, seguendo il percorso segnato dai pallini, leggiamo il risultato 2583. Comprendiamo quindi che i Regoli di Genaille *addizionano automaticamente i riporti,* e che questo rappresenta il sostanziale miglioramento rispetto ai Bastoncini di Nepero. Riteniamo che sia giunto ora il momento di passare dalla simbologia provvisoria che abbiamo adottato sinora (*colonnine, linee* e *pallini*) a quella *ufficiale* ideata da Genaille (*triangoli*). Cominciamo con il concentrarci sulla colonnina del «9» (*fig.* 13*c*). Le unità in essa contenute (da 3 a 9) fanno riferimento alla decina «6» prestampato sull'*indice* e, assieme, sono leggibili come «63», «64», «65» e così via sino a «69». Spieghiamo che Genaille rappresenta questa situazione con un triangolo (*fig.* 13*d*) avente la base lunga sette quadratini e il vertice puntato in corrispondenza dell'8. Per ragioni analoghe, ci sarà un triangolo nella colonnina del «6» con la stessa base alta sette quadratini e il vertice in corrispondenza del 5 della colonnina del «3» e infine un terzo triangolo nella colonnina del «3» con il vertice in corrispondenza del 2 dell'*indice*.

Analizziamo poi con un esempio (274 × 8) quei casi nei quali accade che la somma fra una cifra e un riporto sia *maggiore di 9* (*fig.* 14*a*).



Procediamo come abbiamo fatto in precedenza e completiamo la colonnina del «4» (unità) dal 2 fino al 9. Nella colonnina del «2» e in quella del «7», però, ci troviamo nell'imbarazzo di non sapere quale numero scrivere sotto il 9 (*fig.* 14*a*). Che fare?

Qualche alunno lo intuisce, e suggerisce di scrivere 10, 11, 12, 13. L'idea piace ma solleva delle perplessità. Altri propongono di scrivere soltanto le unità: 0, 1, 2, 3.

Questa proposta convince di più ma a molti non risulta chiara.

Oltretutto, il risultato che emerge in questo modo sarebbe 1192, ma abbiamo calcolato che quello corretto è 2192.

I nodi sono quindi: cosa scrivere nei quadratini sotto i due 9 e quell'1 delle migliaia del Regolo *indice* che dovrebbe diventare 2.

Questo è un momento didattico decisivo, ma è molto delicato, perché numerosi studenti incontrano forti difficoltà da un punto di vista logico. È importante superarlo con chiarezza anche perché esso rappresenta l'ultimo ostacolo prima di comprendere la presenza nei Regoli dei doppi triangoli.

Decidiamo di utilizzare *l'abaco* (*fig.* 14*b*) per completare la spiegazione; esso infatti ci consente di visualizzare ciò che accade quando le biglie di un'asta dovrebbero essere 10: bisogna svuotarla e aggiungere una biglia all'asta alla sua sinistra (*passaggio alla successiva potenza di dieci*).

Nella colonnina del «2» di «274» (*fig.* 14*a*) accade la stessa cosa. Vediamo come e perché.

La cifra 5 del prodotto 56 fra 7 e 8, aggiunta al 6 del prodotto 16 fra 2 e 8, dà una somma che supera di 1 le dieci unità. Analogamente a quanto accade nell'abaco, bisogna per così dire «azzerare» la colonnina del «2» e ricominciare da 1. In pratica, dopo il 9 scriviamo le cifre 0, 1, 2, 3. Dallo 0 in poi la linea e il pallino, però, non possono più continuare ad indicare l'1 della casella *indice*, ma devono indicare la cifra successiva, e cioè il 2, come per la seconda biglia che abbiamo aggiunto nell'esempio all'asta dell'abaco (la stessa cosa accade, per analogia, nella colonnina del «7»). Genaille, per indicare questo passaggio, usa l'accorgimento di disegnare non più uno solo ma due triangoli, i vertici dei quali convergono verso due numeri consecutivi (*fig.* 14*c*). Ora possiamo finalmente leggere il prodotto corretto: 2192.

Poiché alcuni alunni fanno fatica a leggere il risultato ci serviamo — ruotando di 90° i Regoli che usiamo sulla lavagna luminosa — di quella che battezziamo *tecnica dell'imbuto,* visualizzazione molto chiara della «caduta» delle cifre da un triangolo (letto come «imbuto») a quello sottostante, sino all'ultimo. Vediamo l'esempio «348 × 9» (*fig.* 15): il pallino colorato disegnato su un acetato «rotola» sulla lavagna luminosa da un triangolo all'altro a partire dal 2, passando per il 3 e poi per l'1 fino ad arrivare al 3. Rileggendo il «percorso del pallino» al contrario: 3132.

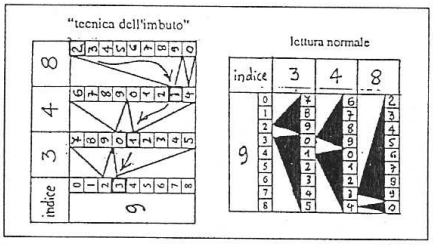


Fig. 15

Gli alunni, infine, completano la «costruzione matematica» dei triangoli in tutti i Regoli (da soli o quasi riescono a farlo in 6 su 20, pari al 30% della classe, che diventano *tutors* molto efficaci dei compagni). Poi, a casa, li dipingono, li incollano su cartoncino o su strisce di balsa e, dopo averli tagliati, li utilizzano per svolgere delle operazioni.

Riscopriamo che, quando il moltiplicatore è un numero a più cifre, si procede analogamente a quanto si faceva con i Bastoncini di Nepero (nella *fig.* 16 rappresentiamo un esempio su dei Regoli che per ragioni di spazio abbiamo sezionato).

Confronto finale fra i tre strumenti

Per chiudere l'attività predisponiamo assieme alla classe una tabella in modo da riassumere con chiarezza i miglioramen-

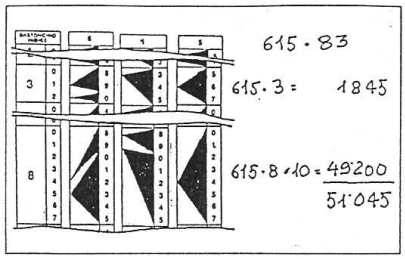


Fig. 16

ti apportati alla moltiplicazione «a gelosia» da Nepero e ai Bastoncini di Nepero da Genaille, indicando con **SÌ** le operazioni che è necessario e con **NO** quelle che non è più necessario svolgere (le «automatizzate»):

Strumento	Moltiplicazioni parziali	Somme con riporti	Moltiplicazione per potenze di 10	Somma finale
Molt. «Gelosia»	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ
Bast. di Nepero	NO	SÌ	SÌ	SÌ
Reg. di Genaille	NO	NO	SÌ	SÌ

Conclusioni

L'attività che abbiamo proposto, pur interessante anche come episodio didatticamente isolato, acquista una maggiore significatività se viene inserita in un contesto in cui la storia della matematica svolge un ruolo stabile e diffuso. Le occasioni in questo senso sono numerose e molto varie: il rapporto fra l'evoluzione dell'aritmetica e gli scambi culturali tra l'India e le civiltà medio orientali; la contestualizzazione storica degli argomenti (l'evoluzione del pensiero e del linguaggio algebrico nel corso dei secoli, per esempio); lo studio degli strumenti (anche di quelli più semplici, come gli abaci romani o quelli orientali); l'analisi e la soluzione di testi di problemi di epoca medievale (ve ne sono molti ormai celebri, come quelli di Fibonacci o di Luca Pacioli); la storia delle parole[3]; l'analisi di libri di matematica e di quaderni di scuola dei genitori o dei nonni (può essere molto istruttivo valutare come *testimonianze storiche* oggetti apparentemente «poveri» come questi); ecc. Naturalmente le valenze matematiche di questi temi sono differenti, come pure gli obiettivi educativi. Ci sembra, però, che presentino tutti un'importante caratteristica comune: aiutano gli studenti a conoscere la matematica anche come risultato di un continuo lentissimo processo di elaborazione concettuale al quale contribuiscono sì in modo determinante grandi studiosi o importanti scuole di pensiero ma anche — soprattutto per la sua diffusione — gli infiniti scambi avvenuti nel corso dei millenni fra mercanti, astronomi, navigatori, insegnanti, studenti, esperti catastali, artigiani, ... insomma: la matematica come evoluzione delle teorie, delle tecniche, dei linguaggi. Gli allievi delle varie età aderiscono con interesse alla presentazione di queste informazioni. All'inizio sono forti la curiosità, naturalmente, e il divertito stupore, ma anche la sensazione di capire qualcosa di più, e di più profondo. Per esempio, quando una volta abbiamo scoperto in una prima media che il significato greco arcaico di «cerchio» è «falco, sparviero», abbiamo capito di esserci avvicinati — pensando al lento volo circolare dei rapaci alla ricerca delle prede — *all'inizio assoluto* di un concetto geometrico. Col tempo, la curiosità diventerà forse interesse più ampio, strumento di lavoro, graduale approfondimento autonomo.

Si può pensare, infine, che i laboratori disciplinari o interdisciplinari nei quali si realizzassero esperienze come quella descritta, producano col tempo materiale per un vero e proprio «museo della matematica» di una scuola, e che gli strumenti analizzati e poi realizzati ex novo da una classe diventino a loro volta oggetto di studio e quindi di trasmissione di conoscenza per tutte le altre **(Giancarlo Navarra).**

Riferimenti bibliografici

C. Boyer, *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1987.

R. Franci, L. Toti Rigatelli, *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento*, Edizioni Quattro Venti, Urbino 1982.

M. Gardner, «Giochi matematici: I "Bastoncini di Nepero", l'eccentrico padre dei logaritmi», in «Le Scienze», n. 70, giugno 1974, pp. 94-99.

W. Glenn, D. Johnson, *Strumenti per calcolare*, Zanichelli, Bologna 1979.

G. Ifrah, *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1989.

B. Jannamorelli, *Strumenti di calcolo aritmetico ingenui... ma ingegnosi*, Edizioni Qualevita, L'Aquila 1995.

É. Lucas, *Récréations mathématiques*, Paris 1892 (nouveau tirage, Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard, Paris 1960).

A. Sibilla, «Riflessioni ed esperienze sull'uso della Storia della Matematica per l'insegnamento della Matematica nella Scuola Media», in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», n. 11-12, 1991, 1103-1123.

[3] L'articolo G. Navarra, «E se una triandria di poliferi ammirasse una scultura perilitica? Cronaca di un'esperienza didattica condotta in una scuola media sulle etimologie dei termini scientifici», in «Scuola e Didattica, n. 10, 1990, pp. 79-82, contiene spunti di lavoro su questo argomento.

VIDEOCASSETTE a colori

VHS

L'IDEA DEI NUMERI

La storia dei numeri: i primi tentativi, i numeri romani, quelli arabi; il concetto di valore del posto occupato da una cifra; il calcolo automatico; la numerazione binaria; le moderne calcolatrici.

71048 VOX 1048 - *durata 15'* - **L. 39.000**

VIAGGIO AL CENTRO DEL TRIANGOLO

Sono descritti i diversi centri di un triangolo (baricentro, ortocentro, incentro e circocentro) e come gli stessi si spostano al variare dei lati.

71049 VOX 1049 - *durata 8'* - **L. 39.000**

SUL TEOREMA DI PITAGORA

L'animazione grafica spiega il teorema di Pitagora usando semplici esempi per arrivare al caso generale.

71050 VOX 1050 - *durata 14'* - **L. 39.000**

AMICO COMPUTER

Approccio didattico mediante il linguaggio PROLOG

Che cos'è il computer e come si usa, quali possibilità offre.

Gradualità, sistematicità e chiarezza espositiva rendono questo programma essenziale per la comprensione dei principi operativi del computer e dei processi logici dei linguaggi con particolare riferimento al PROLOG.

70803 VS 803 - *durata 30'* - **L. 49.300**

I prezzi sono comprensivi di IVA. Vendite per corrispondenza. Ordini a Editrice La Scuola, 25186 Brescia.

EDITRICE LA SCUOLA

ed 96 133