Una questione di stuzzicadenti
Riflessioni sul linguaggio naturale e sul linguaggio algebrico[1]

GIANCARLO NAVARRA[2]

1

ARITMETICA E ALGEBRA

La matematica tormenta probabilmente i sogni della maggioranza degli esseri umani scolarizzati. Infinitamente di più dell'italiano o della storia. Non capire una poesia o un'opera d'arte contemporanea crea meno insicurezza che non capire un problema come "Un mattone pesa un chilo più mezzo mattone. Quanto pesa il mattone?". Come ricorda Cesare Cornoldi, un'idea spesso associata alla matematica è che questa investa abilità intellettive *centrali,* e pare accertato che le attribuzioni dei genitori in questo senso vengano trasmesse ai figli (come sente ripetere d'altro canto ogni insegnante nei colloqui con le famiglie).

Una nicchia particolare di tali infauste memorie è riservata all'algebra elementare; peraltro, la letteratura internazionale nel campo delle ricerche sul suo apprendimento evidenzia la diffusione della crisi dell'insegnamento tradizionale di questa disciplina. Una causa spesso *insospettabile* di alcuni fra i principali ostacoli cognitivi viene collocata in campo pre-algebrico: si tende a concentrare un'eccessiva attenzione sui *processi di calcolo* impedendo agli allievi di realizzare quelle esperienze necessarie al processo di generalizzazione e alla concettualizzazione delle strutture aritmetiche. In altre parole, il pensiero algebrico non viene costruito progressivamente come strumento e oggetto di pensiero *parallelamente* all'aritmetica ma *successivamente* ad essa, e viene esaltato soprattutto nei suoi meccanismi manipolativi. In questo modo l'algebra perde alcune delle sue caratteristiche essenziali di linguaggio adatto a descrivere la realtà e di strumento di ragionamento e di previsione attraverso la *messa in*

[1] I temi di questo articolo si collocano all'interno di un progetto di ricerca sulla didattica dell'algebra nella scuola di base iniziato nel 1992 nell'ambito del GREM. Attualmente (1999/2000) esso coinvolge più di 700 alunni (78% della scuola elementare, 22% della scuola media). Negli anni scolastici 1998/99 e 1999/2000 è stato finanziato come Progetto Complesso per la sperimentazione dell'autonomia scolastica. Dal 1999 il progetto rappresenta uno dei contributi italiani ai lavori di un Progetto Comenius del Programma comunitario europeo Socrates coordinato dal prof. Leo Rogers (UK).

[2] Docente di scienze matematiche, chimiche, fisiche, naturali presso l'Istituto Comprensivo di S.Giustina (BL); insegnante ricercatore del GREM (Gruppo di ricerca in educazione matematica, direttore prof. Nicolina Malara) operante presso il dipartimento di matematica dell'università di Modena; coordinatore del progetto al quale si riferisce l'articolo; nel periodo 1994-1998 ha usufruito di un distacco presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena con un progetto di ricerca sulla didattica dell'algebra.

formula di conoscenze o di ipotesi sui fenomeni e la *derivazione di nuove conoscenze* mediante le trasformazioni consentite dal formalismo algebrico.

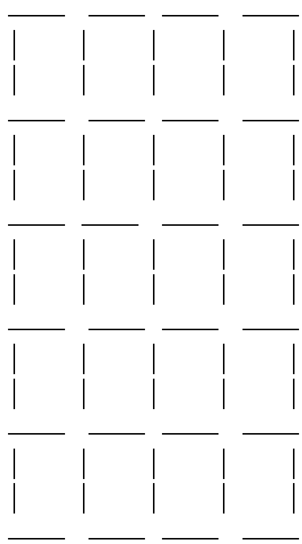
Riteniamo, assieme ad altri ricercatori, che non solo sia necessario modificare profondamente l'insegnamento in sé dell'algebra, ma che sia anche opportuno *tendere ad essa sin dalla scuola elementare,* cominciando dall'individuazione delle concezioni didattiche più produttive per favorire in modo significativo un passaggio graduale dal pensiero aritmetico a quello algebrico; fra le prime, quelle legate alle relazioni fra il linguaggio naturale e quello matematico, ben sapendo quanto sia stretto il rapporto tra la capacità di esprimere correttamente una proposizione nel linguaggio *naturale* e quella di formularla in linguaggio *algebrico*.

Nell'articolo intendiamo soffermarci su alcuni di questi temi utilizzando come spunto per la riflessione un'attività svolta in una seconda media che partecipa da due anni al nostro progetto sulla didattica sperimentale dell'algebra.

2

LINGUAGGIO NATURALE E LINGUAGGIO MATEMATICO

Agli alunni viene presentato un disegno accompagnato da una domanda: "Abbiamo rappresentato degli stuzzicadenti sopra una tavola. Quanti sono?".



Il compito è considerato facile e la risposta “49” è raggiunta in un tempo piuttosto breve.

Si propone allora un seconda consegna “Spiega come hai fatto a trovare il numero 49” che disorienta perché è allo stesso tempo semplice e complicata. Al termine del lavoro i protocolli vengono confrontati fra loro e commentati collettivamente[3] e possiamo giungere all’individuazione di due diverse modalità nell’argomentazione variamente integrate fra loro: una basata sul linguaggio naturale, l’altra sul linguaggio formalizzato.

- 7 alunni utilizzano esclusivamente il linguaggio naturale,
- 5 alunni utilizzano esclusivamente il linguaggio matematico,
- 8 alunni utilizzano entrambi i linguaggi.

Gli alunni del primo gruppo sviluppano tre strategie[4]:

A_1) contano tutti gli stuzzicadenti

> *Es: Ho trovato il risultato perché gli ho contati uno a uno.*

A_2) contano gli stuzzicadenti del contorno e poi quelli interni

> *Es: Per trovare il numero degli stuzzicadenti ho contato il contorno, e dopo ho contato gli stuzzicadenti verticali, e quelli orizzontali.*

A_3) moltiplicano il numero di stuzzicadenti di una riga per quello delle righe, fanno altrettanto con le colonne e sommano i due prodotti

> *Es: Ho contato gli stuzzicadenti della prima fila orizzontale e lo ho moltiplicato per tutte le file orrizontale e poi ho contato gli stuz. delle file verticale e gli ho moltiplicati per tutte le file verticali poi ho sommato i risultati ed ho ottenuto 49.*

Gli alunni del secondo gruppo seguono la strategia A_3 e la rappresentano con scritture simili:

> *Es:* $5 \times 5 = 25$; $4 \times 6 = 24$; $25 + 24 = 49$.

---

3 Il confronto fra le scritture prodotte dagli allievi attraverso la verbalizzazione orale e l’argomentazione scritta appartengono alla didattica sperimentale della matematica; esso favorisce gli aspetti metalinguistici e quelli metacognitivi e consente l’individuazione di aspetti importanti quali la correttezza, l’economia e la coerenza di scritture diverse e la loro equivalenza.

4 Tutti i protocolli riportati nell’articolo sono quelli originali, senza interventi o correzioni.

Nel terzo gruppo compaiono tre strategie già classificate:

A_1) (su questa torneremo fra poco)

A_3)

> *Es: 5 • 5 + 4 • 6 = 49.*
>
> *Per trovare il numero ho contato quanti stuzzicadenti c'erano nella 1ª fila verticale (5) e poi ho visto quante volte si ripeteva (5) e le ho moltiplicate (5 • 5). Poi ho visto quanti ce n'erano nella 1ª fila orizzontale (4) e ho visto quante volte si ripeteva (6) e le ho moltiplicate (4 • 6) e i prodotti delle due moltiplicazioni le ho sommate assieme (25 + 24).*

A_2/A_3) strategia mista.

> *Per trovare il numero di stuzzicadenti del rettangolo ho contato prima i stuzzicadenti del "lato minore" e poi li ho moltiplicati per i stuzzicadenti del "lato maggiore" per due volte e poi ho aggiunto metà perimetro.*
>
> $a \cdot b + a \cdot b + a + b$

Riassumiamo le strategie:

A_1) calcolo di tutti gli stuzzicadenti uno per uno: 3 alunni;

A_2) calcolo degli stuzzicadenti del contorno e poi di quelli interni: 3 alunni;

A_3) calcolo per file e per colonne: 13 alunni;

A_2/A_3) 1 alunno.

Prima di proseguire soffermiamoci su alcune considerazioni a commento di questo primo segmento dell'attività.

3

DIFFERENZA FRA *CALCOLARE* E *RAPPRESENTARE*

La prestazione implicita nella prima consegna ("Quanti sono gli stuzzicadenti?") comporta l'individuazione di un risultato, e quindi chiede di *calcolare:* si colloca ad un livello *cognitivo.* La seconda ("Spiega come hai fatto") è più complessa perché è più difficile *guardarsi mentre si calcola* che *calcolare:* si colloca ad un livello *metacognitivo*. La difficoltà è evidente in un protocollo del terzo gruppo (A_2/A_3) che contiene una incoerenza fra la spiegazione in linguaggio naturale e quella in linguaggio matematico (incoerenza percepita peraltro in modo approssimativo dall'alunna nel corso della discussione).

> *Ho contato tutti gli stuzzicadenti.*
> *5 • 5 = 25;   4 • 6 = 24;   25 + 24 = 49*

Il calcolo realmente effettuato dall'alunna è quello elementare descritto a parole (strategia A_1); quello descritto subito dopo in linguaggio aritmetico è completamente diverso, ed è più organizzato (strategia A_3). Con la prima consegna era prevalso il calcolo istintivo e meno impegnativo (contare tutti gli stuzzicadenti uno per uno); con la seconda, al momento del passaggio alla rappresentazione simbolica del 'guardarsi mentre si calcola', è subentrato un atteggiamento che potremmo definire più 'rilassato'. L'autrice, avendo già trovato il numero 49, ha ormai superato la preoccupazione principale e, nel 'pensarsi', ha attivato una stategia più complessa senza rendersi conto di non aver rispettato la consegna.

Ad un certo punto, per sbloccare la situazione, abbiamo chiesto all'autrice di rappresentare in linguaggio matematico il calcolo *realmente* effettuato. Poiché né lei né i compagni mostravano di comprendere il senso della domanda abbiamo cominciato a riempire la lavagna di numeri 1 sommati fra loro; la rappresentazione simbolica ha evidenziato in modo lampante la banalità della strategia e la sua efficacia momentanea (sarebbe del tutto inadeguata all'aumentare del numero degli stuzzicadenti).

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + +
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

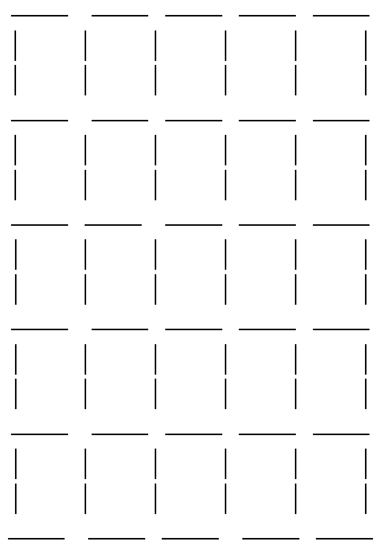
Come parziale conclusione: la prima consegna punta all'individuazione del *prodotto,* cioè delle operazioni che consentono di *risolvere* il problema, la seconda all'individuazione del *processo*, cioè delle scritture che consentono di *rappresentar*e una manifestazione articolata del pensiero. Nel primo caso prevale l'aspetto *diacronico:* i processi mentali del calcolo si svolgono sequenzialmente nel tempo (spesso vengono scanditi con il bisbiglio) e la soluzione emerge alla fine di un'*azione.* Nel secondo invece la dimensione temporale scompare: l'autore si astrae dal *fare* e si pone nella dimensione concettuale dell'individuazione della *struttura* dell'algoritmo che ha usato. Ritorneremo più avanti su questi concetti, che sono basilari per comprendere il passaggio da un modo di pensare *aritmetico* ad un modo di pensare *algebrico*.

Ritorniamo ora alla descrizione dell'attività.

4

CONFRONTO TRA LINGUAGGI E RICONOSCIMENTO DI STRATEGIE

Mostriamo un quadrato formato da 64 fiammiferi e poi chiediamo di commentare alcune espressioni aritmetiche mediante le quali altri studenti più o meno della stessa età hanno descritto le loro strategie (entrambi compaiono in un articolo del ricercatore inglese Dave Hewitt).



Gli alunni investigano ogni frase con grande attenzione e la interpretano, da soli o attraverso reciproci aiuti, individuando relazioni spesso difficili da individuare. Presentiamo ora alcuni esempi di espressioni riportate nell'articolo con le relative spiegazioni dei nostri studenti.

(a) $5 + 5 \times 11$

Spiegazione: *ognuna delle 5 colonne è formata da 11 stuzzicadenti, quindi hanno calcolato 5 × 11. Poi sono stati aggiunti gli ultimi cinque stuzzicadenti in verticale a destra.*

Aggiungiamo che gli alunni propongono di sostituire la scrittura originale con quest'altra: $11 \times 5 + 5$, sostenendo che la modifica rende la scrittura più aderente alla loro spiegazione.

(b) $3 \times (3 \times 5 + 1) + 6 + 6$

Spiegazione (laboriosa, richiede più interventi successivi): *ogni riga è stata vista come se fosse formata da cinque "C" (3 × 5) e da un ultimo fiammifero verticale (+ 1); in questo modo sono stati calcolati gli stuzzicadenti della prima, della terza e della quinta riga (questo spiega il 3 × iniziale). Poi sono stati sommati i 6 fiammiferi verticali della seconda riga (+ 6) e quelli della quarta (+ 6).*

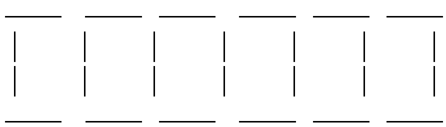
(c) $4 \times 5 + 2 \times 4 \times 5$

Spiegazione (l'espressione mette a dura prova lo spirito di osservazione degli alunni): *4 × 5 rappresenta il numero degli stuzzicadenti del contorno* (qualcuno osserva che sarebbe stato più chiaro se avessero scritto 5 × 4); *rimangono da calcolare 4 righe composte da 5 fiammiferi orizzontali ciascuna e 4 colonne formate da 5 fiammiferi verticali (2 × 4 × 5).* Viene proposta una traduzione 'più chiara' del ragionamento: $5 \times 4 + 5 \times 4 \times 2$. Si riconosce che la strategia è uguale alla A_2.

5

VERSO LA GENERALIZZAZIONE

Lo sviluppo dell'attività continua con questo disegno:



Si chiede di trovare il numero degli stuzzicadenti e di argomentare la strategia usando il linguaggio matematico. È evidente l'impegno degli alunni nel tentativo di riconoscere nella nuova situazione agganci con quella precedente. Questa volta le modalità sono di due tipi:

- 14 alunni utilizzano esclusivamente il linguaggio simbolico;
- 6 alunni utilizzano entrambi i linguaggi.

Le scritture sono numerose (due terzi degli alunni ne elaborano più di una); molte vengono subito riconosciute come equivalenti e consentono di raggruppare le strategie:

(D) 18 alunni contano gli stuzzicadenti orizzontali e quelli verticali e addizionano le due somme:

Es:	$6 \times 2 + 7$	$6 \times 2 + 7 = a$	$(6 + 6) + (6 + 1)$

(E) 4 alunni individuano in modi diversi le "C" (come in (b)):

Es:	$3 \cdot 6 + 1$	$4 + 3 \cdot 5$

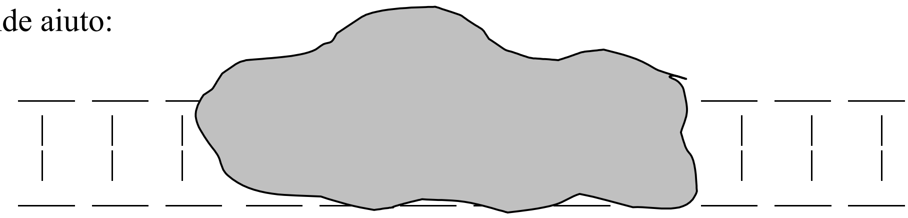
(F) 7 alunni individuano le strategie più diverse:

Es:	$(6 + 4) + (3 + 6)$	$6 \times 4 - 5$	$4 \times 3 + 7$
	$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1$	$6 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	

Il confronto porta a osservare che alcune strategie sono più economiche, e che altre invece sono decisamente cervellotiche; gli alunni sono comunque molto soddisfatti perché pensano che l'obiettivo sia quello di ottenere quante più scritture possibili. Si chiede se cambierebbe la strategia nel caso che il numero degli stuzzicadenti fosse diverso; la risposta è che sì, la dovrebbero modificare, e alcuni affermano che sarebbero costretti a reinventarla integralmente.

Ci aspetteremmo che la discussione favorisse dei progressi negli alunni che hanno individuato la strategia (E), ma né gli autori né gli altri colgono la loro importanza.

Proponiamo allora un'ultima situazione, introducendo un artificio che in molti altri casi è stato di grande aiuto:



La striscia ha le stesse caratteristiche della precedente, ma una macchia nasconde una parte degli stuzzicadenti. Chiediamo se e come sia possibile esprimere comunque il loro numero.

Gli alunni elaborano molte scritture (la maggior parte in linguaggio matematico, poche in linguaggio misto). Ecco alcuni esempi

$3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + a$ $9 + a + 9$ $9 \cdot 2 + x$ $6 \cdot 2 + 7 = a$

$3 \cdot 2 + 3 + n + 3 \cdot 2 + 3$ $(3 + a + 3) \cdot 2 + 4 + a + 4$

$(5 + 3) + (6 + 3) + x$ $a + b + c = n$

$3 \cdot 2 + 3 + b + 3 \cdot 2 + 3 = 9 \cdot 2 + b$ $17 + 1 + 1/2 + 1$ $9 + 1/2 + a + 9$

Ho contato gli stuzzicadenti della base ho moltiplicato per 2 ed ho aggiunto gli stuzzicadenti verticali e ho aggiunto x, gli stuzzicadenti coperti.

Ho contato tutti i bastoncini che si vedono e anche quelli un po' coperti che sono in tutto 20 e quelli coperti del tutto dalla macchia non si sà quanti sono: 10 + a + 10.

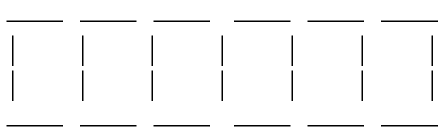
Man mano che l'elenco si delinea la diversità delle scritture viene accettata come un dato di fatto e le strategie vengono interpretate con compiaciuta curiosità. Emergono tante piccole verità *locali:* ognuno esibisce la sua. Il confronto conduce peraltro a concludere che la maggior parte delle equazioni è riconducibile a questa:

$$18 + n$$

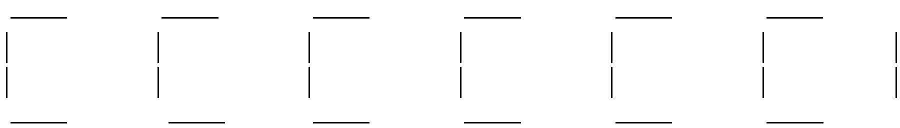
Tutti i protocolli hanno quindi la medesima caratteristica, che costituisce anche il loro limite: il "numero "misterioso" (rappresentato con una lettera) viene identificato con gli stuzzicadenti sotto la macchia che non si possono contare. La lettera compare sì nelle espressioni ma rappresenta semplicemente *un numero da addizionare ad altri*, e rimane muta di quello che potremmo chiamare il suo *valore aritmetico aggiunto.* Le scritture fissano i risultati di un'esplorazione *sequenziale* del disegno, che si traduce in strategie basate su concatenazioni altrettanto sequenziali di calcoli: prima calcolo gli stuzzicadenti a sinistra della macchia, poi quelli a destra e infine aggiungo quelli sotto la macchia. La lettera entra quindi in gioco con una funzione opaca di significati perché è legata ancora alla concretezza dei fiammiferi che non si possono contare, e quindi non apre prospettive concettuali inedite. Riemerge l'archetipo del *contare* come *litania*; le variazioni fra una scrittura e l'altra sono di tipo puramente sintattico. Siamo in pieno pensiero *aritmetico,* anche se in alcune scritture compare l'embrione di un pensiero algebrico.

Riproponiamo la scrittura (E) relativa al problema precedente e chiediamo di interpretarla facendo riferimento al relativo disegno:

$$3 \cdot 6 + 1$$



Il confronto permette di capire che gli autori si sono costruiti una rappresentazione mentale del tutto originale del disegno che si ricollega tra l'altro all'espressione (b) degli studenti inglesi:



essi hanno 'scomposto' la striscia in 6 'C', ognuna delle quali è formata da 3 fiammiferi, più l'ultimo fiammifero. Questi alunni, a differenza dei compagni, hanno intuito una *regolarità*, che rappresenta proprio una *chiave di lettura algebrica* del problema: quello che conta non è il numero degli stuzzicadenti, visibili o invisibili, ma la *struttura* della loro disposizione, ed è per questo motivo che nessuna delle altre scritture relative al problema della macchia apre delle prospettive). L'individuazione della struttura consente finalmente il passaggio alla scrittura algebrica, cioè alla sua *rappresentazione* in un linguaggio formalizzato:

$$3 \cdot n + 1$$

Ecco il salto di qualità: la lettera non indica il numero degli stuzzicadenti che non si vedono, ma *il numero delle volte che la 'C' si ripete*.

6

VERSO UNA CONCLUSIONE: PENSARE L'ARITMETICA ALGEBRICAMENTE

Le attività nelle quali bisogna scoprire le regolarità di una struttura sono preziose per la formazione del pensiero algebrico, in quanto favoriscono il passaggio alla *generalizzazione.* L'alunno dovrebbe imparare ad allontanare da sé la preoccupazione del risultato, e quindi della ricerca delle operazioni che consentono di ottenerlo, e raggiungere un livello superiore di pensiero: sostituire al *calcolare* il *"guardarsi" mentre si sta calcolando*. È il passaggio dal livello cognitivo a quello metacognitivo al quale il risolutore *interpreta la struttura del problema*. L'algebra diviene così un linguaggio per descrivere la realtà, e non solo: ne amplifica la *comprensione*. Un processo di questo tipo avviene molto lentamente, per progressioni successive, attraverso un intersecarsi di continuità e di fratture fra un livello e l'altro della conoscenza.

Riteniamo che vi sia una forte analogia fra le modalità dell'apprendimento del linguaggio naturale e quello del linguaggio algebrico, e per spiegare questo punto di vista può essere utile ricorrere alla metafora del *balbettio.*

Il bambino, nell'apprendimento del linguaggio, si appropria poco alla volta dei suoi significati e delle regole che lo supportano, che sviluppa gradualmente attraverso imitazioni e aggiustamenti sino agli approfondimenti dell'età scolare, quando imparerà a leggere e a riflettere sugli aspetti grammaticali e sintattici della lingua. Nella didattica tradizionale del linguaggio algebrico si comincia invece privilegiando lo studio delle *regole*, come se la manipolazione formale fosse in qualche modo indipendente dalla comprensione dei significati. Si tende cioè ad insegnare la sintassi dell'algebra trascurando la sua semantica. I modelli mentali propri del pensiero algebrico dovrebbero essere costruiti invece attraverso quelle che potremmo chiamare forme iniziali di *balbettio algebrico,* a cominciare dalla prima elementare, dal momento in cui il bambino comincia ad avvicinarsi al pensiero aritmetico. In altre parole: bisognerebbe potergli insegnare a *pensare l'aritmetica algebricamente*. Tradizionalmente, invece, il pensiero algebrico non viene costruito *progressivamente* come strumento e oggetto di pensiero *parallelamente* all'aritmetica, ma *successivamente* ad essa, col risultato di rendere impossibile, di fatto, la costruzione di un ambiente che stimoli in modo anche informale l'elaborazione autonoma del balbettio e quindi l'appropriazione giocosa, sperimentale, continuamente ridefinita, di un nuovo linguaggio.

La didattica tradizionale dell'aritmetica tende a favorire nell'alunno un abito mentale teso alla ricerca immediata degli strumenti (le operazioni) per l'individuazione della *risposta* (il risultato); questo ricorda le finalità alle quali tende inizialmente il bambino, quando si serve del linguaggio per veder soddisfatti i suoi bisogni *primari* (fame, sonno, piacere, …). Un piccolissimo esempio significativo: l'atteggiamento del quale stiamo parlando viene indotto quasi certamente anche dalla formulazione di consegne standard in problemi come questo:

Su un ramo ci sono 13 corvi; su un altro ce ne sono 6. *Calcola il numero totale dei corvi.*

Col tempo, il bambino impara che il linguaggio verbale assolve anche a funzioni molto più ricche e diversificate rispetto all'iniziale soluzione dei bisogni; impara per esempio a *descrivere* la realtà, penetrando tra le infinite complessità e le contraddizioni delle sue strutture. Imparando, contemporaneamente, a conoscere se stesso, e quindi il funzionamento del suo pensiero.

Qualcosa di analogo dovrebbe accadere con l'aritmetica e l'algebra. Lo sviluppo del pensiero aritmetico, caratterizzato da operazioni su numeri noti, può provocare nell'alunno il formarsi di stereotipi alla lunga impossibili da estirpare, a causa dei quali lo studente si ingabbia nella ricerca ossessiva del risultato numerico *(il bisogno primario),* impedendosi con ciò l'esplorazione di percorsi mentali diversi infinitamente più fruttuosi e stimolanti per la formazione di un pur embrionale pensiero algebrico *(l'interpretazione e la descrizione della realtà* attraverso il linguaggio matematico).

Con questo obiettivo la consegna del problema precedente andrebbe riformulata consentendo anche in bambini molto piccoli delle riflessioni riguardanti il se stesso che calcola (con, in più, l'attivazione di competenze argomentative tutt'altro che banali):

Su un ramo ci sono 13 corvi; su un altro ce ne sono 6. *Spiega come fai a trovare il numero totale dei corvi e poi calcolalo.*

Secondo noi questa prospettiva – l'algebra come linguaggio, in un andirivieni continuo del pensiero dall'aritmetica all'algebra e viceversa – può favorire l'individuazione di una didattica più efficace con alunni fra i sette e i quattordici anni che si fondi sulla *negoziazione* e quindi sull'*esplicitazione* di un contratto didattico per la soluzione dei problemi algebrici basato sul principio *"<u>prima</u> rappresenta, <u>poi</u> risolvi"*. Tale prospettiva sembra molto promettente per affrontare uno dei nodi più importanti nel campo concettuale dell'algebra: *la trasposizione in termini di rappresentazione dal linguaggio naturale nel quale sono formulati o descritti i problemi a quello algebrico-formale in cui si traducono le relazioni che essi contengono e successivamente la loro soluzione.*

Bibliografia

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini C., *L'algebra come strumento di pensiero,* Progetto Strategico del C.N.R., Quaderno n°6, 1994.

Cornoldi C., *Metacognizione e apprendimento*, Il Mulino, Bologna, 1995.

Hewitt D., Approaching arithmetic algebrically, *MT,* 163, 1998, 19-29.

Iaderosa R., *Aspetti sintattici, relazionali e strutturali dell'algebra: problemi posti dal loro insegnamento,* documento presentato al Seminario Nazionale di ricerca in didattica della matematica, Pisa, 1997.

Linchevski L., Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra, Journal of mathematical behaviours, N.14, 1995, 113-120.

Mac Gregor M., Stacey K., Metalinguistic awareness and algebra learning, *Proc. Of PME XVIII,* Lisbona, 1994, 200-207.

Malara N., Il pensiero algebrico: come promuoverlo sin dalla scuola dell'obbligo limitandone le difficoltà?, in *Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica n.8", Dalla ricerca teorica alla pratica didattica,* Pitagora Ed., Bologna, 1994, 107-113.

Malara N., Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra, in Jannamorelli B. e Strizzi A. (a cura di), *Atti del 3° Seminario Internazionale in Didattica della Matematica,* Sulmona, 1997, 9-22.

Navarra G., Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico: osservazione e rilevazione di difficoltà in insegnanti e allievi, in *Atti del Terzo Convegno Nazionale Internuclei scuola dell'obbligo*, Vico Equense, 1999, in corso di pubblicazione.