PERCORSI ESPLORATIVI DI AVVIO AL PENSIERO ALGEBRICO OSSERVAZIONE E RILEVAZIONE DI DIFFICOLTÀ IN INSEGNANTI E ALLIEVI

Navarra G.
GREM di Modena

We present some results on a research in progress realized with pupils aged 10-11, aimed at promoting the gradual progress from arithmetical to algebraic thinking. We mainly analyze the passage from the additive representation x+x+x *to the multiplicative one* 3x, *frequently proposed by the pupils of our sample when explore the procedural aspects of the solution of an equation.The comparison between the reflections on different ideas of the multiplicand and of the multiplier written by an experimenter teacher and the minutes of a class discussion enables to formulate some hypothesis on comprehension and on use of* 3x, 3 x x, x x 3.

1. Presentazione

In questo contributo presentiamo riflessioni e ipotesi relative alla ricerca sulla didattica dell'algebra il cui progetto è stato presentato al Seminario Nazionale di Pisa nel 1997. Avviato nel 1997/98 con 13 classi (6 quarte e 6 quinte), per l'anno scolastico 1998/99 è stato finanziato come Progetto Complesso per la sperimentazione dell'autonomia scolastica (Legge 440/97) e interessa classi di scuola elementare (2 quarte, 8 quinte) e media inferiore (8 prime) delle provincie di Belluno, Cesano Boscone (MI), Maranello (MO). Le linee guida sul piano teorico e le attività didattiche del progetto hanno come riferimento la metodologia e i lavori del GREM; Nicolina Malara è il referente scientifico e Loredana Gherpelli e Rosa Iaderosa partecipano in veste di ricercatori/aggiornatori.

2. Inquadramento teorico della ricerca

La letteratura internazionale nel campo delle ricerche sull'apprendimento dell'algebra evidenzia la diffusione della crisi dell'insegnamento tradizionale di questa disciplina. Numerosi fra gli studi più recenti tendono a collocare i principali ostacoli cognitivi in campo pre-algebrico, evidenziando come molti di essi nascano in modo spesso *insospettabile* in un contesto aritmetico e si frappongano – con gravità spesso insormontabili - allo sviluppo del pensiero algebrico. In particolare provano come gli studenti manchino di appropriate strutture aritmetiche dalle quali generalizzare.

I problemi sul piano della didattica dell'algebra elementare si pongono pertanto al livello della costruzione

(a) delle conoscenze aritmetiche di base;

(b) delle conoscenze algebriche.

Al primo livello (corrispondente grossomodo alla scuola elementare e ai primi due anni della media) non si tiene sufficiente conto del passaggio all'algebra, al secondo (corrispondente tradizionalmente alla terza media) si tende a concentrare un'eccessiva attenzione sui processi di calcolo. Il risultato è che il pensiero algebrico non viene costruito *progressivamente* come strumento e oggetto di pensiero *parallelamente* all’aritmetica ma *successivamente* ad essa, e viene esaltato soprattutto nei meccanismi manipolativi e negli aspetti computazionali. Di conseguenza, l'algebra perde alcune delle sue caratteristiche essenziali: da un lato di linguaggio adatto a descrivere la realtà e dall'altro di potente strumento di ragionamento e di previsione attraverso la *messa in formula* di conoscenze (o di ipotesi) sui fenomeni (nel nostro caso elementari) e la *derivazione di nuove conoscenze* (mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico) sui fenomeni stessi.

Come conseguenza di quanto abbiamo detto si sta consolidando l'ipotesi non solo che siano necessarie modifiche profonde nello studio dell'algebra al livello di età corrispondente a quello degli alunni della nostra scuola media inferiore ma che sia anche opportuno - e possibile - *anticipare alla scuola elementare l'approccio a tali problemi*, cominciando dall'individuazione delle *concezioni didattiche più produttive per favorire negli alunni il graduale passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico.*

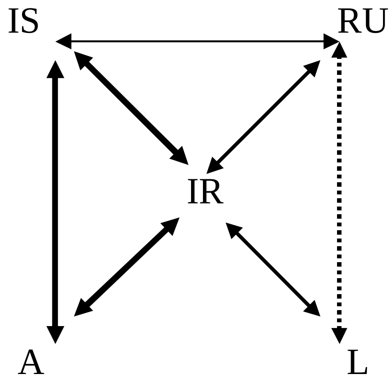
È sulla base di questi presupposti teorici che il progetto si sviluppa secondo questa progressione (la diversità di grigio si riferisce al livello del coinvolgimento alto-medio-basso)[1]:

	elementari					medie		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1997/98								
1998/99								
99/2000								
2000/01								

3. L’influenza dell’ambiente sulla ricerca

Lo sviluppo della ricerca non può prescindere da ciò che avviene durante il suo svolgimento. Rappresentiamo la situazione con un modello evidenziando con tre diverse grafie le relazioni fra i protagonisti. L’insegnante ricercatore (IR) gioca un ruolo di mediazione fra il ricercatore universitario (RU), gli insegnanti sperimentatori (IS), gli alunni (A). Sullo sfondo, la letteratura specialistica sull’argomento (L) (il legame RU-L è implicito). Il legame diretto RU-IS è molto debole.

[1] Le attività sperimentali con gli alunni del primo ciclo si potrebbero definire, secondo la nostra impostazione di approccio all’algebra come linguaggio, di *balbettio algebrico*. Un’altra metafora che si potrebbe usare per spiegare la metodologia di fondo del progetto è quella dell’*esplorazione/colonizzazione*: nei primi due anni abbiamo privilegiato gli atteggiamenti dell’*esploratore*; nei prossimi due affiancheremo ad esso il *colono*. La prosecuzione della ricerca dovrà mediare fra questi due ruoli allo scopo di consolidare gli insediamenti esistenti e di ampliare i loro territori. Il GREM svolgerà il ruolo di *geografo*.



I ruoli di A, IS, IR e le loro personali epistemologie condizionano le relazioni e le direzioni nelle quali si muove e si muoverà la ricerca. L'abito mentale e la formazione scolastica (e universitaria) non matematica di IS si riflettono sulle sue convinzioni in campo matematico e condizionano la sua didattica; il tema "algebra" è molto sentito e induce un processo di rivisitazione delle sue conoscenze in questo campo e dei metodi seguiti nell'insegnamento dell'aritmetica. IR si colloca - per la natura della sua professione - in entrambi i territori della ricerca e della pratica didattica e risente di elementi (anche) di *conflittualità* fra i due ruoli. Per molti aspetti occupa una posizione privilegiata: essere impegnato in attività di ricerca e di didattica innovativa in classi non proprie rappresenta un osservatorio prezioso grazie soprattutto a tre aspetti interrelati fra loro:

- IR costituisce un importante *elemento propulsivo* per A (la novità, la presenza del 'professore', fare cose 'importanti, ecc);
- è un incentivo alla riflessione e all'approfondimento disciplinare per gli IS,
- può condurre una ricerca a tempi lunghi su una grande varietà di osservazioni dirette, analisi di protocolli, ecc.

Le situazioni che IR promuove nelle classi fanno emergere, soprattutto attraverso l'analisi dei protocolli degli alunni e delle discussioni, nodi importanti dell'intreccio aritmetica/algebra e permettono di focalizzare un aspetto molto importante: è possibile avviare una didattica innovativa solo se non si innescano negli insegnanti dei processi di autentica rilettura delle loro concezioni in campo matematico, al livello non solo dei convincimenti radicati ai tempi della prima formazione scolastica, ma - ancora più importante – della capacità di esplicitarli (come fa con grande lucidità l'IS soggetto di questa comunicazione). Lo stesso discorso vale, naturalmente, per il rapporto IR-RU

L'insegnante dell'area logico matematica della scuola dell'obbligo è molto raramente di formazione matematica; in particolare quello della scuola elementare deve trovare il modo di innestare nuove conoscenze matematiche nella sua formazione culturale di tipo *umanistico*.

Le strade per costruire questo *innesto* sono difficili e controverse e raramente hanno l'occasione di venire alla luce. Nel corso di questa attività le carenze di concettualizzazione nella formazione matematica degli IS hanno invece l'occasione di manifestarsi e di essere sottoposte allo sforzo della riflessione critica. In questo senso, l'attività di collaborazione in classe IS-IR favorisce due aspetti: il confronto 'a caldo' di fronte all'emergere di strategie, abitudini, atteggiamenti gergali, convincimenti, stereotipi, intuizioni, misconcetti, ecc. e le successive sistemazioni, le analisi fini, gli approfondimenti sviluppati anche all'interno del rapporto IR-RU[2].

Questo permette di sviluppare l'attività su tre livelli distinti ma concomitanti (<u>ricerca</u> – <u>sperimentazione</u> – <u>formazione</u>) e di confrontare questioni fortemente intrecciate fra concezioni personali e metodologie didattiche; quest'ultimo punto sarà l'oggetto dei prossimi paragrafi.

4. Riflessioni a confronto

4.1 Si analizzano ragionamenti e difficoltà degli alunni di una quinta in occasione di una discussione concernente il ruolo delle lettere in **a x 6 = 54** e in **a x b = 12**;

4.2 si presentano le riflessioni elaborate da un IS attorno alla formazione di concetti e misconcetti concernenti la moltiplicazione[3];

4.3 si propongono delle ipotesi conclusive ottenute confrontando **4.1** e **4.2**.

4.1 Discussione sul ruolo delle lettere

Nella quinta elementare di Nemeggio (19 alunni, secondo anno di partecipazione al progetto) stiamo svolgendo attività di traduzione dal linguaggio naturale a quello algebrico. Dobbiamo inviare a *Brioshi*[4] dei messaggi che traducano in modo comprensibile i problemi della serie 'Indovina il numero misterioso'. Gli alunni stanno lavorando a questa consegna:

Trova il numero n che moltiplicato per 6 dà 54.

Elaborano le seguenti scritture:

n · 6 = 54	54 : 6 = n	6 · n = 54	54 : n = 6	n6 = 54
6n = 54	n x 6 = 54	N x 6 = 54	54 = a x 6	

Si noti che compaiono le tre rappresentazioni corrette 'classiche' per il prodotto fra n e 6: <u>n x 6</u>, <u>6 x n</u>, <u>6n</u>. Come abbiamo constatato in nelle altre classi di scuola elementare partecipanti al progetto, sono scritture proposte spontaneamente (alcune,

---

[2] Accenniamo soltanto in questa sede alla limitata partecipazione diretta da parte dei RU ad attività di ricerca e/o di didattica sperimentale nelle classi. Esistono su tale argomento posizioni diverse; è convinzione di chi scrive che un contatto <u>diretto</u> e <u>non episodico</u> con l'ambiente-classe, opportunamente gestito, comporti notevoli vantaggi per i ricercatori. Le posizioni su tale questione, che fanno riferimento a concezioni differenti sugli obiettivi primari della ricerca e sul ruolo dei RU e degli IS, dovrebbero essere poste a confronto di più di quanto sia stato fatto sinora da parte dei ricercatori sull'educazione matematica in Italia.

[3] Il testo è stato scritto da Cosetta Vedana, docente di scuola elementare a Bribano (Belluno), dal 1997 insegnante sperimentatore nell'attività di ricerca del GREM sulla didattica dell'algebra. Approfitto di questa nota per ingraziare anche tutti gli altri insegnanti componenti il gruppo di lavoro che partecipa al progetto e in particolare i colleghi di scuola elementare con i quali la collaborazione è iniziata nel 1995.

[4] Brioshi è il nome dell'alunno giapponese virtuale al quale si inviano 'messaggi matematici'. Siccome Brioshi non sa una parola d'italiano ma conosce il linguaggio algebrico bisogna tradurre ogni volta problemi, giochi, affermazioni usando solo vocaboli, grammatica e sintassi di quel linguaggio. Non sono ammessi gerghi interni alla classe, paroline apparentemente innocenti come 3/4 *di* …, storpiature linguistiche di comodo, ecc. Per il momento Brioshi è virtuale ma si vorrebbe trasformarlo in un prossimo futuro in un'entità reale (non necessariamente giapponese, naturalmente).

come diremo, preferite alle altre), accettate come interscambiabili, riconosciute e descritte come prodotto fra un numero che si conosce e uno che non si conosce anche se non compare il simbolo della moltiplicazione come in **6n**).

Terminata la discussione, la consegna successiva è:

Trova due numeri che moltiplicati assieme diano come risultato 12.

Dopo momenti di maggiore perplessità otteniamo queste scritture:

2F = 12	A x B = 12	C · C = 12	2A · 2 = 12	b · 2 = 12
C + C = 12	4· 3; 6· 2; 2· 6	b · f = 12	3 · 4 = 12	

(a differenza del caso precedente non compare una scrittura senza segno del tipo ab).
Decidiamo di verificare se gli alunni riescono <u>a capire (almeno intuire) la differenza fra il numero "nascosto" nella scrittura **a x 6 = 54** e quelli 'nascosti' in **a x b = 12**</u>.

Verbale della discussione
(*I = insegnante*; A = intervento di un alunno; S = sunto di più interventi)

I: La lettera a è usata allo stesso modo?
A_1: Nel primo caso a **è ripetuto** 6 volte, nel secondo a **ripete** b.
I: Hanno lo stesso valore?
S_1: Siccome i risultati sono diversi allora il valore è diverso.
I: Ci sono differenze nell'uso di a?
S_2: Nella prima a è moltiplicato **per 6 volte**, nella seconda è moltiplicato **per un numero sconosciuto**.
A_2: Nel primo caso si sa già il valore di 'a'. Si può calcolare <u>precisamente</u> il risultato.
A_3: Nel primo caso a può avere lo stesso significato di a nella seconda, ma anche no.
S_3: Nella sec. ho due valori sconosciuti, nella prima conosco il valore di una quantità.
A_4: Se eseguo il calcolo, nella prima il valore di a non può cambiare.
I: Cosa vuol dire Lucia (A_3) con 'Ma anche no?'
S_4: a può avere anche altri valori.
I: Quindi?
S_5: Può variare di valore.
I: Cioè?
A_5: Può avere tanti o diversi valori. Nel primo caso a è per forza 9 e solo 9. Nel secondo può variare di valore.
I: Trovate i valori di a.
[I calcoli portano ad individuare in modo disordinato i valori di a: 4, 3, 6, 2, 12, 1]
I: Da cosa dipende il valore di a?
S_6: Nel primo caso dal risultato, nel secondo dal valore di b.
S_7: Nel secondo caso non ci sono numeri che ti aiutano. Ce n'è solo uno: quello finale. <u>Non sai precisament</u>e i numeri con la lettera.

Ci sono molti passaggi interessanti[5]:; qui ci soffermiamo solo S_2: "Nella prima a è moltiplicato **per 6 volte**, nella seconda è moltiplicato **per un numero sconosciuto**". Gli alunni vedono in modi diversi il secondo fattore; nel primo caso (a x 6) parlano di "per 6 volte", nel secondo (a x b) di "per un numero sconosciuto". Nel prossimo paragrafo ci concentreremo su temi attinenti anche questa diversità di interpretazione.

4.2 Sintesi della riflessione scritta dall'insegnante[6]

Antefatto: nel corso dell'esperienza con la bilancia gli alunni costruiscono le loro prime equazioni[7]. Accade molto presto che essi debbano rappresentare una situazione nella quale su uno dei piatti ci sono più oggetti uguali di peso sconosciuto. La rappresentazione subisce una progressiva evoluzione nel tempo man mano che si evolvono le competenze. Ad esempio:

(a) prima rappresentazione ('insieme di oggetti') **x x x = ;**

$\Downarrow$

(b) rappresentazione additiva **x + x + x**

$\Downarrow$

(c) rappresentazione moltiplicativa **3x**

I passaggi sono 'conquista' comune (all'apparenza indolore) a quasi tutti gli alunni.

In quello successivo, però (rappresentazione della divisione per 3), (b) e (c) conducono a due diversi ordini di difficoltà. Se gli alunni adottano la scrittura 3x, in genere passano senza eccessive difficoltà alla rappresentazione 3x : 3; se adottano invece quella additiva (x + x + x) – per lo meno in uno stadio iniziale dell'attività - la rappresentazione crea maggiori difficoltà perché comporta l'inserimento della parentesi (x + x + x) : 3. 3x è accettata quindi come una scrittura "buona", in grado di promuovere comportamenti virtuosi.

È sul merito del passaggio da x + x + x a 3x che la riflessione dell'insegnante appare molto significativa, e la chiarezza con la quale viene organizzata aiuta a produrre delle ipotesi ai fini della nostra ricerca.

---

[5] Vogliamo attirare *en passant* l'attenzione sulla sequenza S_1-A_2-A_4-S_4-S_5-A_5: essa evidenzia molto chiaramente come stiano emergendo *in nuce* i concetti di incognita e di variabile. Di questo aspetto non ci occuperemo nell' articolo.

[6] In questo paragrafo porremo dentro riquadri il testo dell'insegnante; scriveremo il resto in corsivo.

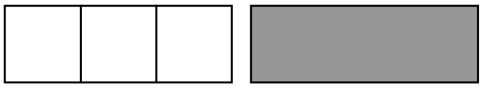
[7] Parte del nostro progetto utilizza il noto schema della bilancia a piatti come metafora dell'equivalenza algebrica fra i due termini di un'equazione e come supporto per una rappresentazione simbolica che possa creare i fondamenti semantici per l'introduzione del formalismo algebrico. Collegandoci in particolare alle ricerche condotte su questo tema da Falcão, analizziamo le modalità secondo le quali gli alunni passano dall'esperienza concreta e, successivamente, dal linguaggio naturale nel quale sono espressi i problemi, al linguaggio algebrico-formale attraverso la negoziazione del contratto didattico "*Prima rappresenta, poi* riso*lvi*". In questo senso attribuiamo grande importanza alla *costruzione collettiva delle conoscenze*, in particolare del concetto di equazione come punto di arrivo di un percorso centrato su schematizzazioni successive di rappresentazioni di situazioni relative all'uso della bilancia.

.

Ci sono scritture di numeri che la relazione di uguaglianza indica come aventi lo stesso valore, ma che non corrispondono ad immagini mentali dello stesso valore, ad es.:

$$1 + 1 + 1 = 3 \times 1 \quad \text{o} \quad 1 \times 3?$$

In prima elementare con i regoli di Gattegno si ha questo modello:

1×3  3×1

Da cui: $1 \times 3 = 3 \times 1$ (i bambini direbbero: *"perché sono lunghi uguali")*

La lettura è:
1×3 **uno per tre**:uno per tre volte, uno ripetuto tre volte, uno preso tre volte, …
3×1 **tre per uno**:tre per una volta, tre ripetuto una volta, tre preso una volta, …

Il **primo** numero di ogni coppia ($\underline{\mathbf{1}} \times 3$; $\underline{\mathbf{3}} \times 1$) è la **cosa concreta**, **esistente**; ciò che i sensi percepiscono. Il **secondo** numero ($1 \times \underline{\mathbf{3}}$; $3 \times \underline{\mathbf{1}}$) è **le volte** che la cosa concreta è ripetuta. "Le volte" è una ripetizione, non è una *cosa concreta*. La *ripetizione* ha in sé un significato *temporale* (e *spaziale*) e può essere espressa solo da un numero al quale non corrisponde *nulla di concreto.*
Nella scrittura

$$1 + 1 + 1 = 1 \times 3$$

1 è il protagonista, lo si vede, lo si *tocca,…* La realtà sensoriale è l'UNO, e **non** il TRE. L'accento è posto sull'**1** e i numeri sono **tre**.
Invece nella scrittura

$$3 = 3 \times 1$$

3 è il protagonista, è la realtà sensoriale. Il secondo numero possiede la *vera* natura del numero, che è temporale, perciò <u>astratta</u>.

Moltiplicando e moltiplicatore hanno in sostanza diversa "consistenza": il primo appare come <u>concreto</u> (il regolo) il secondo come <u>astratto</u> (il numero delle volte che – nello spazio, nel tempo - si ripete il regolo).

A questo punto l'insegnante prende in considerazione una scrittura algebrica e continua il suo ragionamento.

$$x + x + x = x \times 3$$

è una scrittura chiara: l'accento viene posto sull'**x**. Un numero che non si conosce (ma "esiste") moltiplicato per 3 volte.
In **questa** scrittura invece:

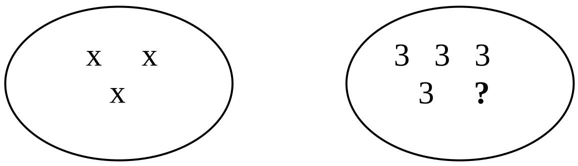
$$x + x + x = 3 \times x$$

analogamente a quanto accade per 1 + 1 + 1 = 3 × 1, l'accento viene posto sul **3**. Ma…**3 per quale** numero? Non riesco a "vedere" in "x" le volte come in 3 × 2 invece "vedo" due regoli lunghi 3 e non 3 regoli lunghi 2.
Il modello (acquisito con esempi concreti nelle prime classi della scuola elementare) non mi porta a vedere i due termini della moltiplicazione allo stesso modo. Il secondo termine è *'volte'*, ossia **il numero di volte**; anche se so che posso applicare la proprietà commutativa, i due termini *in sé* non sono uguali. Non sono uguali dal punto di vista della proprietà "ontologiche".
Il primo è *'reale'*, il secondo è *'astratto'*.
Dopo aver imparato (**in ambiente aritmetico**) le operazioni e operato come se i numeri fossero uguali – entrambi *astratti* –, quando si trovano le **lettere** si cerca di nuovo il **concreto** o, meglio, l'**immagine** che aiuti a dare un'**identità** alla lettera e si ritorna a sentire i due numeri come diversi nella loro **natura**.

La mancanza del distacco dal sussidio concreto implica le carenze nella concettualizzazione; la "pari dignità" fra moltiplicando e moltiplicatore non viene interiorizzata come modello astratto e, di fronte alle lettere, scatta il bisogno di ricorrere alla medesima strategia (un 'concreto' che possa aiutare a trovare un significato) per dare un senso a questo nuovo ente, solo che questa volta il riferimento non aiuta. Si precisa in modo molto nitido il collegamento con quanto esposto dagli alunni in S_2. Il 3 come "numero delle volte" è un dato percettivamente stabile, x invece è fluido, non precisabile. 3 e x sono sia per l'insegnante che per gli alunni cose diverse.

Vedere entrambi i termini come **astratti** non è ancora *naturale*; i numeri corrispondono a **cose**, significano **cose**.
x × 3 = 3 × x è la traduzione verbale di due esperienze **concrete** differenti.

x × 3 3 × x



Nel primo caso l'insieme è *sicuro*, nel secondo *manca qualcosa*, e non so (più) come fare per *trovarla*. Quello che mi spaventa è di non sapere **quante volte** viene preso il 3; le soluzioni sembrano infinite, e non si vede **la** situazione *reale*, ma solo delle *possibilità* di situazioni.
In x + x + x = 3x vedo bene la situazione, ma il 3 non è più il numero che rappresenta una relazione, ma **l'aggettivo numerale** di x. La lettera non è più vista come numero, ma come **nome**: il nome della cosa concreta di cui stiamo parlando e che io cerco di immaginare. Non c'è nessuna operazione, è una situazione "immobile" (3 mele…), mentre in 3 × x la moltiplicazione mi porta alla *temporalità.*
D'altro canto, se è *naturale* leggere 3x come "tre mele", cosa vorrebbe dire 3 × x: "tre *per* mele"? Ma il secondo numero non voleva dire "volte"?

In 3x la lettera vista come **nome** mi permette di non leggerla come 'volte' e di lasciarla a destra.
Il pensare il numero come **aggettiv**o vale solo al primo posto dell'operazione perché al secondo posto c'è il "numero delle volte".

Le riflessioni proseguono, ma per ora ci fermiamo qui e proponiamo una serie di conclusioni e di ipotesi che dovremo sottoporre a verifica nel prosieguo della ricerca.

4.3 Conclusioni

(1) Ricapitoliamo lo stato di fatto:

(a) gli alunni rappresentano le quantità uguali sconosciute presenti su un piatto della bilancia. In un prima fase possono usare qualsiasi simbolo grafico, in una seconda vengono stimolati all'uso delle sole lettere. In genere non inseriscono i segni dell'addizione; è più una rappresentazione di oggetti che di numeri esprimenti quantità legate agli oggetti.

x x x

(b) Con varie strategie gli alunni vengono resi consapevoli che le lettere stanno al posto di numeri sconosciuti e che si tratta in realtà della rappresentazione di una somma. La nuova scrittura viene compresa con discreta e generalizzata sicurezza.

x + x + x

(c) Gli alunni in genere propongono il passaggio alla scrittura moltiplicativa 3x; secondo l'ipotesi suggerita dall'IS, potrebbe essere una regressione, con perdita della valenza matematica della scrittura. Pur mostrando di sapere che in 3x "c'è nascosto un per", in realtà vedrebbero in x degli *oggetti* (come in 'tre mele') e in 3 un *aggettivo numerale*. Potrebbe essere una misconcezione legata alla rappresentazione insiemistica usata nel primo ciclo della scuola elementare. Un IS osserva che "intravvedere" in 3x 'tre pulcini' bloccherebbe la comprensione che si tratta della scrittura convenzionale di un numero perché 'tre pulcini' non è "leggibile" come 'tre per pulcini'.

x + x + x
⇓
3x

(2) Le ipotesi

(a) È opportuno favorire il passaggio alla scrittura **x × 3** che, pur ponendo difficoltà successive sul piano procedurale (che vedremo fra poco) e pur non essendo adottato spontaneamente dagli alunni, dovrebbe essere logicamente più coerente con la loro epistemologia matematica (per le ragioni esposte da IS).

$$\mathbf{x + x + x} \\ \Downarrow \\ \mathbf{x \times 3}$$

(b) Nella scrittura **x × 3** (indotta) gli alunni "vedono" l'equivalenza con la scrittura **3x** (spontanea) perché entrambe fanno riferimento a modelli familiari, anche se posseduti con scarsa consapevolezza (ricordiamo quelli ai quali fa riferimento IS nelle sue riflessioni: i Regoli colore e la rappresentazione insiemistica).

$$\mathbf{x \times 3 = 3x}$$

(c) Ad un livello più avanzato si ritiene acquisita la proprietà commutativa a livello aritmetico, ma in realtà gli alunni non vedono l'equivalenza fra **3 × x** e **x × 3** a causa del diverso status ontologico dei due fattori (la proprietà commutativa è evaporata).

$$\mathbf{3 \times x \neq x \times 3}$$

Se l'ipotesi (a) venisse confermata, si ridimensionerebbe l'importanza che abbiamo attribuito sinora al passaggio spontaneo dalla scrittura additiva **x + x + x** alla moltiplicativa **3x**.

Acquisterebbe importanza suggerire il passaggio **x × 3** (sinora trascurato per le difficoltà che comporta nei passaggi successivi) recuperando il modello aritmetico di cui parla l'insegnante nelle sue riflessioni **(1 + 1 + 1 = 1 × 3)** e "conquistare" quindi:

- l'**equivalenza** fra le scritture **3 × x** e **x × 3**, di conseguenza
- **l'operazione** di moltiplicazione (che rimane *nascosta* in **3x** se il significato del numero è *aggettivale),* e
- la proprietà **commutativa**.

Va sottolineato che il buon esito di queste conquiste a livello algebrico si appoggia in ogni caso sulla solidità della comprensione della moltiplicazione a livello aritmetico, che è favorita a sua volta dalla pluralità dei modelli associati a tale operazione utilizzati dagli insegnanti.

(3) Le difficoltà

Oltre che nella comprensione delle tre scritture in sé (**3x**, **3 × x**, **x × 3**), un ulteriore ostacolo è presentato dal passaggio successivo, che comporta la divisione per 3.

• **3x : 3** conduce di frequente a soluzioni del tipo: 1 (risultato di 3 : 3) e 0 (risultato di 3 - 3). Se si evidenzia la presenza nascosta del segno × la decodifica della scrittura si complica ulteriormente: **3 × x : 3**. Se l'esperienza mostra che il ricorso all’aritmetica e all’analogia con una scrittura del tipo **3 x 5 : 3 = 15 : 3 = 5** favorisce l’intuizione che **3 x x : 3 = x**, l’esperienza mostra altrettanto chiaramente che si tratta di un’intuizione *locale* e che di fatto gli alunni rimangono – nonostante le apparenze – al di qua dell’ostacolo. Le cose si complicano però nuovamente se gli alunni si trovano di fronte ad una scrittura che traduce una situazione del tipo “la somma fra un numero sconosciuto e il suo triplo”. In questo caso l’esperienza mostra che la scrittura **3x + x = 4x** è di gran lunga la più proposta dagli alunni sia delle quinte elementari che delle prime medie ma non bisogna dimenticare che la sua trascrittura nella forma equivalente “trasparente” (il segno **x** è posto in evidenza) **3 x x + x** è nuovamente complessa da interpretare. È vero che anche la scrittura **x x 3** si complica (**x x 3 + x**), ma in questo caso il ricorso ai modelli aritmetici sembra potente (per esempio, la sequenza 6 x $\underline{4}$ = 24   6 x $\underline{3}$ = 18   6 x $\underline{2}$ = 12   **6 x $\underline{\mathbf{1}}$ = 6** permette di comprendere che **x x $\underline{\mathbf{1}}$ = x**). Si può passare quindi alla scrittura **x x 3 + x x 1** e da essa a **x x 4** che, come abbiamo detto in (b), viene colto come equivalente a **4x**, e questa doppia lettura favorisce la comprensione di queste scritture.

• **x x 3 : 3 = x** è più comprensibile perché in questo caso – a differenza che nel precedente - è di aiuto immediato l’evidente analogia con il modello aritmetico (ad es: **12 x 3 : 3 = 12**); l’acquisizione pare più *stabile*.

In relazione a quest’ultima scrittura formuliamo un’ultima ipotesi:

(d) favorire la consapevolezza nell’uso di **x x 3** al posto di **3x** può favorire anche il passaggio verso provvisorie soluzioni naïve del prodotto fra un numero e un binomio. Ad esempio, nel gioco del numero nascosto la consegna “Pensa un numero, aggiungi 7, moltiplica per 2 e ottieni 26) può essere tradotta in **(x + 7) x 2 = 26**. Le nostre esperienze indicano due possibili svolgimenti; in entrambi si applicano il principio di cancellazione e il secondo principio di equivalenza, nel secondo si applica anche la proprietà distributiva.

(i) (x + 7) x 2 = 26
(x + 7) x 2 **: 2** = 26 **: 2**
x + 7 = 13
x + ~~7~~ = **~~7~~ + 6**
x = 6

(ii) (x + 7) x 2 = 26
x x 2 + 7 x 2 = 26
x x 2 + 14 = 26
x x 2 + ~~14~~ = **~~14~~ + 12**
x x 2 = 12
x x 2 **: 2** = 12 **: 2**
x = 6

Bibliografia

Boulton-Lewis G.M. & al., 1997, The transition from arithmetic to algebra: initial understanding of equals, operations and variable, *Proc. PME 21*, 2, 89-96.

Da Rocha Falcâo J.T., 1996, Clinical Analysis of difficulties in algebraic problem solving among brazilian students: principal aspects and didactic issues , *Proc. PME 20,* 2, 257-263.

Dias Schliemann & al., 1993, Understanding equivalences through Balance Scales, *Proc. PME 17,* 2, 298-305.

Freudenthal H., 1974, Soviet Research on Teaching Algebra, *Educ. Stud. Math.* n. 5, 391-412

Kieran K., 1992, The Learning and Teaching of School Algebra, in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, 390-419

Mac Gregor M., 1991, *Making Sense of Algebra: cognitive processes influencing comprehension,* Deakin Univ., Geelong, Victoria, Australia

Malara N., 1996, Il pensiero algebrico: come promuoverlo, *L'Educazione Matematica*, 1, 80-99

Meira L., 1996, Students' early algebraic activity: sense making and the production of meanings in Mathematics, *Proc. PME 20*, 2, 257-263.

Navarra G., 1997, Un esempio di ricaduta teorico pratica degli studi presentati in ambito PME sui problemi verbali algebrici, *documento presentato al Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*, Pisa.

Pirie S., Martin L., 1997, The equation, the whole equation and nothing but equation! One approach to the teaching of linear equations, *Educational Studies in Mathematics*, 34, 159-181.