QUADERNO n.3

A cura di Giancarlo Navarra

Attività sulla ricerca di regolarità per alunni di scuola dell'infanzia e prima elementare
Traccia di lavoro

www.aralweb.it
www.eun.org

settembre 2004

Perché la ricerca di regolarità *(v. Glossario ArAl)*

- Favorisce il passaggio alla *generalizzazione*
- insegna ad individuare la chiave di lettura algebrica di una struttura *(v. Glossario)*
- Consente di capire se gli alunni sanno affrontare con metodo e sistematicità situazioni problematiche
- Consente di capire se gli alunni sanno fare previsioni e verificarne la validità.

La ricerca di regolarità è presente in Unità ArAl già pubblicate in rete o in fase di elaborazione.

Dal punto di vista metodologico, assume grande importanza la *verbalizzazione (v. Glossario),* come *esplicitazione attraverso il linguaggio naturale di un processo compiuto*.

La verbalizzazione:
- promuove e accresce la consapevolezza delle scelte fatte
- favorisce il controllo dei significati
- stimola la revisione critica del processo *(v. Glossario)*
- rappresenta un'attività importante sul piano metacognitivo e metalinguistica.

Allo stesso tempo va sottolineato il ruolo della *Rappresentazione (v. Glossario), che costituisce una funzione esplicativa e chiarificatrice nella costruzione dei concetti.* È ormai accertato che *rappresentazioni diverse della medesima situazione favoriscono la loro interiorizzazione.*
La prima rappresentazione del mondo avviene attraverso il linguaggio *naturale*. In determinate situazioni esso però si rivela insufficiente o inadeguato, e diventa molto più potente il ricorso ad un linguaggio *simbolico*.

1. situazione

Bisogna continuare la fila.
Chi facciamo sedere?
Un maschio o una femmina?
Spiega la tua scelta.

10

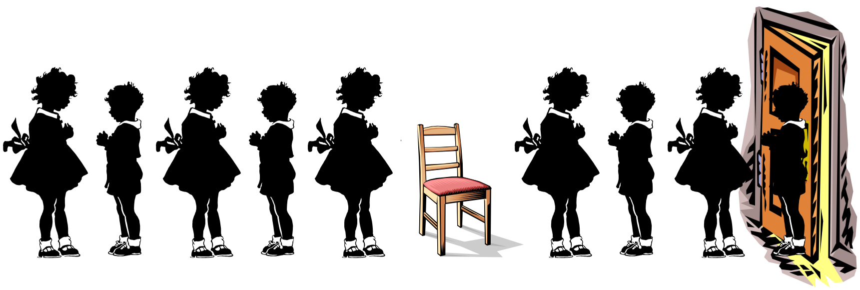
I bambini (nell'esempio dieci) – maschi e femmine alternati - si dispongono in fila. L'11° posto è vuoto (potrebbe essere una seggiola, e anche gli altri bambini potrebbero stare seduti).
Bisogna stabilire se il posto dev'essere occupato da un maschio o da una femmina.

La fila dei bambini finisce (sono solo undici). In realtà una successione è indefinita. Per suggerire l'infinitezza, la fila può essere organizzata vicino alla porta della classe. La discussione deve far capire ai bambini che la fila è come se continuasse fuori dalla porta *anche se questo non accade davvero. Bisogna immaginare che questo accada. La porta diventa quindi una metafora della 'continuazione all'infinito' (v. voce* Metafora *nel Glossario ArAl). Certamente sono necessarie più esperienze affinché questo concetto sia colto; nel momento in cui si abbia la sicurezza che questo è avvenuto, si può fare a meno della porta, accertandosi comunque – almeno nelle fasi iniziali - che l'idea* non evapori. *Il contratto didattico deve essere molto preciso in questo senso (v. voci* Contratto didattico e Collettivo/a (confronto, discussione) *nel Glossario ArAl).*

La scelta dei bambini va argomentata. Gli insegnanti devono cercare di verbalizzare per lo meno gli interventi più significativi che mettano in evidenza la percezione che gli alunni hanno della situazione e le motivazioni della scelta. La situazione è semplice in sé, ma non è semplice la descrizione del ragionamento, che dovrebbe fare riferimento fondamentalmente ad uno schema del tipo:

a) i bambini e le bambine sono alternati
b) l'ultimo prima della sedia è un bambino
c) il posto vuoto sarà occupato da una bambina.
d) Si può andare avanti indefinitamente alternando un bambino a una bambina e viceversa.

2. situazione



Metti un compagno a sedere.
Chi ci va: un maschio o una femmina?
Spiega la tua scelta

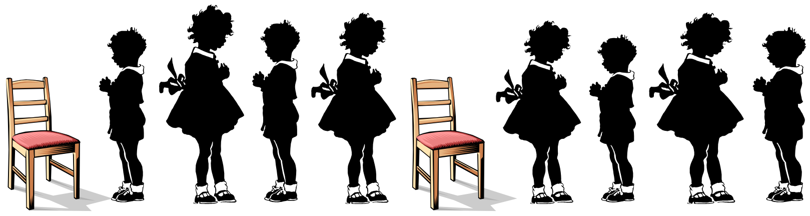
11

I bambini – maschi e femmine alternati - si dispongono in fila (la fila può continuare come nella situazione precedente un po' oltre la porta). L'6° posto è vuoto. Bisogna stabilire se esso debba essere occupato da un maschio o da una femmina.

Bisogna che gli alunni abbiano capito la domanda. In altre parole, che abbiano capito la 'logica' della situazione (chiarezza del contratto didattico).
Si tratta di una situazione di rinforzo–verifica rispetto a quella precedente e non dovrebbero esserci difficoltà maggiori.
La linea formata dai bambini può anche essere curva, o 'a biscia', insomma avere un andamento qualsiasi in modo che non si induca lo stereotipo della rettilineità.
La scelta va argomentata. Il ragionamento dovrebbe essere più o meno:

a) *i bambini e le bambine sono alternati*
b) *prima della sedia vuota c'è una bambina*
c) *il posto vuoto sarà occupato da un bambino.*
d) *Si procede indefinitamente*

3. situazione



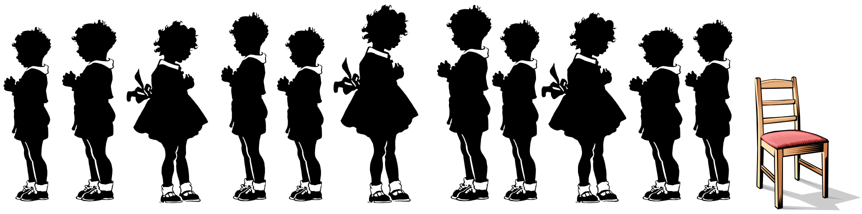
Chi facciamo sedere sulle due seggiole?
Spiega la tua scelta.

12

I bambini – maschi e femmine alternati - si dispongono in fila (se necessario la fila può continuare un po' oltre la porta). Sono vuote la prima e la quinta sedia. Bisogna stabilire chi occupa i due posti.

La situazione è analoga alle precedenti, ma questa volta al 1° posto c'è una femmina e al 5° un maschio.
La scelta va come il solito argomentata. Non bisogna accontentarsi della risposta (Un maschio! Una femmina!) perché in questo modo si pone l'accento sulla conclusione del ragionamento e non sul ragionamento. Bisogna richiedere la spiegazione, ossia l'illustrazione del processo *mentale che ha condotto alla risposta.*
(v. voce Processo/Prodotto *nel Glossario ArAl).*
Se si fanno più esperienze di seguito oppure se ne improvvisano alcune per rinforzare la comprensione, è opportuno variare la disposizione delle sedie in modo che i bambini comincino a cogliere l'equivalenza topologica delle disposizioni. Si può per esempio costruire una spirale che inizi al centro e si sviluppi indefinitamente. Anche i disegni possono rispecchiare questa varietà; ogni bambino può inventare un suo modo per rappresentare la situazione. Naturalmente tutti devono rispettare la medesima sequenza.

4. situazione



Chi facciamo sedere sulla seggiola?
Spiega la tua scelta.

13

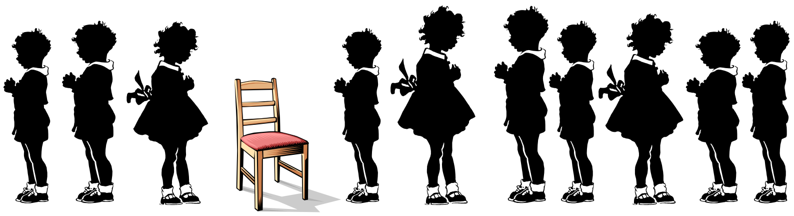
I bambini non sono disposti più con maschi e femmine alternati. La disposizione è più varia; la fila è costruita sul modulo 'due maschi una femmina'

M M F M M F M M F M M …

È vuota la 12^a sedia. Bisogna stabilire chi la occupa.

La situazione è più complessa. All'inizio forse ci sarà un po' di confusione perché i bambini daranno una risposta pensando alle situazioni precedenti oppure risponderanno a caso. Verranno invitati come sempre ad argomentare le risposte.
Forse si può cominciare a fare a meno della porta come metafora dell''allungarsi come si vuole' (accertarsi che comunque il concetto sia acquisito). Certamente le cose saranno diverse a seconda che si tratti dei bambini della scuola materna o di quelli della prima elementare.

5. situazione



Chi facciamo sedere sulla seggiola?
Spiega la tua scelta.

14

La fila è costruita, come la precedente, sulla sequenza

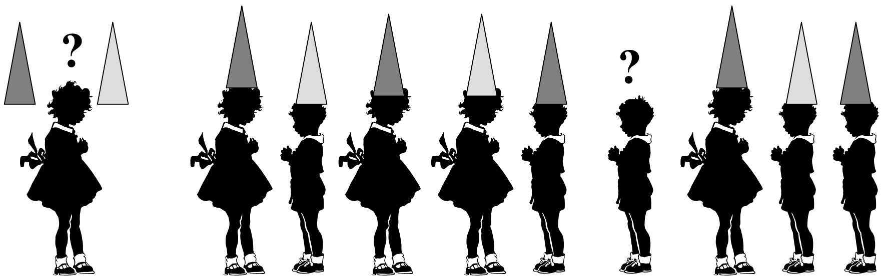
M M F M M F M M F M M …

La 4ª sedia è vuota. Bisogna stabilire chi la occupa: una maschio o una femmina?

La successione è analoga alla precedente ma è più complessa. Prima il posto vuoto si trovava alla fine del modulo MMF e coincideva, esprimendosi in termini musicali, con l'ultimo tempo *della battuta ternaria. Ora invece la sedia si trova al* secondo *tempo della battuta e questo, forse, impedisce di cogliere percettivamente il 'ritmo' della sequenza.*
Come sempre gli alunni argomentano le risposte.

IL GIOCO DEI CAPPELLI (O DELLE BANDIERINE)

6. situazione



Un bambino osserva gli altri.
Deve scoprire il colore del cappello di quello che ne è privo cercando di spiegare la sua scelta
C'è una 'regola'? Quale?

16

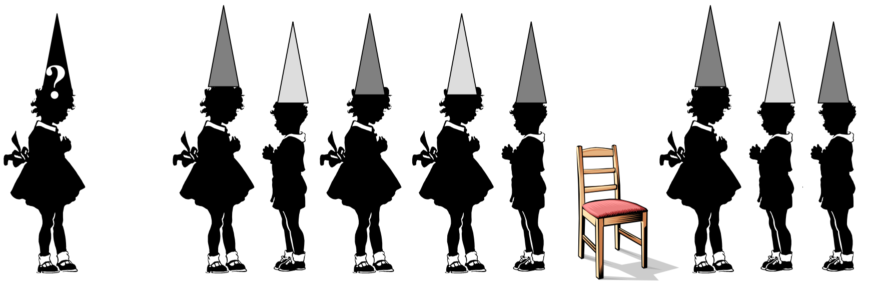
Si mettono uno accanto all'altro dei bambini, mescolati casualmente maschi e femmine.
Ogni bambino indossa un cappello verde (grigio scuro) o rosso (grigio chiaro). I colori sono alternati. La successione è quindi

V R V R V R V R …

Un bambino – per esempio il 6° - è senza cappello.
Un osservatore (o il gruppo) deve scegliere fra due cappelli posati su un tavolo quale porre in testa al compagno.

L'attività è diversa dalle precedenti.
C'è il probabile distrattore rappresentato dal sesso; l'osservatore potrebbe lasciarsi infatti ingannare dal fatto che – per esempio in questo caso – le femmine sembrano abbinate al cappello verde e i maschi al rosso.
Una volta superato questo equivoco iniziale, la situazione non dovrebbe creare troppi problemi.
Bisogna sempre verbalizzare l'argomentazione.

7. situazione



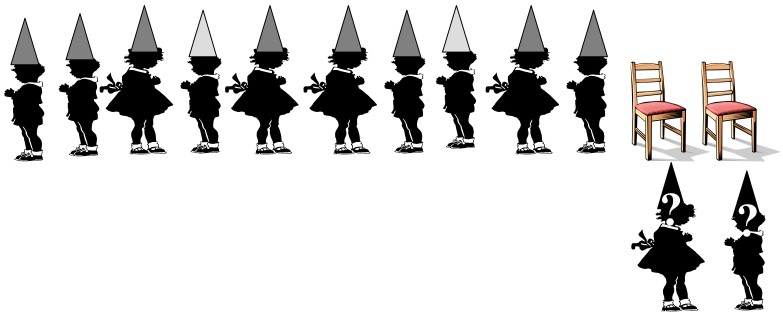
Un bambino osserva gli altri.
Deve scoprire il colore del suo cappello cercando di spiegare la sua scelta.
C'è una 'regola'? Quale?

17

Una variante del gioco precedente è che l'osservatore abbia in testa un cappello ma non sappia di che colore è. Osservando il posto vuoto (quello che spetta a lui) deve scoprirlo.

I compagni devono rispettare l'osservatore e non suggerire.
Bisogna sempre verbalizzare l'argomentazione.

8. situazione



Due bambini osservano gli altri. Devono scoprire i colore dei loro cappelli cercando di spiegare le loro scelte.

18

Nella fila sono mescolati casualmente maschi e femmine.
Ogni bambino indossa un cappello verde o rosso. La successione questa volta è

R R R V R R R V R R R V …

Il 13° e il 14° posto sono vuoti. Due osservatori – si tratta di una *coppia ordinata*, cioè entrambi sanno chi deve occupare la sedia di sinistra e chi quella di destra - hanno il compito di capire di che colore sono i loro cappelli.
Per non creare delle interferenze fra le loro argomentazioni, si può mettersi d'accordo con i due osservatori che, appena uno ha un'idea, la va a spiegare sottovoce all'insegnante, che verbalizza l'argomentazione. Lo stesso vale per il secondo osservatore.
Se i due non risolvono il problema, l'argomentazione può diventare collettiva, oppure altri due osservatori possono prendere il posto dei primi (o di uno solo, a seconda dei casi).
Se i bambini mostrano un buon coinvolgimento, l'insegnante può inventarsi altre situazioni, o farsele suggerire dagli stessi alunni.
Si possono anche formare due squadre, e ognuna inventa una successione per l'altra.

Il gioco si arricchisce. I bambini da fruitori di successioni diventano proponenti. Se risulta troppo complicato fare tanti cappelli, si possono preparare delle bandierine.
Ognuno dei due bambini ha il posto assegnato. Non possono scambiarsi.
Si può aprire a questo punto, ma forse si può fare ancora prima, la fase della rappresentazione. *I bambini devono fare dei disegni delle situazioni. All'inizio i disegni saranno molto realistici; si cercherà man mano che l'attività prosegue di arrivare a delle rappresentazioni sempre più astratte. Per ora i bambini possono fare i disegni come preferiscono.*
(v. voce Rappresentazione *nel Glossario ArAl).*

9. situazione

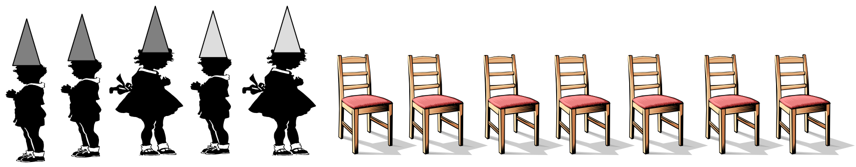
La situazione è analoga alla precedente; maschi e femmine sono mescolati.
Ogni bambino indossa un cappello verde o rosso. La successione questa volta è

R R R V R R R V R R R V …

Il 13° e il 14° posto sono vuoti. Due osservatori (coppia ordinata) devono capire di che colore sono i loro cappelli.
Le modalità sono le stesse della situazione 7.

La situazione potrebbe essere più complessa perché il 'ritmo' è interrotto (vedi commento alla situazione 5).
A seconda delle situazioni create, può accadere che le bandierine dei due bambini abbiano o meno lo stesso colore. Si potrà far notare, con gli alunni più grandi, che nel primo caso non ha importanza l'ordine in cui essi si siedono, nel secondo (cioè se i colori sono diversi), sì.

10.situazione



Come continuare?
Bisogna cercare di spiegare le scelte (una 'regola')

20

Alcuni bambini indossano dei cappelli di due colori diversi, per esempio nella sequenza:

R R R V V …

Dopo di loro ci sono molte sedie vuote.
Il gruppo deve studiare come continuare la successione.

*Si apre con questa situazione un passaggio molto importante e piuttosto delicato anche con alunni più grandi: poco alla volta la successione non deve essere più vista come un'*alternanza *di maschi e femmine, o di cappelli colorati, ma come* ripetizione di un modulo. I*n questo caso il modulo è RRRV, ma potrebbe essere ancora diverso, perché qualcuno potrebbe interpretare RRRV semplicemente la parte 'visibile' di un modulo più complesso – per esempio RRRVR o RRRVV – e continuare in questo senso. Sarà interessante vedere se i bambini scoprono o meno questa possibilità. In ogni caso però dovranno rispettare la regola che si sono inventati. Molti probabilmente penseranno invece che il modulo è lì pronto davanti a loro, e non si deve fare altro che ripeterlo. Ma questo è tutto da verificare.*
L'individuazione del modulo *è molto importante perché avvicina alla comprensione dello* schema soggiacente ad una struttura. *Lo sviluppo nel tempo di questo concetto conduce a scoprire la chiave per la* lettura algebrica di una struttura.
(v. voce Regolarità *nel Glossario ArAl).*

IL GIOCO DEI GETTONI

11.situazione

Il gioco rappresenta un momento di verifica.
I bambini sono in fila (come il solito deve esserci un inizio); hanno sulla fronte un gettone colorato rosso o azzurro. Ognuno di loro vede quello sulla fronte degli altri ma non il proprio. Non conosce quindi il colore del suo gettone; deve scoprirlo ragionando sul modo in cui si accoppiano e si alternano i colori dei gettoni che vede attorno a sé.
La scoperta si articola su due momenti:

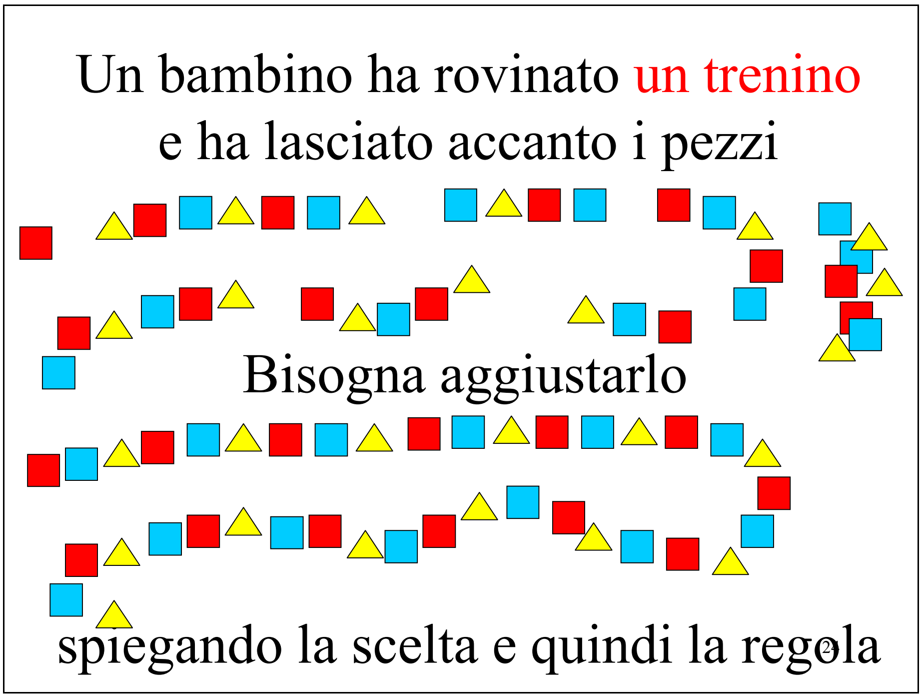
1) intuire la 'regola' e cioè il modulo che si ripete (AAARR o RRAAA o RAAAR)
2) dedurre il proprio colore.

L'insegnante deve registrare accuratamente i vari momenti della verbalizzazione collettiva, e favorire l'esplicitazione dei ragionamenti, che in questa situazione potrebbero essere particolarmente interessanti.

In questo gioco si può valutare la capacità dei bambini di analizzare sistematicamente la situazione. Se le difficoltà sembrano eccessive si può concludere questa fase aiutando i bambini a scoprire la regola e non insistendo – almeno per il momento – in questa direzione.
Va sottolineato comunque come le discussioni costituiscano dei momenti significativi per una costruzione collettiva *delle conoscenze. La riflessione ad alta voce innesca un ragionamento corale, molto importante per le sue implicazioni metacognitive e metalinguistiche.*
(v. voce Collettivo/a (confronto, discussione) *nel Glossario ArAl).*

GIOCARE CON OGGETTI

12.situazione



Prima di far entrare gli alunni nell'aula viene fatto il trenino con i materiali a disposizione della scuola. Alcuni vagoni mancano. Dei pezzi vengono lasciati sparpagliati in un mucchio accanto alle torri.
Si racconta una storia in cui per esempio un bambino dispettoso ha tolto alcuni vagoni lasciando i pezzi sparpagliati. I bambini devono ricostruire il treno.
Le possibilità sono due:

a) gli alunni spiegano i criteri della scelta dei pezzi <u>prima</u> di restaurare i vagoni;
b) gli alunni spiegano i criteri <u>dopo</u> aver restaurato i vagoni.

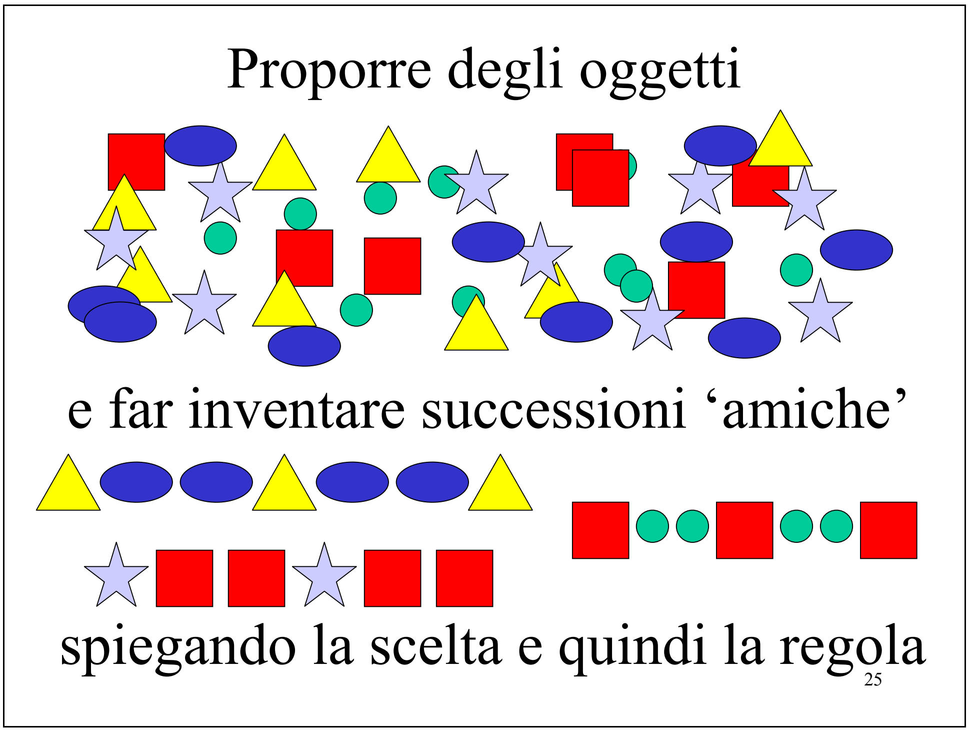
La scelta dipende dall'età degli alunni e dalle condizioni ambientali. In ogni caso va motivata.
Quello che va messo in evidenza è il <u>modulo</u> che sta alla base della 'struttura' dei vagoni:

blocco rosso – blocco blu – blocco triangolare giallo

L'insegnante al solito registra le osservazioni.
La classe è poi invitata a rappresentare la situazione prima e dopo il loro intervento di restauro.

Con questo gioco si passa da un coinvolgimento personale forte dei bambini ad un'attività su oggetti 'altro da sé'. La distanza psicologica rispetto al contesto dovrebbe essere quindi maggiore, e la situazione in qualche modo vorrebbe essere più 'astratta'.
Naturalmente l'insegnante può sviluppare altre attività simili puntando non (sol)tanto alla ricostruzione in sé quanto al modo in cui i bambini mostrano di cogliere la regolarità *della struttura con cui stanno lavorando.*
È importante che gli alunni fissino l'esistenza del modulo.
È opportuno accompagnare queste attività con altrettante rappresentazioni.
I bambini potrebbero a loro volta inventare dei giochi usando oggetti concreti o facendo dei disegni che poi proporranno come problemi ai compagni o alle insegnanti.

13.situazione



Si presentano insiemi di oggetti uguali e si invitano i bambini a formare delle sequenze in base a moduli scelti da loro.
Si può approfittare delle probabili sequenze simili (successioni di oggetti diversi basate sullo stesso modulo, che presentano cioè un'*analogia strutturale)* per introdurre le *'successioni sorelle' (termine inventato)*, appartenenti alla stessa 'famiglia', ossia tutte quelle assimilabili ad un medesimo modulo del tipo, per esempio:

Triangolo giallo – ellisse blu – ellisse blu
Quadrato rosso – tondino verde – tondino verde
Stella - quadrato rosso – quadrato rosso

Cioè, in generale (è un'esemplificazione per i colleghi, i bambini non c'entrano) del tipo:
ABB
Ipotesi per degli ampliamenti:
- Gli insegnanti propongono dei moduli e i bambini continuano il disegno.
- I bambini inventano dei moduli e i compagni li continuano.
- Si propone una successione fatta con oggetti reali e si chiede di comporre con oggetti qualsiasi delle successioni 'amiche' di quella presentata.
- Viceversa si possono proporre delle successioni amiche e si fa ricavare e disegnare il modulo.

La fase è molto importante. Gli alunni traducono in un codice inventato da loro *una situazione reale e poi operano all'incontrario, dalla situazione al codice. Gli alunni cominciano a sganciarsi dalla riproduzione di cose reali e passano a rappresentazioni* astratte *della* regolarità. *È un ulteriore passo verso la* generalizzazione.
(v. voce Traduzione *nel Glossario ArAl).*

RACCONTI

14.situazione

I topini scuri fanno tane tonde, i chiari le fanno a punta.

?  ? ?

Alcuni topini sono usciti per cercare da mangiare. Come sono le loro tane: tonde o a punta?
Spiega la tua scelta.

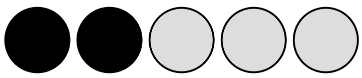
27

Per variare la situazione, si possono raccontare delle storie 'illustrate' come nell'esempio.

Si tratta di una nuova strategia (dopo il coinvolgimento del corpo, la manipolazione di oggetti, la rappresentazione) per porre gli alunni in ambienti stimolanti diversi fra loro e favorire quindi l'intuizione di una analogia strutturale *fra situazioni e linguaggi differenti.*
In questo esempio si tratta del modulo AAB già individuato in esempi precedenti.

15.situazione

La collana dell'esempio ha il modulo



Ossia (per il lettore, non per i bambini):

AABBB

Va tenuta nel *pugno*, che quindi nasconde una parte della collana; solo alcune perle (diciamo una dozzina) è quindi visibile.
Gli alunni devono

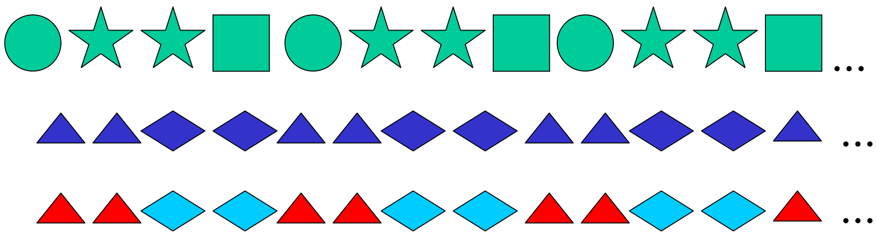
a) disegnare la parte di collana visibile,
b) continuarla rappresentando anche le perle nascoste nel pugno,
c) evidenziare il modulo.

Il pugno è un'altra 'metafora della continuazione' come la porta nelle prime situazioni di questo itinerario. Dovrebbe suggerire l'idea che la collana ha un inizio ma che non è soltanto quella visibile, che continua dentro il pugno (un'intuizione di 'infinito').
Un'altra metafora potrebbe essere il foglio stesso: il disegno della collana comincia ma poi bisogna smettere perché finisce il foglio, non perché finisce la collana. Bisogna quindi immaginare che essa continui, giocare con la fantasia.
Si potrebbero anche introdurre i puntini *come ulteriore metafora della continuazione.*

OGGETTI REALI E RAPPRESENTAZIONI

16.situazione

Proporre disegni di oggetti
(preceduti da oggetti veri?)



Bisogna continuarli
spiegando le scelte
e quindi le regole.

30

Si propongono delle rappresentazioni e si chiede:

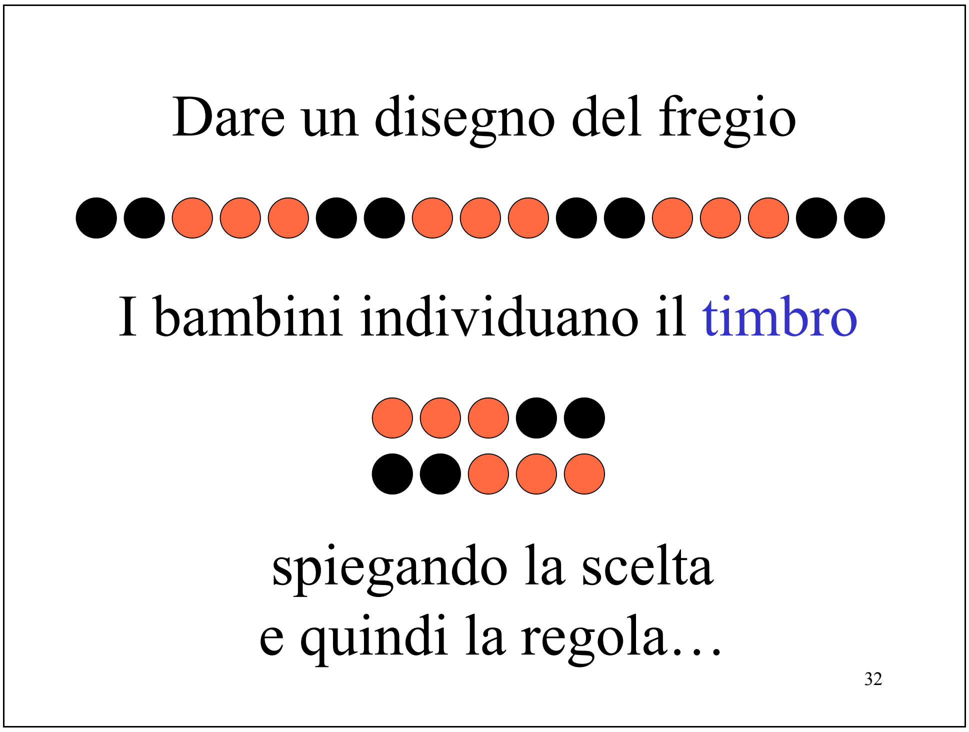
a) come continuano
b) di evidenziare il modulo

Si curano sia le rappresentazioni che le argomentazioni degli alunni.

Nell'esempio dell'illustrazione sono state inserite ipotesi di lavoro diverse.
La prima è una sequenza di modulo ABBC, quindi più complessa delle precedenti. Se gli alunni reagiscono ormai bene, si può invitarli a preparare dei disegni in modo da lanciare ai compagni delle vere e proprie sfide.
Le altre due sono identiche fra loro (modulo: AABB); si vuol solo vedere se i colori (lo stesso nel primo caso, due nel secondo) sono dei distrattori nell'individuazione della regolarità (e quindi del modulo).
Vogliamo sottolineare una difficoltà di fondo per gli alunni in situazioni come quelle che satiamo proponendo. Normalmente (come nella situazione 15) si ritiene più semplice partire dal modulo (il 'timbro') e far costruire con esso la sequenza (questo lavoro è per certi aspetti più meccanico, ripetitivo, anche se non semplice, spesso, per molti bambini). Nelle nostre attività, invece, si chiede di individuare in una sequenza il modulo che si ripete. Questa seconda operazione è più complessa, ma allo stesso tempo più produttiva sul piano logico e per le sue future implicazioni in campo matematico.

RAPPRESENTAZIONI (FREGI)

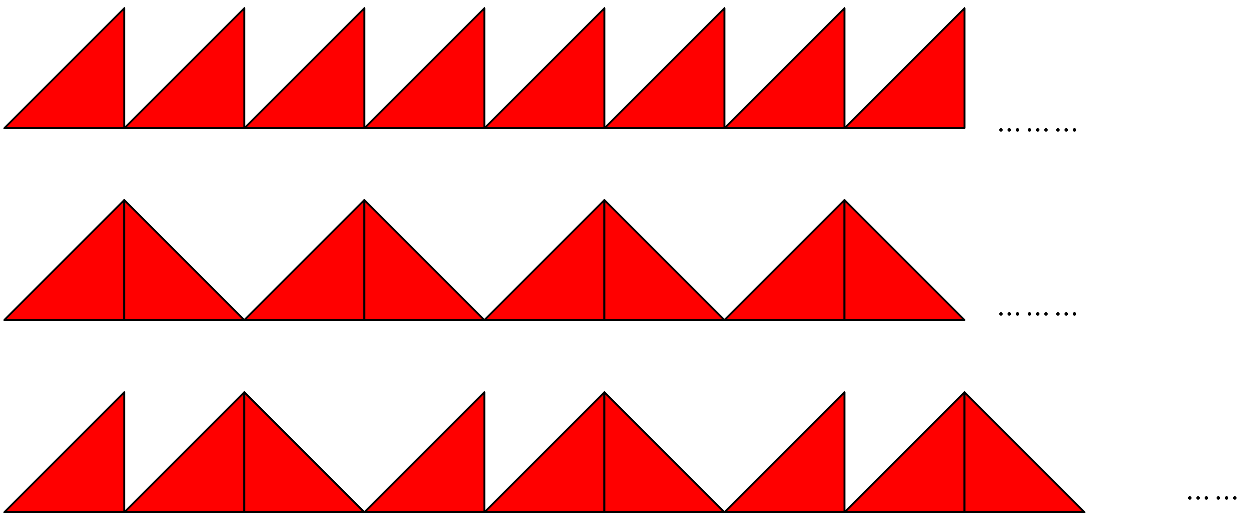
17.situazione



La situazione è analoga alle precedenti.

L'aspetto interessante in questo caso è che i timbri (i moduli) apparentemente sono due, ma in realtà si tratta di un modulo e del suo simmetrico.

Si potrebbe passare con gli alunni più grandi a fregi del tipo:



… e così via

18.situazione

È, teoricamente, una situazione più semplice rispetto alle precedenti (v. appunti alla Situazione 15).

Nota di carattere generale a questo punto dell'attività.

In queste due ultime situazioni – come del resto in tutta l'attività - siamo nel campo delle ipotesi di lavoro che si possono o meno attuare a seconda

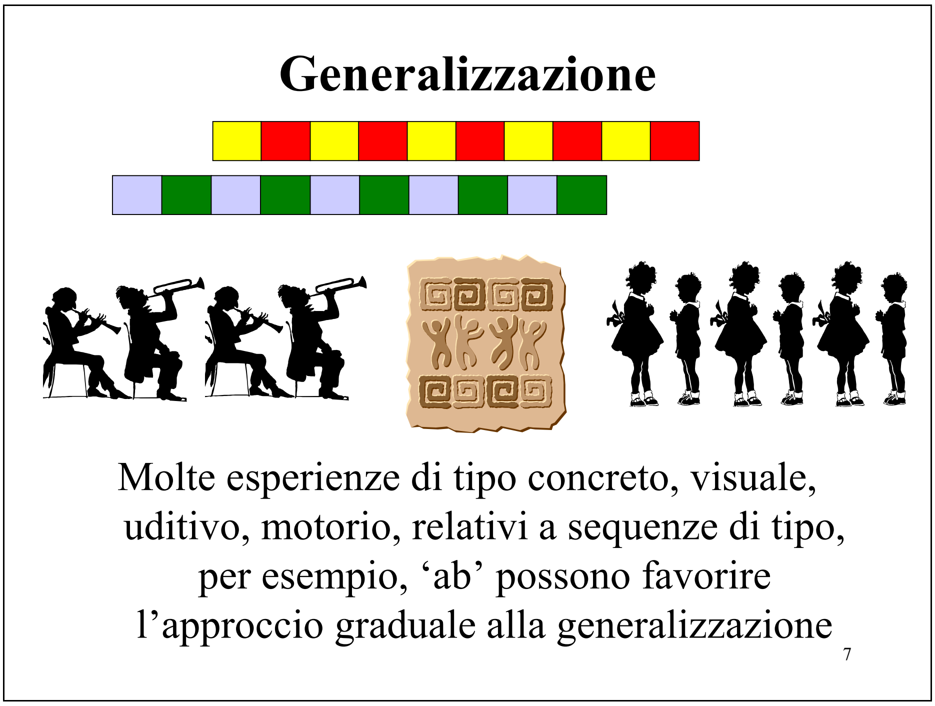
- *delle valutazioni congiunte degli insegnanti e dei ricercatori,*
- *delle condizioni ambientali (gli alunni seguono? si divertono? partecipano?, ecc),*
- *dei risultati via via raggiunti, più o meno soddisfacenti all'interno della sperimentazione,*
- *di eventuali ostacoli che impongono variazioni di rotta*

Le attività potranno

- *differenziarsi fra la materna e la prima elementare,*
- *venir modificate sulla base di ciò che accadrà nelle classi e nei gruppi,*
- *limitarsi solo ad alcune delle situazioni proposte,*
- *variare da situazione a situazione*

Tutte cose da definire cammin facendo.

IPOTESI PER POSSIBILI ATTIVITÀ



Ad un certo punto della sperimentazione dovremmo aver compreso a quale livello gli alunni più giovani sono in grado di esplorare situazioni implicanti la ricerca di regolarità.
Un ostacolo impegnativo sarà rappresentato dall'individuazione del modulo *di una regolarità.*
Uno successivo – forse il più importante – sarà costituito dal riconoscimento del medesimo modulo in situazioni completamente diverse fra loro. *Per esempio: riconoscere lo stesso modulo in*

Disegni
Fregi
Gruppi di oggetti
File di bambini
Collane
Sequenze di suoni
Sequenze di movimenti
Successioni di parole (filastrocche, ecc)
Rappresentazioni di oggetti o di situazioni
Ecc.

Questo riconoscimento, se riuscissimo a costruirlo, rappresenterebbe una base significativa per lo sviluppo del pensiero verso l'individuazione di una analogia strutturale *tra situazioni diverse (o diverse rappresentazioni), e quindi verso il concetto di* generalizzazione.
Se gli alunni poi imparassero a rappresentare questa analogia con un codice inventato *da loro, staccato semanticamente dalle situazioni concrete, questo sarebbe un primo passo importante verso la conquista di un* linguaggio formale*, e avremmo gettato alcune basi importanti nella costruzione delle prime forme (elementari, ma tutt'altro che banali) di* balbettio algebrico.
(v. voci Balbettio algebrico *e* Struttura, strutturale *nel Glossario ArAl).*

Dal Glossario ArAl

1. Balbettio algebrico

È una metafora elaborata all'interno del progetto ArAl che accosta le modalità dell'apprendimento del linguaggio algebrico a quelle del linguaggio naturale. Il bambino, nell'apprendimento del linguaggio naturale si appropria poco alla volta dei suoi *significati* e delle regole che lo supportano, che sviluppa gradualmente attraverso imitazioni, errori, invenzioni, aggiustamenti, gratificazioni sino agli approfondimenti dell'età scolare, quando imparerà a leggere e a riflettere sugli aspetti *grammaticali* e *sintattici* della lingua. Analogamente prefiguriamo debba avvenire per il linguaggio algebrico.

La metafora del balbettio si contrappone alla didattica tradizionale dell'algebra nella quale si comincia privilegiando lo studio delle *regole*, come se la manipolazione formale fosse in qualche modo indipendente dalla comprensione dei *significati.*

Si propone invece di costruire il pensiero algebrico *progressivamente, parallelamente* all'aritmetica, partendo dai suoi *significati,* attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo *informale* l'elaborazione autonoma, sperimentale, continuamente ridefinita, di un nuovo linguaggio nel quale le *regole* possano trovare la loro collocazione altrettanto gradualmente, all'interno di un *contratto didattico tollerante* verso momenti iniziali sintatticamente 'promiscui'.

2. Processo / prodotto

È, assieme a rappresentare / risolvere, una delle dualità fondamentali nell'impostazione teorica del Progetto ArAl. La rappresentazione del *processo* mette in luce le relazioni fra gli enti in gioco, ne costituisce una traduzione in linguaggio matematico. Il *prodotto* è l'atto finale del processo, e spesso la sua sinteticità lascia intendere ben poco del modo in cui esso è stato raggiunto.

Questa dualità è così collegata ad un'altra dualità che vede la trasparenza del processo contrapposta all'opacità del prodotto. Le due componenti sono comunque, in matematica, aspetti della stessa medaglia; $8 \times 2 + 5$, ad esempio, può essere concepito sia come processo di calcolo che come numero. È importante che gli alunni capiscano che esistono questi due punti di vista e imparino a distinguerli. Molto spesso invece essi trovano poco spazio nella didattica tradizionale della matematica, e l'attenzione dei docenti è rivolta soprattutto agli aspetti operativi, *risolutori* di un problema, legati alle *operazioni* e al *risultato*. Trascurare gli aspetti concettuali legati al processo significa perdere una delle occasioni più significative per favorire lo sviluppo del pensiero algebrico. Per esempio, portare gradualmente gli alunni a vedere la scrittura $n \times 2 + 1$:

- in una concezione relazionale come *somma fra il prodotto di n con 2 e 1* esprimente ad un livello interpretativo *meta* la proprietà dell'essere dispari del numero che rappresenta;
- verso la concezione strutturale, come *oggetto* matematico, ossia come espressione algebrica formale;
- a livello più evoluto, come esempio di una classe particolare di funzioni: le funzioni (polinomiali) lineari.

Da un punto di vista didattico, ci sembra interessante proporre una situazione che si rivela efficace sia con gli alunni che con gli adulti per far intuire questa dualità. Ci riferiamo al divertente film d'animazione *Galline in fuga*.

La terribile proprietaria di un pollaio-lager è scontenta della bassa produzione di uova e decide di convertire la sua impresa. Acquista una enorme macchina (si immaginino tre container in fila); ad una estremità si infila una *gallina* viva e dall'altra esce una macabra confezione di *pasticcio di* *gallina*. Al culmine del dramma la gallina protagonista viene infilata nella macchina e il galletto eroe della storia ci si infila a sua volta nel tentativo di salvarla. Seguono cinque minuti esilaranti nei quali si vede cosa accade ai due all'interno dell'orribile macchina (spennamenti, salse, verdure di contorno, cottura e così via).

La conclusione dell'esempio è evidente: lo spettatore ha avuto prima l'occasione di vedere il *prodotto* (senza sapere come veniva ottenuto), poi di assistere allo sviluppo del *processo* (interrotto, per la buona sorte dei nostri).

3. Rappresentazione

I concetti matematici nascono da astrazioni, seppure attraverso *esperienze percettive*. Tuttavia, per fondarli - anche a livello elementare - è necessario fare uso di *strumenti rappresentativi*. Le rappresentazioni in matematica hanno dunque una funzione di supporto, esplicativa e chiarificatrice, nella costruzione dei concetti.

Esistono rappresentazioni *interne*, che corrispondono alle immagini mentali intorno alle quali si formano e si articolano i concetti. Accanto ad esse, un ruolo importantissimo viene svolto dalle rappresentazioni *esterne,* allocuzione con cui intendiamo l'insieme delle forme rappresentative di ogni genere (linguistiche, grafiche, iconiche, ecc.) delle quali ci serviamo per mediare i concetti matematici.

Ovviamente, la prima e più importante rappresentazione esterna passa attraverso il linguaggio naturale. Il processo stesso di esplicitazione delle esperienze matematiche ha, nel linguaggio naturale, una funzione chiarificatrice e svolge un ruolo fondamentale ai fini della comprensione. Spesso però il linguaggio naturale è insufficiente o inadeguato. Il linguaggio grafico o quello simbolico assolvono ad una funzione sintetica, ma potente ed efficace per completare o ampliare la costruzione corretta di un concetto matematico.

Nell'insegnamento della matematica è estremamente importante utilizzare e far sì che - di conseguenza - anche gli allievi utilizzino autonomamente una molteplicità di rappresentazioni nell'ambito di un campo di esperienza, o di uno stesso concetto. Secondo gli autorevoli studi del semiologo francese R. Duval una reale interiorizzazione dei concetti si ottiene solo quando l'allievo riesce ad utilizzare e a coordinare, passando dall'una all'altra, più forme rappresentative per uno stesso concetto. Esemplificazioni immediate di ciò si possono avere se pensiamo alle varie modalità di <u>rappresentazione</u> che ci consentono di illustrare l'ordinamento dei numeri naturali, oppure delle varie forme di utilizzo del metodo delle coordinate e del piano cartesiano per illustrare <u>relazioni</u> tra i più svariati enti.

4. Struttura, strutturale

La matematica tende ad unificare lo studio di situazioni che presentino in modo più o meno evidente certe somiglianze al di là del contesto in esame, del tipo di elementi coinvolti e dei loro valori numerici. Il riconoscimento di tali somiglianze avviene creando corrispondenze tra gli elementi delle varie situazioni che rispettino le <u>relazioni</u> fra essi; questo processo è proprio del ragionamento *per analogia.* Quando si riesce a stabilire un tale genere di corrispondenze si dice che le situazioni sono *analoghe* o che presentano *la stessa struttura*, o anche che tra esse intercorre una *analogia strutturale*. Con il termine *struttura* si intende dunque la rete di relazioni che intercorrono tra gli elementi in gioco in una stessa situazione. Le situazioni sono riconosciute come analoghe quando hanno in comune una tale rete. Un caso tipico di analogia strutturale si ha nei problemi, tant'è vero che si parla di *struttura del problema* quando ci si voglia riferire allo schema di ragionamento che, attraverso il concatenamento dei dati, consente di risolvere il problema stesso.

Per indicare e classificare le diverse strutture si parla poi di *modello di problema*.

Consideriamo ad esempio i seguenti problemi:

1. *Per confezionare una gonna la sarta necessita di 1.20 m di stoffa e altrettanto di fodera. Il costo al metro della stoffa è di 73 €, il costo al metro della fodera è di 12 €. Quanto costa la confezione della gonna?*
2. *Di un trapezio isoscele si sa che l'altezza è 21 cm, e la metà di ciascuna delle basi è rispettivamente 35 cm e 24 cm. Quanto misura l'area del trapezio?*
3. *Pierino vuole invitare i suoi cinque più cari amici per la sua festa di compleanno. Fa un accordo con la mamma: lei preparerà torta e dolcetti vari ma Pierino pagherà con i suoi risparmi pizzette e Coca-Cola. Pierino si informa e viene a sapere che una coca cola costa 0.45 € e una pizzetta 0.78 €, quanti euro gli occorrono?*

Pur essendo i problemi diversi (come formulazione, contesto, tipologia dei dati, tipologia dei valori dei dati) lo schema di ragionamento è il medesimo:

1. (costo stoffa + costo fodera) × lunghezza dei due tessuti
2. (misura metà base minore + misura metà base maggiore) × misura altezza
3. (costo pizzetta + costo Coca-Cola) × numero amici.

Con l'avvento della matematica moderna il termine *struttura* ha acquisito un significato specifico in relazione a varie aree della matematica: si parla ad esempio di strutture algebriche, di strutture d'ordine, e così via.

Questa denominazione raccoglie i vari modelli di organizzazione interna di insiemi in cui siano definite, rispettivamente, delle operazioni binarie soddisfacenti a certe proprietà (caso delle strutture algebriche) o a certe relazioni d'ordine (caso delle strutture d'ordine). Particolare importanza rivestono le *strutture algebriche* che consentono un inquadramento delle strutture soggiacenti ai vari ambiti numerici (naturali, interi relativi, razionali, reali) e il riconoscimento delle analogie di struttura di questi insiemi con altri ambiti non numerici.

Con il termine *struttura* si intende in questo caso la rete di relazioni che sussiste tra gli elementi di un dato insieme grazie alle proprietà di cui godono le operazioni tra questi. L'importanza di questa visione sta nel fatto che si sposta l'attenzione dal numero e dall'azione su di esso alle *leggi* che ne governano l'insieme di appartenenza, cosa che consente di passare da una visione <u>procedurale</u> (di tipo calcolativo) ad una visione globale legata agli aspetti <u>relazionali</u> tra i numeri.

Questo spostamento di attenzione porta ad esempio a riconoscere che i naturali con l'operazione di addizione sono strutturalmente analoghi ai naturali non nulli con l'operazione di moltiplicazione e che questo comporta somiglianze forti tra ordinamento e divisibilità e ancora forti somiglianze tra i processi generativi degli interi e dei razionali.

Un aspetto ancora più importante di questa visione sta nel superamento dell'idea che le operazioni sussistano *solo* tra numeri, concependo di operare con le leggi della aritmetica su enti matematici di tipo *non* numerico. Ad esempio si compongono insiemi mediante le operazioni di unione e di intersezione, si compongono operatori aritmetici, permutazioni, trasformazioni geometriche, eccetera, agendo in successione sui termini su cui questi agiscono. Le leggi a cui tali operazioni obbediscono sono le stesse delle operazioni aritmetiche (proprietà associativa, in alcuni casi proprietà commutativa e, nel caso di due operazioni, proprietà distributiva di una operazione rispetto all'altra).

Questo ampliamento di prospettiva, che unifica e semplifica lo studio di ambienti profondamente diversi nella natura degli elementi, risponde ad una esigenza tipica della matematica: quella di realizzare un'<u>economia di pensiero</u>. Grazie infatti all'analogia di struttura tra due ambiti è possibile trasferire da un ambiente all'altro proprietà più facilmente riconoscibili in uno di essi.

5. Tradurre / Traduzione

La traduzione è un'operazione di *conversione* da un registro di rappresentazione linguistico in un altro registro rappresentativo, ad esempio in un altro linguaggio. La *traduzione* in matematica avviene molto frequentemente nel passaggio da una forma rappresentativa verbale ad una simbolica, attraverso il linguaggio specifico della matematica; oppure, viceversa, da una forma rappresentativa simbolica ad una linguistica, attraverso il linguaggio verbale (v. tutte le Unità, ma in particolare l'Unità 1: *Brioshi e l'approccio al codice algebrico* e l'Unità 6: *Dalla bilancia alla equazione*).
È molto importante che l'introduzione graduale dei simboli porti a vedere quello matematico come un vero e proprio *linguaggio,* profondamente diverso da quello naturale, dotato anch'esso di una sua semantica e di una sua sintassi. Nonostante si utilizzi sistematicamente la lingua naturale per parlare di matematica, di fatto è necessario rendere consapevoli gli allievi che esistono *specificità* del linguaggio matematico che costituiscono elementi di *rottura* nei confronti del linguaggio naturale, e condurli quindi alla riflessione su queste diversità, e alla consapevolezza sull'uso della terminologia e del simbolismo propri della matematica.

6. Verbalizzare, verbalizzazione

'Verbalizzare' può essere definito come il processo di *esplicitazione*, attraverso la lingua naturale, di un messaggio simbolico, oppure, più in generale, di un processo codificato attraverso una sequenza di operazioni formali. Si possono verbalizzare le frasi del linguaggio simbolico oppure le fasi di un algoritmo risolutivo e quindi la procedura risolutiva di un problema. Nelle attività di problem-solving numerose ricerche testimoniano l'importanza per l'allievo di passare attraverso la verbalizzazione del processo effettuato, al fine di promuovere e accrescere la consapevolezza delle scelte fatte e dei significati attribuiti alla procedura seguita. Naturalmente la verbalizzazione di un processo non corretto stimola anche la revisione critica del processo stesso da parte dell'autore: è un'attività di tipo metacognitivo che certamente può condurre, attraverso un uso sistematico, ad un maggiore controllo sulle sue capacità di risoluzione.