IL RINNOVAMENTO DELL'INSEGNAMENTO DELL'AREA ARITMETICO-ALGEBRICA NELLA SCUOLA PRIMARIA E SECONDARIA 1°: IL PROGETTO ArAl[1]

Giancarlo Navarra[2]

1. La didattica dell'algebra in una prospettiva costruttivista

Spesso la trasmissione delle conoscenze da parte degli insegnanti e l'applicazione delle regole da parte degli studenti avvengono senza una reale conquista del loro *senso*. Raramente trova spazio una *didattica delle situazioni problematiche* in cui si sposti l'attenzione dai *risultati* ai *processi* che li determinano. Un mutamento di prospettiva in questo senso consentirebbe di condurre gli studenti ad un'immagine della matematica più aderente al suo carattere di disciplina *nata da e per lo studio di problemi* che gli uomini hanno affrontato attraverso la costruzione di particolari sistemi di segni e di rappresentazioni che, a loro volta, sono diventati oggetto di studio e hanno dato luogo a teorie astratte ed unificanti.

Oggi la ricerca individua nel *socio-costruttivismo* una prospettiva potente per condurre gli alunni verso una concezione *significativa* della matematica. Questo approccio si fonda su una teoria in cui si sostiene che la mente costruisce degli schemi attraverso i quali la conoscenza si sviluppa per *selezione, organizzazione e continua ristrutturazione* di fatti e relazioni, attingendo alla ricchezza degli stimoli ambientali e delle interazioni sociali.

Tutto ciò ha evidenti implicazioni sui processi di insegnamento/apprendimento e conduce alla delicata questione della *formazione degli insegnanti*.

---

[1] *Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico*; responsabile scientifico Nicolina A. Malara, collaborazione scientifica e coordinamento: Giancarlo Navarra, Antonella Giacomin.

[2] IC G.Rodari, S.Giustina (BL); GREM, Modena; E-mail: ginavar@tin.it.

2. Il nodo della formazione

All'ICME 10 (Copenhagen 2004) Anna Sfard, analizzando i cambiamenti nel rapporto fra la ricerca e la prassi nell'educazione matematica, ha posto in luce tre momenti: la *'programs' era'* (anni '60-'70), la *'students' era'* (anni '80-'90), la *'teachers' era'* (anni '2000). In estrema sintesi: le 'buone pratiche' (*programs' era')* o l'attenzione per le modalità dell'apprendimento (*'students' era')* sono necessarie ma non sufficienti se i docenti non sono preparati a gestire entrambe in modo efficace. Da qui la *'teachers' era'*.

Una formazione dovrebbe, come compito primario, condurre ad una riflessione sulla disciplina e sul modello di insegnante che ogni docente (o futuro docente) si è costruito. Il docente della scuola primaria che si impegni in queste riflessioni è in qualche modo favorito, perché può avviare *ab ovo* un approccio nella direzione del rinnovamento. Il docente della secondaria che avvii un'analoga riflessione è in qualche modo sfavorito, in quanto i suoi studenti, in larga maggioranza, possiedono una concezione tradizionale dell'aritmetica e dell'algebra, e sono per molti aspetti lontani dall'ambiente verso il quale l'insegnante vorrebbe condurli.

Questi aspetti ci conducono all'*early algebra*, una prospettiva teorica all'interno della quale si sviluppa il Progetto ArAl.

3. L'early algebra[3]

Le ragioni principali delle difficoltà che gli studenti incontrano nello studio dell'algebra derivano dunque da un controllo debole sui significati, accompagnato da continui *perché,* spesso non esplicitati, sulle ragioni del loro fare matematica.

---

[3] *Early algebra* si potrebbe tradurre con 'approccio *precoce* all'algebra', ma l'aggettivo 'precoce' non convince perché (Devoto Oli) riconduce ad una ipotetica *norma* che sancirebbe il momento 'giusto' per la sua introduzione. Nemmeno 'approccio *anticipato* all'algebra' traduce correttamente dall'inglese, perché anche 'anticipato' ha in sé una valenza di 'prima del *dovuto*' che si potrebbe interpretare come un *tentativo azzardato*. Si ritiene che una traduzione pertinente sia 'l'algebra *degli inizi'* o, ancora meglio 'la *prima* algebra', con una connotazione quasi affettuosa e una sfumatura marcatamente ludica.

Con l'obiettivo di consolidare tale controllo, sin dagli anni '80 il filone di ricerche denominato *early algebra,* rivolto ad allievi dai 6 ai 14 anni, *promuove dai primi anni della scuola primaria un insegnamento dell'aritmetica di tipo pre-algebrico* proiettato, attraverso opportuni ambienti basati sul gioco, l'esplorazione, la verbalizzazione, verso l'osservazione di regolarità numeriche, lo studio di relazioni, funzioni e sequenze, il riconoscimento di analogie, semplici equazioni, la generalizzazione ed un precoce uso delle lettere per la rappresentazione dei fatti osservati[4].
Alcuni di questi studi, fra i quali il Progetto ArAl, si distinguono per la loro impostazione basata sulla visione dell'algebra come *linguaggio*.

4. L'early algebra e il progetto ArAl

Di consueto, nella scuola secondaria, l'algebra viene introdotta come studio delle forme algebriche, privilegiandone gli aspetti sintattici e la manipolazione formale. Ma allora la domanda di fondo è: *la manipolazione formale può prescindere dalla comprensione del significato di ciò che si manipola*?
Prima di rispondere, il lettore faccia l'analisi logica di questa frase:

'Una vecchia porta la sbarra'.

Come avrà certamente notato, l'analisi può essere condotta in due modi: l'analisi *sintattica* è dipesa dal modo in cui è stata interpretata la *semantica* della frase. Quindi la risposta alla domanda iniziale è: la manipolazione formale *non può prescindere* dal controllo di ciò che vogliono dire gli oggetti che si manipolano. Quano tale controllo manca, il linguaggio algebrico si impoverisce in modo decisivo, perché viene a perdere le caratteristiche essenziali *(i)* di *mezzo* adatto a descrivere la realtà e *(ii)* di potente

[4] Numerosissime testimonianze relative a tale metodologia sono illustrate nelle pubblicazioni della Collana ArAl, Pitagora Editrice, Bologna, e in particolare nei Diari che riportano, attraverso delle scene di classe, sia lo sviluppo delle attività che le discussioni di classe che le accompagnano.

strumento di ragionamento e di previsione che permette la derivazione di nuove conoscenze sui fenomeni stessi mediante le trasformazioni consentite dal formalismo aritmetico-algebrico.
Quanto stiamo dicendo conduce alla metafora del *balbettio*, attraverso la quale si ipotizza l'analogia fra l'apprendimento del linguaggio naturale e quello del linguaggio algebrico.

4.1.Il balbettio algebrico

Nei primi anni di vita il bambino apprende il linguaggio appropriandosi poco alla volta dei suoi termini, in relazione ai *significati* che associa loro, e sviluppa le sue *regole* gradualmente, attraverso imitazioni e aggiustamenti, sino agli approfondimenti dell'età scolare, quando impara a leggere e a riflettere sugli aspetti grammaticali e sintattici della lingua.
L'ipotesi che si formula è che i modelli mentali propri del pensiero algebrico possano essere costruiti dai primi anni della scuola primaria - nei quali il bambino comincia ad avvicinarsi al pensiero aritmetico - insegnandogli a *'vedere' l'aritmetica algebricamente*, costruendo in lui il pensiero algebrico progressivamente, in un fitto intreccio con l'aritmetica, *partendo dai suoi significati*, attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo informale l'elaborazione autonoma di quello che chiamiamo *balbettio algebrico***,** che indica l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio nel quale le regole trovino la loro collocazione *gradualmente*, all'interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente 'promiscui'.
Punto nodale, la comprensione della differenza fra i concetti di *rappresentare* e *risolvere*.

4.2.Risolvere e rappresentare: prodotto e processo

Una convinzione molto diffusa negli alunni è che la soluzione di un problema coincida con *la il risultato*. Questo comporta che la loro attenzione si concentri sulle *operazioni*. Si consideri il seguente problema, contenente una consegna 'classica': *Sul ramo di un*

albero ci sono 13 corvi. Ne arrivano altri 9 e se ne volano via 6. Quanti sono i corvi rimasti? Ora si modifichi la consegna in: ‘*Rappresenta in linguaggio matematico la situazione in modo da trovare il numero totale dei corvi rimasti’*. Cosa cambia?
Nel primo caso si enfatizza la ricerca del *prodotto (16),* nel secondo quella del *processo (13+9–6)*, cioè della rappresentazione delle *relazioni* fra gli elementi in gioco. Questa differenza si collega ad uno fra gli aspetti più importanti del *gap epistemologico* fra aritmetica e algebra: mentre l'aritmetica comporta un'*immediata* ricerca della soluzione, l'algebra la *pospone* e comincia con una trasposizione formale della situazione problematica dal dominio del linguaggio naturale ad uno specifico sistema di *rappresentazione* (si pensi ad un problema risolvibile con un’equazione).
L’alunno, se viene guidato ad allontanare da sé la preoccupazione del risultato, raggiunge un livello superiore di pensiero, sostituendo al calcolare il ‘guardarsi’ mentre sta ragionando. Passa cioè ad un livello *metacognitivo,* in cui interpreta *la struttura* del problema.
A monte di tutto questo c’è un nodo molto delicato. Ad esempio, in ’15×(4+2)=90’ uno studente, operando una lettura sinistra/destra ‘vede’ ’15×(4+2)’ come ‘operazione’ e ‘90’ come ‘risultato’. È molto difficile che sia stato educato a ‘vedere’ la scrittura come *uguaglianza fra due rappresentazioni dello stesso numero*.
A questi aspetti sono dedicati i prossimi due paragrafi.

4.3.Rappresentazione canonica o non canonica di un numero

Tra le infinite rappresentazioni di un numero, quella *canonica* è la più ‘gettonata’. Pensare un numero significa, per chiunque, pensare alla *cardinalità che esso rappresenta*. Ma la rappresentazione canonica è *opaca di significati,* nel senso che *dice poco di sé*. Per esempio: la scrittura ‘12’ suggerisce un generico ‘numero di cose’, tutt’al più l’idea di ‘parità’. Altre rappresentazioni possono ampliare il campo delle informazioni sul numero stesso: ‘3×4’ evidenzia che si tratta di un multiplo di 3 e di 4; ‘2^2×3’, che è anche

un multiplo di 2; '2×2×3' conduce a '2×6' e quindi al multiplo di 6, e così via.
Possiamo dire che ognuna delle *connotazioni* di un numero aggiunge informazioni utili per approfondire la sua conoscenza, un po' come avviene per le persone: c'è il nome anagrafico, che è opaco rispetto ad altre connotazioni più espressive del soggetto, date in funzione di altri individui a cui è legato per relazioni familiari e sociali (il papà di …, l'insegnante di…, il marito del fratello di …). È importante portare gli allievi a concepire come legittime rappresentazioni del numero sia quella canonica che ogni altra espressione di cui esso sia il risultato (quella non canonica). Ciò non solo per la comprensione e di scritture algebriche come '$a+b$' o 'x^2y', ma soprattutto per facilitare l'individuazione di relazioni numeriche e la loro rappresentazione in termini generali.

4.4. Il segno di uguaglianza

Nell'insegnamento dell'aritmetica alla scuola primaria l'uguale è essenzialmente un *operatore direzionale*: 4+6=10 significa '4 più 6 *fa* 10'. Questa concezione è dominante per i primi sette, otto anni di scuola durante i quali l'uguale possiede una valenza dominante *spazio temporale*, segnando i passi di un percorso operativo che va letto da sinistra verso destra.
Poi, quando l'alunno incontra l'algebra, l'uguale improvvisamente assume un significato del tutto diverso, di tipo *relazionale*. In una scrittura come '$(a+1)^2=a^2+2a+1$' esso veicola un'idea di *simmetria* fra le espressioni ai suoi lati: indica che queste, per ogni valore attribuito ad a, rappresentano lo stesso numero. Ancora, in '$8+x=2x-5$' l'uguale indica l'ipotesi (da verificare) di una equivalenza tra le due scritture per qualche valore di x. Lo studente deve quindi improvvisamente muoversi - spesso senza che nessuno lo abbia 'avvertito' di questo ampliamento di significati - in un universo concettuale del tutto differente, nel quale è necessario andare *oltre* la familiare connotazione spazio-temporale. Ma se per lui il numero dopo

l’uguale è il *risultato*, cosa significa la scrittura ’11 = n’, anche se sa risolvere l’equazione di primo grado che conduce ad essa?
In quanto stiamo dicendo sono evidenti gli aspetti *linguistici* legati all’*interpretazione*, alla *traduzione*, al confronto di *parafrasi*, al rispetto consapevole delle *regole*. E qui entra in scena un nuovo personaggio, divenuto ormai *amico di penna* di centinaia di studenti italiani: Brioshi.

4.5.Brioshi ed il codice algebrico

Brioshi è un personaggio metaforico: un alunno giapponese *virtuale* di età variabile a seconda dell’età dei suoi interlocutori, che conosce solo la sua lingua ma sa usare molto bene il linguaggio della matematica. Ama trovare classi di coetanei non giapponesi con le quali scambiare problemi matematici. Viene introdotto per avvicinare gli alunni fra i 6 e i 14 anni ad un concetto difficile da far comprendere: la necessità del *rispetto delle regole* nell’uso di un linguaggio, necessità ancora più forte nel caso in cui di un linguaggio formalizzato, e questo in ragione dell’estrema sinteticità dei simboli usati. I messaggi, soprattutto con gli alunni più piccoli, possono anche contenere frasi ‘di contorno’ di sapore affettivo, che contribuiscono in modo significativo a far emergere il *cuore matematico.*
Brioshi viene introdotto attraverso attività strutturate - uno scambio di messaggi da tradurre di volta in volta in linguaggio naturale o in linguaggio matematico – dove l’amico giapponese (corretto *per definizione*) gioca il ruolo di controllore della traduzione. Se ‘non la capisce’ la traduzione va rimessa in discussione e ‘aggiustata’. Questo ‘gioco di ruolo’ funziona sempre, indipendentemente dall’età degli alunni, e rimane forte il ruolo *arbitrale* di Brioshi come richiamo alla correttezza o alla trasparenza.
Sinora abbiamo riflettuto su questioni matematiche e linguistiche concernenti l’early algebra; ora proseguiremo analizzando gli elementi che costituiscono il loro supporto metodologico.

5. Questioni metodologiche nell'approccio all'early algebra

La didattica della matematica nella prospettiva dell'early algebra si sviluppa in ambienti stimolanti ma spesso non facili da gestire per l'insegnante. Di conseguenza, chi intende affrontarla si trova a fare i conti non solo con le sue conoscenze e le sue convinzioni ma con un contorno di aspetti metodologici e organizzativi tutt'altro che secondari che supportano in modo operativo una *cultura del cambiamento*. Soffermiamoci su alcuni di tali aspetti.

5.1. Il contratto didattico

È un costrutto teorico (G. Brousseau, 1986) che indica l'insieme delle relazioni, in buona parte *implicite*, che regolano il rapporto insegnante–allievi di fronte allo sviluppo della conoscenza di uno specifico contenuto matematico. Tali relazioni si risolvono in un sistema di *obblighi* di cui entrambi hanno la responsabilità.

Nel caso dell'early algebra, con alunni di 6-14 anni, il contratto è costruito attorno alla costruzione di *concezioni matematiche* più che di *competenze* di tipo tecnico. Gli alunni devono essere resi consapevoli dell'essenza del contratto: *essi sono protagonisti nella costruzione collettiva del balbettio algebrico*. Questo significa educarli alla sensibilità verso le forme, anche complesse, di un nuovo linguaggio, favorendo la riflessione sulle diversità e sulle equivalenze dei significati delle scritture matematiche, la scoperta graduale dell'uso delle lettere, la comprensione dei diversi significati dell'uguale e delle infinite rappresentazioni di un numero, l'individuazione delle proprietà aritmetiche, e così via.

A questo scopo, il contratto didattico per la soluzione dei problemi algebrici deve basarsi sul principio '*prima rappresenta, poi risolvi*' (v. par.4.2). Tale prospettiva sembra molto promettente per affrontare uno dei nodi più importanti nel campo concettuale dell'algebra: la trasposizione in termini di rappresentazione dal linguaggio naturale nel quale sono formulati i problemi a quello algebrico-formale in cui bisogna *tradurre* le relazioni che essi contengono.

La produzione di rappresentazioni scritte da parte degli alunni e la loro interpretazione ci conduce alla questione dei *protocolli*.

5.2.L'interpretazione dei protocolli

Il protocollo è l'elaborato scritto prodotto da singoli o da gruppi in relazione ad una data consegna. Costruire le competenze per l'interpretazione e la classificazione delle rappresentazioni e delle traduzioni che vi compaiono comporta per l'insegnante il doversi confrontare con una grande varietà di scritture matematiche, elaborate spesso con un uso misto e personalizzato di linguaggi e di simboli più o meno propriamente accostati (v. 4.1 Balbettio algebrico e 4.5 Brioshi).

Tale varietà si sviluppa quando è l'insegnante stesso a stimolare, oltre alla riflessione, la creatività,. Gli alunni, nel momento in cui percepiscono di essere 'produttori di pensiero matematico', esprimono una grande varietà di proposte che, assieme, rappresentano un patrimonio comune a tutta la classe. L'analisi collettiva dei protocolli è fortemente intrecciata con le pratiche della *discussione* in classe.

5.3.La discussione su temi matematici

La ricerca sull'educazione matematica ha posto in evidenza come la *discussione* finalizzata alla costruzione di un sapere socialmente condiviso e, in generale, le attività che comportano la *verbalizzazione* e l'*argomentazione,* favoriscano l'apprendimento esaltandone gli aspetti *metacognitivi* e *metalinguistici.*

Ma la discussione può divenire ancora più determinante nella costruzione di significati stabili. Uno specializzando del corso SSIS di Modena (classe 059) descrive efficacemente questo aspetto:

> "Penso che l'esperienza per un docente sia effettivamente l'aspetto maggiormente formativo, *soprattutto se ognuno di noi si mette nell'ottica di 'manifestare' in modo continuo il proprio stile di insegnamento*."

L'osservazione conduce ad una prospettiva importante: predisporre un contratto didattico basato *sull'esplicitazione costante da parte dell'insegnante delle motivazioni profonde che lo guidano nelle sue proposte didattiche*. Allo stesso tempo, i concetti portanti dell'early algebra dovrebbero entrare nel lessico della classe assumendo anche per gli alunni il ruolo di 'cerniere concettuali' fra gli *aspetti operativi* e le *ragioni* che li sostengono. *Si instaurerebbe cioè un controllo comune fra docente e alunni sulla cultura matematica in gioco* attraverso la condivisione dei suoi termini chiave.
Tali termini (circa 90) fanno parte di un complesso piuttosto vasto che forma il cuore del Progetto ArAl: il *Glossario*.

6. Il Glossario[5]

Il *Glossario* è il fondamentale strumento di mediazione fra *teoria* e *prassi* per favorire l'accostamento ad una *concezione della matematica come linguaggio*. La sua struttura rappresenta una mappa concettuale delle relazioni intercorrenti fra i temi dell'early algebra sviluppati nel Progetto ArAl.

Non avendo in questa sede la possibilità di approfondire il Glossario, si è scelto di farne cogliere il senso attraverso una 'simulazione di laboratorio' Nella tabella delle prossime due pagine, nella colonna di sinistra si presentano alcune *questioni* e in quella di destra le parole chiave del Glossario alle quali esse sono collegate[6].

La domanda che introduce il laboratorio è:

> Il lettore ritiene importante (opportuno, necessario) che un alunno alla fine della scuola primaria/inizio secondaria possieda un controllo significativo relativamente alle questioni proposte?

---

[5] Il Glossario è contenuto nel primo fascicolo della Collana ArAl: Malara N.A., Navarra G. (2003): *Quadro Teorico di riferimento e Glossario*, Pitagora Editrice Bologna.

[6] Una versione interattiva del Glossario è reperibile alla voce 'I termini' in http://www.aralweb.it/Home/index.asp?IDCanale=4.

7. Questioni e concetti chiave di riferimento

Questioni per docenti e alunni	Termini del Glossario
7 è un numero. *$[3 \times (2 + 6)]^2$ è un numero?*	**Forma canonica/non canonica del numero**
In 7 + 5 – 3 = 9 il numero che sta a destra dell'uguale lo si chiama risultato. *In 9 = 7 + 5 - 3 c'è un 'risultato'?* *In $2x – 5 = 8$? E in $(x – 7) \times 4 = 3x + 11$?*	**L'uguale**
L'alunno sa cambiare punto di vista e 'vedere' nella scrittura 19 – 13 = 6 l'uguale sia come operatore direzionale che come relazione di equivalenza?	
'Sul ramo ci sono 3 corvi. Ne arrivano altri 5. <u>Rappresenta la situazione in linguaggio matematico</u>.' Gli alunni propongono: 3 + 5 5 + 3 3 + 5 = 8 3 + 5 = 8 3 + 5 = n *Come si possono interpretare le risposte in relazione alla consegna?*	**Processo/Prodotto**
Un quadrato, la cui area è di 225 cm2, ha lo stesso perimetro di un rombo in cui una delle diagonali è lunga 18cm. <u>Calcola l'area del rombo.</u> Un quadrato, la cui area è di 225 cm2, ha lo stesso perimetro di un rombo in cui una delle diagonali è lunga 18cm. <u>Rappresenta la situazione in linguaggio matematico in modo da trovare l'area.</u> *Rifletti sulla differenza fra le consegne.*	**Rappresentare/Risolvere**

Questioni per docenti e alunni	Termini del Glossario
L'alunno riconosce che: (a) Aggiungi a 7 il doppio di 3 (b) $7 + 3 \times 2$ (c) $7 + 6$ (d) 13 (e) Addiziona il prodotto di 3 per 2 a 7 (f) Somma il triplo di 2 a 7 (g) La somma di 7 con il prodotto fra 3 e 2 *sono rappresentazioni dello stesso numero?*	**Rappresentazione** **Parafrasi**
L'alunno riconosce che: (a) $10 + n = 17$ (b) $n = 17 – 10$ (c) $17 – n = 10$ (d) $17 = n + 10$ *sono rappresentazioni equivalenti delle relazioni fra 10, 17 e n espresse da differenti punti di vista?*	**Connotazione/denotazione**
L'alunno sa: • *tradurre in linguaggio matematico* 'Togli 7 alla somma fra 3 e 9' 'Il semiprodotto fra 8 e 6'? • *tradurre in linguaggio naturale* '12 : 3 + 11'?	**Tradurre**

Riferimenti bibliografici

La letteratura internazionale sull'early algebra è molto ampia, come pure sono numerose le pubblicazioni del GREM relativamente al Progetto ArAl e alla sua collocazione in quest'area di ricerca.
Ci limitiamo qui a segnalare la Collana ArAl, Pitagora Editrice, Bologna, composta attualmente dal Quadro teorico/Glossario e da dieci Unità.