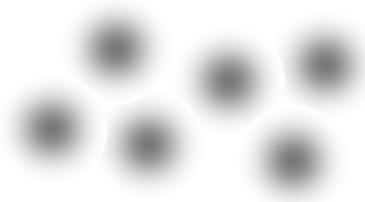


Obiettivi e curricoli nella prospettiva dell'avvio precoce al pensiero algebrico

Giancarlo Navarra

Istituto Comprensivo 'G. Rodari' di S. Giustina (BL), GREM Università di Modena e Reggio Emilia

1. Si è detto¹ che l'early algebra è un insieme *policentrico* di temi...



2. ... e che questo può disorientare gli insegnanti nel loro approccio ai temi della *pre-algebra*, anche per la difficoltà di integrare questi temi nella quotidianità del loro lavoro.

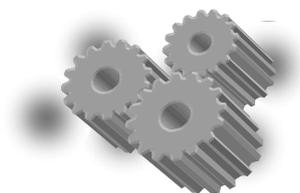
3. Si ritiene quindi necessario elaborare un sistema di riferimento che consenta al docente di pervenire gradualmente, attraverso una rilettura delle sue conoscenze, ad una visione d'insieme dell'early algebra che coniughi *teoria* e *prassi*, in cui si affrontino *le connessioni fra matematica e linguistica* per accostarsi ad una concezione della *matematica come linguaggio* all'interno della quale sviluppare un convincente *controllo dei significati* da trasmettere agli allievi. Non esistono approcci pre-definiti. Il progetto esibisce una pluralità di percorsi e richiede piuttosto *metodo* per essere affrontato. La sua interpretazione è un'avventura individuale e *dipende dal modo in cui il docente decide autonomamente di interagire con lui*.

4. La nostra prospettiva è quindi quella di individuare una chiave di lettura applicando la quale ognuno possa giungere a conoscere *tutto ciò di cui sarà capace* in quel particolare momento, e che consenta di muoversi all'interno del binomio *locale/globale* lungo due direzioni:

1. all'interno del singolo *locale*;

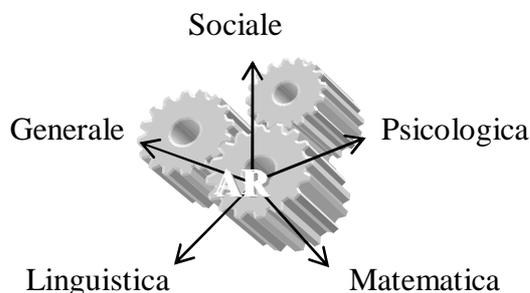
2. nella *mappa delle connessioni possibili fra i vari locali* la cui percorribilità sia garantita non da itinerari predefiniti ma dal *metodo* che possa consentire di scegliere quelli di volta in volta più opportuni per l'insegnante.

5. L'ipotesi di fondo viene presentata attraverso la metafora del progetto ArAl come *macchina di cui capire il funzionamento*.



¹ Mi riferisco all'articolo: Navarra G. (2005), Primi appunti per un'esplorazione del Progetto ArAl, in Navarra G. (a cura di) *Quaderno ArAl n.5, Sesto Seminario 2005*, 61-70 in <http://www.aralweb.it/Home/index.asp?ICanale=6>.

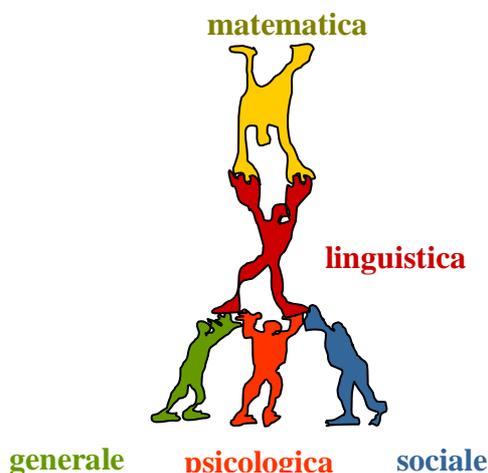
6. Il *Glossario*² con i suoi 70 termini chiave è il cuore della macchina. Al suo interno si individuano cinque aree:



7. Tutti i termini del Glossario riconducono almeno ad una di queste aree Alcuni esempi:

Aree	generale	Brioshi, Diario, Mediatore didattico, Opaco/trasparente, Pensiero prealgebrico, Pensiero relazionale, Processo/prodotto, Metacognitive/metalinguistiche, Rappresentare/risolvere, ...
	matematica	Codifica formale, Forma additiva / moltiplicativa, Frase matematica, Incognita, Pseudoequazione, Regolarità, Relazione, Struttura, Uguale, ...
	linguistica	Argomentare, Balbettio algebrico, Forma canonica / non canonica, Lettera, Linguaggio, Metafora, Parafrasi, Semantica / sintassi, Tradurre, ...
	Sociale-didattica	Collettivo (confronto, ...), Condividere, Contratto didattico, Discussione, Mediazione sociale, Negoziazione, ...
	psicologica	Percezione, Persistenza semantica, ...

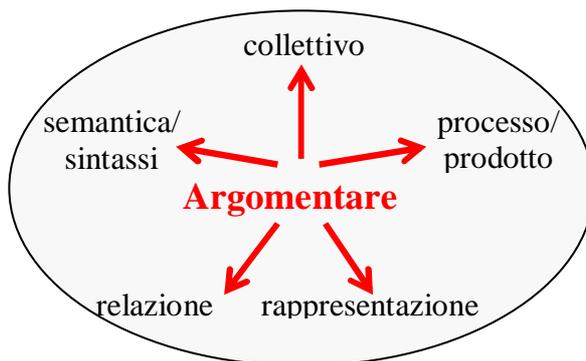
8. La struttura del Glossario ArAl:



Le Aree *generali*, *sociali-didattiche* e *psicologiche* rappresentano il supporto metodologico all'Area *linguistica* che, intrecciandosi con quella *matematica*, ne favorisce la comprensione.

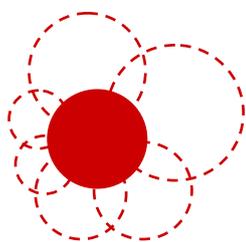
9. La definizione di ogni termine contiene altri termini del Glossario. Definiamo *RETE* l'insieme di tali. Il Glossario nel suo insieme è quindi la *matrice delle Reti*.
 Conveniamo di chiamare quella rappresentata *RETE* del termine *Argomentare*:

² Il Glossario ArAl si trova in: Malara N.A., Navarra G. (2003), Quadro teorico e Glossario, Pitagora editrice Bologna. Le versioni ipertestuali del Glossario generale e della versione del Glossario per docenti della scuola dell'infanzia si trovano in <http://www.aralweb.it/Home/index.asp?ICanale=4>.

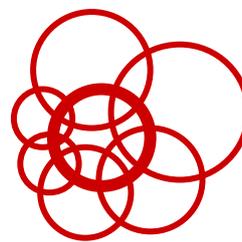


Una Rete può essere considerata in maniera duplice:

attraverso la sua struttura *interna*
 (come universo a sé)



rispetto alla sua possibilità
 di aggregarsi *esternamente* con altre Reti.

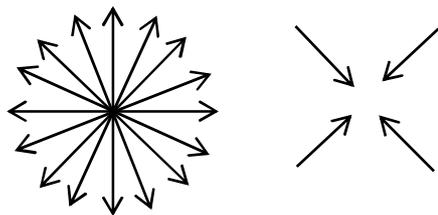


La metafora di un visitatore che percorre una strada di un centro storico può aiutare a capire: nel primo caso egli 'legge' la strada come un fatto *unitario*, attraverso i palazzi che la costeggiano, il tipo di selciato, i vicoli che la incrociano; nel secondo colloca la strada del suo contesto urbano: ogni palazzo ha la sua storia, un giardino nascosto dal muro di cinta, i vicoli conducono ad altri luoghi, e così via. Nel primo caso il contesto fa da sfondo, nel secondo diventa protagonista di una lettura *ampliata* della strada.

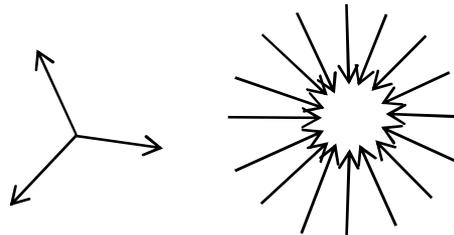
10. Queste considerazioni ci portano a riflettere sulla *struttura* del Glossario.

Ogni termine è caratterizzato da due componenti: la *numerosità della sua Rete* e quella *delle sue ricorrenze*. Ad esempio:

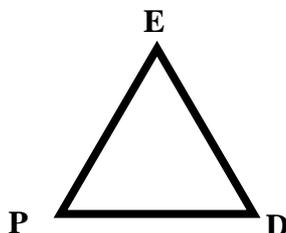
la definizione del termine *Mediatore Didattico*
 contiene una grande quantità di rimandi (15)
 ma è citato solo in 4 Reti:
 la sua ricchezza è dovuta
 alla *numerosità della sua Rete*.



al contrario, la Rete di *Frase matematica*
 è povera di rimandi (solo 3)
 ma compare in ben 17 Reti,
 e quindi la sua significatività
 è di grande importanza *trasversale*:
 la sua ricchezza è dovuta
 alla *numerosità delle sue occorrenze*.



11. Come si può muovere l'insegnante per cominciare ad assumere il controllo della macchina? La risposta si può intravedere nel modo in cui egli si colloca all'interno del triangolo EPD: E (*l'epistemologia personale dell'insegnante*); P (i temi della *pre-algebra*); D (la *didattica*).



In altre parole: come si colloca nei confronti del binomio che caratterizza la sua professione a cavallo fra teoria e prassi.

12. L'analisi della numerosità delle Reti e delle Ricorrenze dei termini del Glossario conduce ad isolarne 14, che possiedono Reti e Occorrenze *facenti riferimento a più di 10 termini*:

Area	Termini con Reti e occorrenze ≥ 10
Generale	Mediatore, Processo/Prodotto, Rappresentare/Risolvere, Rappresentazione
Sociale/didattica	Sociale
Linguistica	Lettera, Linguaggio, Semantica/Sintassi, Frase matematica, Tradurre
Matematica	Additivo-moltiplicativo, Incognita, Relazionale, Relazione

Il fatto che essi siano gli unici che compaiono in tutte le Unità ArAl attribuisce loro uno *status di rappresentatività forte dell'impianto teorico del progetto*.

Proviamo a ricomporni in una definizione sintetica che li raccolga tutti, una sorta di manifesto:

Il quadro teorico dell'*early algebra* supporta l'ipotesi che il controllo debole sui significati dell'algebra da parte degli studenti abbia la sua origine nei modi nei quali si cominciano a costruire le conoscenze aritmetiche nella scuola primaria.

L'algebra dovrebbe essere insegnata come un nuovo **linguaggio** di cui ci si impadronisce – attraverso un insieme di pratiche **sociali** condivise (la discussione, la verbalizzazione, l'argomentazione) - con modalità analoghe a quelle che caratterizzano l'apprendimento del linguaggio naturale: iniziando dai suoi significati (dagli aspetti **semantici**) e collocandoli gradualmente nella loro impalcatura **sintattica** (balbettio algebrico).

Elementi determinanti a questo scopo le metafore, **mediatori didattici** nella conquista dei significati nel corso della progressione concettuale verso la generalizzazione e la modellizzazione.

In questa prospettiva, il linguaggio naturale costituisce il più importante mediatore dell'esperienza dello studente e il suo principale strumento di **rappresentazione** attraverso il quale illustrare il sistema delle **relazioni** (fra le prime le **additive** e le **moltiplicative**) fra gli elementi di una situazione problematica, spostando l'attenzione dal **prodotto** al **processo** e inducendo la sua **traduzione** in una **frase matematica**.

In questo modo, l'attenzione viene spostata dall'obiettivo *aritmetico* del **risolvere** a quello *algebrico* del rappresentare.

I mediatori favoriscono allo stesso tempo la conquista dell'uso della **lettera**, vista inizialmente nella sua accezione più intuitiva di **incognita**.

13. Si è parlato di relazione teoria-prassi. Nei punti precedenti si sono affrontati prevalentemente degli aspetti teorici. Ipotizziamo ora i loro riflessi sulla prassi didattica; più in particolare, sulla programmazione delle attività che possono supportare nella scuola primaria e nella secondaria di 1° una didattica dell'aritmetica in una prospettiva algebrica.

Ad esempio: è importante che un alunno **alla fine della prima elementare** possieda una qualche forma di controllo significativo su concetti chiave del Glossario come *'i diversi significati*

attribuiti al segno '=' o 'forma canonica/non canonica di un numero'? Elenchiamo allora una serie di questioni emblematiche in questo senso.

14. Un primo gruppo di questioni:

- '7' è un numero. Che cosa è ' $3 \times (2 + 6)$ '? Si può dire *che sia un numero*?
- In ' $7 + 5 - 3 = 9$ ', il numero che sta a destra dell'uguale lo si chiama 'risultato'. In ' $9 = 7 + 5 - 3$ ' c'è un 'risultato'?
- A proposito del simbolo 'uguale': l'alunno nel corso della sua storia lo incontra sempre, dalla prima elementare in poi. Gli attribuisce sempre lo stesso significato?
- Prima elementare: '*All'inizio dell'anno ho acquistato 10 matite colorate. Ne ho consumate 2*'. Prima media: '*Le basi di un trapezio misurano 12cm e 9cm. L'altezza misura 16cm*'. Cosa si potrebbe aggiungere a queste frasi per farle diventare due problemi?
- In relazione alla questione precedente: che differenza c'è fra tra '*rappresentare* in linguaggio matematico' e '*risolvere*' un problema?
- In una prima elementare viene dato questo problema: '*Sul ramo di un albero ci sono 3 corvi. Poi ne arrivano altri 5. Rappresenta la situazione in linguaggio matematico*'.

Gli alunni propongono le frasi:

$$3 + 5 \qquad 5 + 3 \qquad 3 + 5 = 8 \qquad 3 + 5 = \qquad 8.$$

Come si possono giudicare in relazione alla consegna?

15. Un secondo gruppo di questioni. L'alunno sa:

- riconoscere che 'Aggiungi a 7 il doppio di 3'; ' $7 + 3 \times 2$ '; ' $7 + 6$ '; '13'; 'Addiziona il prodotto di 3 per 2 a 7'; 'Somma il triplo di 2 a 7'; 'La somma di 7 con il prodotto fra 3 e 2' sono rappresentazioni dello stesso numero?
- riconoscere che $10 + n = 17$; $n = 17 - 10$; $17 - n = 10$; $17 = n + 10$ sono rappresentazioni diverse della stessa situazione relazionale espresse da differenti punti di vista?
- cambiare punto di vista e 'vedere' nella scrittura $19 - 13 = 6$ l'uguale come *operatore direzionale* e come *relazione di equivalenza*?
- interpretare il significato della scrittura ' $4 \times 3 + 5 \times 3 = (4 + 5) \times 3$ ' come proprietà distributiva?
- tradurre in linguaggio matematico frasi come 'Togli 7 alla somma fra 3 e 9', 'Il semiprodotto fra 8 e 6'? Sa tradurre in linguaggio naturale ' $12 : 3 + 11$ '?

16. Le questioni proposte ai punti 14. e 15. sono state analizzate, assieme ad altre, da insegnanti partecipanti al Progetto ArAl; hanno condotto all'individuazione di un quadro di competenze da inserire nella programmazione annuale per il 2006/2007. Si presentano sinteticamente, a titolo di esempio, le programmazioni relative alla prima classe della scuola primaria e al passaggio dalla scuola primaria alla secondaria. I cinque termini-chiave in colore rosso sono quelli del Glossario ai quali sono riconducibili le diverse competenze.

17. Temi-chiave e competenze della programmazione del primo anno della Scuola Primaria:

- **Regolarità**
Saper costruire e completare serie e ritmi sul piano motorio, verbale, iconico; formare sequenze ordinate secondo un criterio; formare sequenze numeriche.
- **Forma canonica/non canonica di un numero naturale**
Riconoscere differenti rappresentazioni dello stesso numero.
- **Uguale**
Conoscere i diversi significati attribuiti all'uguale: operatore direzionale e relazione d'equivalenza.
- **Traduzione, Simbolizzazione**

Comprendere il significato di un simbolo (?, ..., , macchia, lettera) che rappresenta un numero in una frase matematica.

- **Rappresentazione**

Interpretare una scrittura espressa in linguaggio matematico; operare la codifica formale di un'espressione verbale; operare traduzioni fra linguaggi diversi (verbale, matematico, iconico, sagittale, ...).

18. Ognuno dei cinque termini ha la sua Rete. La tabella riassume la situazione.

RETI DEI TERMINI USATI NELLA PROGRAMMAZIONE DELLA CLASSE PRIMA				
Regolarità ↓	Forma canonica/ non canonica ↓	Uguale ↓	Tradurre ↓	Rappresentazione ↓
Linguaggio	Frase matematica	Processo/Prodotto	Briosi	Relazione
Struttura	Opaco/Trasparente	Relazionale	Linguaggio	
	Processo/Prodotto		Rappresentazione	
	Rappresentare/Risolvere		Semantica/Sintassi	
	Rappresentazione			
	Senso/Denotazione			

9 termini della tabella (in verde) fanno parte dei 14 con Reti e occorrenze maggiori di 10 (v. punto 12.). Questo significa che i **cinque termini** individuati dagli insegnanti toccano aspetti centrali dell'early algebra e rappresentano – attraverso le loro Reti - importanti punti di partenza per ampliare e approfondire una parte consistente della mappa costruita all'interno del Glossario. Possono essere già una buona base di partenza per costruire una conoscenza significativa – in termini teorici e nei risvolti con la pratica - degli intrecci fra aritmetica ed Algebra.

19. Temi-chiave e competenze della programmazione del primo anno della Scuola Primaria:

- **Processo / prodotto**

Comprendere la differenza fra i due concetti; Rappresentare in modi differenti in linguaggio matematico un prodotto e processo.

- **Pseudo equazione**

Rappresentare in linguaggio matematico le relazioni fra gli elementi di una situazione problematica verbale; interpretare semplici (dis)equazioni; risolvere semplici (dis)equazioni; costruire semplici (dis)equazioni come soluzione di situazioni problematiche; sostituire valori numerici in un'espressione letterale; abituarsi a verificare la correttezza di un risultato.

- **Parafrasi**

Usare e conoscere rappresentazioni additive, moltiplicative, miste e passare dall'una all'altra; riconoscere l'equivalenza di parafrasi espresse in linguaggio naturale; riconoscere l'equivalenza di parafrasi espresse in linguaggio matematico.

- **Tradurre**

Operare la codifica formale di un'espressione verbale; interpretare una scrittura espressa in linguaggio matematico; elaborare il testo di un problema partendo da una frase matematica; operare traduzioni fra linguaggi diversi (verbale, matematico, iconico, sagittale, grafico, insiemistico, ...).

- **Verbalizzare**

Verbalizzare concetti, ragionamenti, strategie, processi.

20. Temi-chiave e competenze della programmazione del quinto anno della scuola primaria:

RETI DEI TERMINI USATI NELLA PROGRAMMAZIONE DELLA CLASSE QUINTA				
Formalizzazione ↓ Tradurre ↓	Pseudoequazione ↓	Uguale ↓	Parafrasi ↓	Verbalizzazione ↓
Addit/multipl (forma)	Collettivo (confronto)	Processo/Prodotto	Briosi	Codifica formale
Briosi	Tradurre	Relazionale	Descrivere	Frase matematica
Linguaggio	Rappresentare/risolvere		Frase matematica	Linguaggio
Rappresentazione	Rappresentazione		Linguaggio	Procedura
Semantica/Sintassi			Rappresentazione	
			Struttura	
			Tradurre	

In questo caso, 10 termini della tabella (in verde) fanno parte dei 14 con Reti e occorrenze maggiori di 10 (v. punto 12). Questo conferma ancora una volta che *questi ultimi rappresentano il cuore della teoria che, nella nostra ipotesi, supporta lo sviluppo del pensiero prealgebrico*. Reti e occorrenze rappresentano altrettanti fili di Arianna che consentono percorsi a ritroso, verso il chiarimento dei concetti e delle relazioni che permettono la comunicazione all'interno delle comunità docente-docente e della comunità docente-alunni.

21. Sinora si è ragionato attorno al Glossario e al rapporto fra il docente e il Glossario. La frase di uno specializzando della SSIS dell'Università di Modena (classe 059) apre una prospettiva di grande interesse per quanto concerne il rapporto fra gli studenti e il Glossario.

“Penso che l'esperienza per un docente sia effettivamente l'aspetto maggiormente formativo, soprattutto se ognuno di noi si mette nell'ottica di 'manifestare' in modo continuo il proprio stile di insegnamento.”

Il testo sottende un'ipotesi stimolante per costruire un controllo stabile di significati: definire un contratto didattico che preveda *l'esplicitazione costante delle motivazioni profonde che guidano l'insegnante nelle sue proposte didattiche*, in modo che gli alunni si abituino a vedere se stessi come compartecipi nella costruzione dei saperi. Il Glossario è ancora lo sfondo del contratto.

22. Concludo con un brano tratto da un articolo di Silvana Ferreri, che con Tullio De Mauro e altri linguisti sta lavorando attorno a Dizionari di nuova generazione che mi sembra sia in sintonia con le riflessioni che ho presentato sul Glossario del Progetto ArAl:

‘... alle parole chiave delle discipline si giunge con un lento lavoro di fondazione dei concetti portanti dei rispettivi ambiti disciplinari. Appropriarsi del significato delle parole, di alcune parole, poche ma significative, rappresenta una via per stabilizzare, concettualizzare, e dominare un sapere disciplinare specifico, i cui contenuti possono altrimenti sfuggire. Insomma la parola viene intesa come traccia permanente di una costruzione di conoscenza, saldata in memoria ad altre parole preesistenti; come capacità di estrinsecazione di uno stadio del processo di conoscenza che si viene configurando,. Parole che esibiscono il grado di controllo della conoscenza. Parole ... [come] porzioni di un sapere che riesce a dare rappresentazione di se stesso.’

Riferimenti bibliografici

Ferreri S., 2005: Parole tra quantità e qualità, in Tempesta I. e Maggio M. (a cura di) *Linguaggio, mente, parole, Dall'infanzia all'adolescenza*, GISCEL; Franco Angeli, 131-146.
 Navarra G., 2005: Primi appunti per un'esplorazione del Progetto ArAl, in Navarra G: (a cura di) *Quaderno ArAl n.5*, 61-70.
 Collana Progetto ArAl, Pitagora Editore, Bologna.