La didattica dell'algebra tra ricerca formazione e pratica di classe

Nicolina A. Malara
Università di Modena & Reggio Emilia

Sunto
In questo lavoro partiamo con l'analizzare le parti delle Indicazioni Nazionali per i Licei dedicate alla educazione algebrica dando due esempi di possibili attività innovative. Richiamiamo poi alcune delle principali ricerche sui problemi di insegnamento/apprendimento dell'algebra focalizzando l'attenzione su questioni legate alla modellizzazione, al problem solving ed alla dimostrazione. Mostriamo come nella evoluzione delle ricerche si sia passati dalle difficoltà di apprendimento alle difficoltà di insegnamento ed al ruolo dell'insegnante e come questo abbia portato all'espandersi degli studi sulla formazione degli insegnanti. Richiamiamo infine alcune nostre recenti ricerche che rendono chiaro il legame tra ricerca, pratiche di formazione degli insegnanti ed innovazione nelle classi.

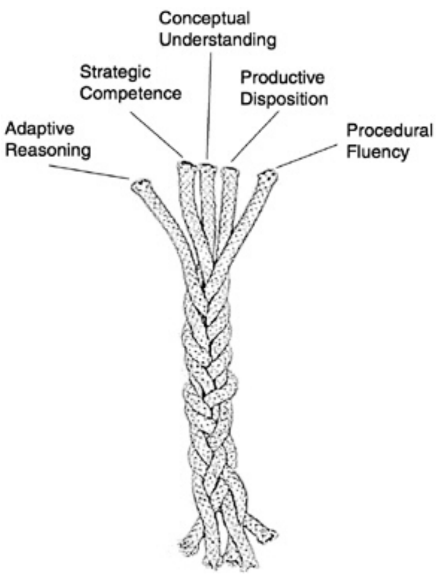
Introduzione

L'immagine dell'Algebra nella nostra società è quella di una disciplina ermetica e difficile. Ciò è testimoniato da detti popolari quali "*... ci vuole l'algebra*" o al contrario *"... non ci vuole mica l'algebra"* usati in situazioni problematiche in cui sia richiesta, o non richiesta, una grande competenza per affrontarle. Il radicamento nell'immaginario collettivo di questa visione è documentato anche in testi poetici. Alda Merini (1991) ad esempio nella poesia "Paura dei tuoi occhi " usa l'espressione "nascosto velluto d'algebra" per indicare l'insondabilità e la distanza di uno sguardo amato e temuto. Questa visione ermetica dell'algebra la si ritrova anche in Jorge Luis Borges (1972): nella poesia "Alla lingua tedesca", lingua da lui considerata di grande fascino e difficile, egli ne esprime l'irraggiungibilità dichiarandola 'lontana come l'algebra e la luna'.
Di questo ermetismo è portatore lo stesso termine 'algebra', la cui origine e significato sono ignoti a molti. Ci piace qui richiamare quanto scrive Paolo Pagli al riguardo (2012): "*Nella cultura araba ... l'atto di 'ricomporre' le varie occorrenze dell'incognita ... era avvertito come se un'entità frammentata venisse riunita raccogliendone i pezzi e gli arabi usarono per questo un termine mutuato dalla medicina, dall'ortopedia, al-jabr, 'restaurazione*'". Pagli fa presente come fino alla prima metà del seicento questo termine fosse ancora in uso in relazione alla medicina popolare, e cita al riguardo un brano del *Don Chisciotte de la Mancia*[1] dove l'algebrista indica un praticone aggiusta ossa.

---

1 Cervantes racconta di un'imboscata tesa a Don Chisciotte da un amico di famiglia con l'idea di costringerlo a ritornare a casa, di come l'amico ne sia invece uscito con le ossa rotte, ossa rimesse in sesto grazie all'intervento di un'algebrista. Queste le parole del Cervantes da cui si

Ma torniamo all'algebra, la sua indecifrabilità ha anche ragioni connesse alla sua storia, ma è determinata di fatto da un insegnamento privo di attenzione ai processi di costituzione degli oggetti della matematica (nel nostro caso espressioni, (dis)equazioni, funzioni) dove l'attenzione è rivolta essenzialmente ai suoi aspetti tecnici, cosa che distorce l'immagine e ne opacizza il significato.
Hans Freudenthal al primo congresso ICME (Lione, 1969) ricorda che "*la matematica è più di una tecnica*" e che "*apprendere la matematica significa conquistare l'attitudine ad un comportamento matematico*". Più recentemente, Kilpatrick *at al.* (2001, p. 116-117), in un ampio studio, promosso dal National Research Council, rivolto alla chiarificazione della matematica da insegnare e far apprendere nella scuola dell'obbligo, parlano di *mathematical proficiency*, traducibile grosso modo in 'competenza matematica', caratterizzandola nei seguenti cinque filoni: 1) *Comprensione concettuale* (*Conceptual Understanding*), intesa come comprensione di concetti, operazioni e relazioni; 2) *Scioltezza nelle procedure* (*Procedural Fluency*), intesa come capacità di eseguire procedimenti con agilità, accuratezza, efficienza e appropriatezza; 3) *Competenza strategica* (*Strategic Competence*), intesa come abilità di formulare, rappresentare e risolvere problemi matematici; 4) *Flessibilità nei ragionamenti* (*Adaptive Reasoning*), intesa come capacità di pensiero logico, riflessione, spiegazione e giustificazione; 5) *Disposizione produttiva (Productive Disposition*), intesa come inclinazione a vedere la matematica significativa, utile, e convenientemente produttiva associata ad uno studio diligente ed assiduo di essa. Gli studiosi sottolineano che tali filoni non vanno visti isolatamente, ma strettamente intrecciati in un complesso unico, come rappresentato dalla figura da loro riportata, ed affermano che la flessibilità nei ragionamenti è il collante che tiene unito ogni cosa, la stella polare che guida l'apprendimento.



Ma queste competenze sono ben lontane da essere conquistate nella nostra scuola. Il test di valutazione internazionale P.I.S.A. rileva negli studenti italiani di 15/16 anni una competenza matematica che si attesta al primo livello delle competenze considerate da tale test., quello della riproduzione, con forti carenze ai livelli di competenza più evoluti, di connessione e di riflessione. Come è noto, tale test dà grande spazio alla matematizzazione in contesti di vario genere ed alla dialettica tra i processi di modellizzazione (dal mondo reale alla matematica) e di interpretazione (dalla matematica al mondo reale). I quesiti sono riferiti a specifici campi di esperienza e ciascuno di essi è articolato in domande successive che investono le quattro aree di contenuto: numeri ed algoritmi, spazio e figure, cambiamento e relazioni, incertezza e dati.

evince il significato medico del termine algebrista "*En esto fueron razonando los duos hasta que, llegaron a un pueblo, donde fue ventura hallar con l'algebrista, con quieren se curò el Sanson desgraciado* (cap. 15, vol. 2, nella trad. Ital . di V. Boldini, Ed. Struzzi, Einaudi , 1980, a pag. 706).

A titolo esemplificativo riportiamo qui un quesito tratto dal test P.I.S.A. 2012, significativo delle competenze previste per i quindicenni e della distanza rispetto a quanto si pratica nelle nostre scuole.

Analisi di un quesito del test P.I.S.A. in relazione alle competenze che richiede
Per renderci conto delle competenze che gli studenti devono mettere in campo nella soluzione dei quesiti del test di valutazione P.I.S.A. esaminiamone uno, particolarmente significativo per l'area aritmetico-algebrica.
Il quesito da noi scelto, denominato 'I Pinguini', è stato proposto nella edizione 2012 del test, e riguarda la modellizzazione in una conveniente espressione della numerosità di una comunità di pinguini in un dato intervallo di tempo, una volta assunte certe ipotesi secondo le quali la popolazione si evolve. Nel riquadro è riportato il suo testo.

I PINGUINI

Quesito 1 (area: quantità)
Normalmente una coppia di pinguini produce due uova all'anno. Usualmente sopravvive solo il piccolo pinguino che nasce dall'uovo più grande. Per i pinguini della varietà 'saltarocce', il primo uovo pesa all'incirca 78 grammi mentre il secondo pesa all'incirca 110 grammi.
Domanda 1*: Approssimativamente quanto è più pesante in percentuale il secondo uovo rispetto al primo?* A: ❒ 29% ; B: ❒ 32% ; C: ❒ 41% ; D: ❒ 71%.

Quesito 2 (area: quantità)
Giovanni desidera studiare come cambierà nei prossimi anni la consistenza della colonia dei pinguini. Per determinare questo egli fa le seguenti assunzioni:

- All'inizio dell'anno la colonia consiste di 10.000 pinguini (5000 coppie).
- Ogni coppia metterà al mondo un nuovo pinguino nella primavera di ogni anno
- In un anno morirà il 20% dei pinguini (adulti e piccoli)

Domanda 2: *Alla fine del primo anno quanti pinguini (adulti e piccoli) ci saranno?*

Quesito 3 (cambiamento e relazioni)
Giovanni assume che la colonia continuerà a crescere nello stesso modo:

- Ogni coppia metterà al mondo un nuovo pinguino nella primavera di ogni anno
- Entro la fine dell'anno il 20% dei pinguini (adulti e piccoli) morirà
- I pinguini con un anno di vita genereranno un nuovo piccolo pinguino.

Domanda 3: *Sulla base delle precedenti assunzioni quale delle seguenti formule descrive il numero totale P dei pinguini dopo 7 anni?*

A: ❒ $P = 10\,000 \times (1.5 \times 0.2)^7$; B: ❒ $P = 10\,000 \times (1.5 \times 0.8)^7$
C: ❒ $P = 10\,000 \times (1.2 \times 0.2)^7$; D: ❒ $P = 10\,000 \times (1.2 \times 0.8)^7$

Per poter rispondere correttamente al quesito è necessario rappresentare in modo non canonico la quantità dei pinguini alla fine del primo anno rendendo trasparente le relazioni intercorrenti tra le quantità coinvolte. Come primo passo occorre perciò rappresentare tale quantità, senza considerare le morti, esprimendo la quantità dei nati mediante quella degli adulti e trasformando la rappresentazione additiva in una moltiplicativa. Ossia: 10.000 +5000 = 10.000 + 0,5x10.000 = 10.000(1+0,5) = 10.000x(1,5). Al secondo passo occorre trasformare l'informazione 'morte del 20%' in termini di 'vita dell'80%' e rappresentare la quantità dei pinguini viventi direttamente

come l’80% della somma tra le due quantità di pinguini (adulti e piccoli nati) trasformando l’operatore di percentuale in numero decimale. La popolazione dei pinguini al primo anno risulta P = 10.000x(1,5)x80% = 10.000x1,5x0,8. Il terzo passo consiste nel riconoscere che il modello di crescita è rappresentato dall’operatore composto 1,5x0,8 che va applicato ogni anno alla quantità di popolazione determinata. La crescita per l’anno successivo si ottiene applicando l’operatore composto 1,5x0,8 alla popolazione al primo anno ossia a 10.000x(1,5)x0,8. Al secondo anno la popolazione totale sarà così: 10.000x(1,5x0,8)x(1,5x0,8) = 10.000x$(1,5x0,8)^2$. Iterando il procedimento al 7 anno la popolazione sarà 10.000x$(1,5x0,8)^7$.
Questo tipo di quesito è molto lontano da ciò che comunemente si pratica nelle nostre scuole, dove raramente gli studenti sono chiamati ad esplorare situazioni realistiche ed a operare semplificazioni, assumere ipotesi ecc, ed ancor più a rendere trasparenti i processi di calcolo ai fini di una loro generalizzazione.
Tenendo conto della pratica d’insegnamento nelle nostre scuole viene spontaneo chiedersi se gli attuali programmi per la matematica siano in linea con queste visioni della matematica e del suo insegnamento.

L’algebra nelle indicazioni nazionali
Le recenti Indicazioni Nazionali per i curricoli della nostra scuola, articolate in Indicazioni Nazionali per i Licei (2010) ed Indicazioni Nazionali per l’Infanzia ed il Primo Ciclo di Istruzione (2012), risentono dello stato di involuzione politico-sociale in cui sono maturate. Esse presentano un arretramento rispetto al *Matematica 2001-2003-2004* (Anichini et al. 2001-2004), progetto di forte innovazione metodologico-curricolare, mai entrato in vigore, messo a punto dalla commissione UMI-MIUR nell’ambito della riforma Berlinguer, ed anche rispetto ai programmi entrati in vigore dopo il 2003 (nell’ordine i Programmi ‘Moratti’ e le Indicazioni Nazionali ‘Fioroni’).
Nelle attuali Indicazioni Nazionali per la scuola dell’obbligo, a differenza del Matematica 2001, non c’è alcun elemento che indichi una qualche apertura verso attività di tipo pre-algebrico ormai presenti nei curricoli di molti paesi di area occidentale (si veda Malara 2012), vi è solo un generico riferimento alle relazioni, ma in associazione alla statistica, ed una isolata menzione delle successioni.
Nelle Indicazioni Nazionali per i Licei per l’algebra domina una visione legata al calcolo con una forte proiezione alle applicazioni. Completamente assenti sono sia attività tipiche dell’approccio generativo, sia relative agli aspetti strutturali. Questo l’incipit degli obiettivi specifici per l’Aritmetica e Algebra al I biennio: *“Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico”,* frase questa che rileva il permanere di una visione prettamente tecnica dell’algebra. Di seguito sono riportati in sequenza obiettivi per lo più legati ad argomenti aritmetici ed in fondo si conclude con l’asserzione *“Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un’equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica”,* frase che costituisce l‘unica apertura verso una visione dell’algebra legata alla produzione di pensiero. Esaminiamo ora due esempi di attività innovative, possibili in questo quadro.

Due esempi di attività

Gli esempi di attività proposti sono in linea con le Indicazioni Nazionali, il primo di tipo aritmetico, nuovo per le nostre classi, il secondo relativo ad un argomento classico dell'insegnamento dell'algebra, ma considerato in un'ottica non usuale.

4.1. Il primo esempio

Il primo esempio riguarda l'esplorazione di una tabella numerica, riportata in appendice, costituita da numeri naturali compresi tra 100100 a 999999 che hanno una particolare caratteristica formale. Il compito degli studenti è: leggere la tabella, individuare ed esplicitare il carattere dei numeri considerati, rappresentarli in termini generali e, cosa più importante, indagare se la struttura che li contraddistingue dia luogo a specifiche loro proprietà. (Può anche essere interessante porre agli studenti il problema di elencare tali numeri per analizzare i criteri di elencazione adottati).

Per gli studenti sarà abbastanza facile individuare che si tratta dei numeri di sei cifre ottenibili per giustapposizione di un numero di tre cifre a sé stesso. Si tratta in totale dei 900 numeri naturali ottenibili al variare della prima cifra tra 1 e 9 e della seconda e terza cifra tra 0 e 9.

E' difficile a prima vista cogliere possibili proprietà comuni a questi numeri, conviene per questo lavorare su alcuni di essi. Si può cominciare ad esaminare i primi dieci numeri della prima colonna della tabella. La loro struttura induce la rappresentazione di ciascuno come somma di due specifici addendi, il primo multiplo del secondo: 100100= 100000+100; 110110 = 110000 + 110; 210210 = 210000 + 210; 310310 = 31000 + 310; 410410 =410000 +410; … 990990 = 990000 +990. L'esplicitazione della correlazione tra i due addendi porta a dire che in ognuno il primo addendo è pari al prodotto del secondo per 1000: $100000 = 100\times1000$, $110000 = 110\times1000$; $210000= 210\times1000$; così analogamente fino a $990000= 990\times1000$. Questa prima regolarità consente, grazie alla proprietà distributiva, a passare ad una rappresentazione moltiplicativa dei numeri: $100100= 100000+100 = 100\times1000+100 = 100(1000+1)$; $110110 = 110000 + 110 = 110\times1000+110 = 110\times(100+1)$; ed analogamente 990000=990x1000+990 = 990(1000+1). Questa regolarità vale anche per altri numeri della tabella che, a differenza dei precedenti, hanno la terza cifra non nulla, ad esempio vale anche per il numero 412412: esso è 412000 +412, 412000 è pari a 412×1000 e perciò il numero 412412 può essere scritto come $412\times(1000+1)$. E' proprio il tipo di struttura dei numeri in esame che ci mostra, al di là del valore delle singole cifre, che ciascuno di essi è rappresentabile moltiplicativamente mediante due fattori, il primo è il numero costituito dalle prime tre cifre in successione (e perciò stesso variabile al variare del numero nella tabella) il secondo costante e pari al numero 1001. *L'analogia tra i casi numerici esaminati porta alla congettura che questa proprietà valga in generale.* La difficoltà che si presenta a questo punto è la determinazione della rappresentazione algebrica del generico elemento della tabella. Spesso gli studenti scrivono impropriamente abcabc con a, b, c naturali da 0 a 9 ed a non nullo. Questa traslitterazione ingenua nel passaggio dal particolare al generale didatticamente offre spunti interessanti per la discussione perché consente all'insegnante di ragionare con gli studenti circa la correttezza della nuova scrittura, a comprenderne l'ambiguità (data la convenzione nel calcolo letterale di omettere il segno di moltiplicazione) e della necessità di passare alla rappresentazione polinomiale del numero. Una volta determinata la corretta rappresentazione algebrica $a\times10^5+ b \times 10^4 + c \times10^3+ a \times 10^2 + b \times 10 + c$, La dimostrazione della validità generale

della proprietà osservata consiste nella catena delle seguenti trasformazioni, ottenibili grazie alla proprietà distributiva $(a\times10^5+ b \times 10^4 + c \times10^3)+ a \times 10^2 + b \times 10 + c =$ $10^3 (a \times 10^2 + b \times 10 + c) + a \times 10^2 + b \times 10 + c = (+ a \times 10^2 + b \times 10 + c)(10^3 +1)$.
Questa dimostrazione fa emergere il numero 1001 come fattore comune a tutti i numeri della tabella. Spostando l'attenzione su tale fattore, poiché esso può scriversi come 990+11 ed essendo 990= 90x11, sempre per la proprietà distributiva 1001 = 11(90+1), 11 appare così divisore dei numeri in questione, essendo a sua volta 90 = 70+20 il fattore 90+1 diviene 70+21 che si può scrivere 7x10+7x3= 7x(13). Il numero 1001 è rappresentabile pertanto come prodotto dei tre numeri primi consecutivi 7, 11, 13. Ciascuno di tali primi è allora divisore di ogni numero della tabella. Questa è una regolarità difficilmente prevedibile. Va rilevato che per giungere a tale risultato non sì è proceduto con la scomposizione in fattori primi (che ha come base il teorema fondamentale dell'aritmetica e peraltro non sempre è cosa eseguibile con facilità) ma il ragionamento si è sviluppato sulla base di opportune rappresentazioni non canoniche del numero 1001.

4.2. Il secondo esempio

Questo esempio riguarda un riesame del così detto 'criterio di Ruffini' usato per la ricerca di eventuali zeri di un polinomio a coefficienti reali. Questo criterio è solitamente presentato nelle classi come cieco schema operativo, senza soffermarsi con gli studenti sul perché funzioni e perché conviene usarlo. Crediamo che per portare gli studenti a comprenderne il senso occorra analizzare con loro le ragioni della valenza ed economicità del procedimento. Innanzi tutto va con loro considerato che per calcolare il valore assunto da un polinomio per una data occorrenza della variabile occorre eseguire un numero di operazioni che cresce vistosamente al crescere del suo grado. Se il polinomio è di grado n occorre eseguire n addizioni sugli n+1 addendi e per ogni addendo occorre eseguire un numero di moltiplicazioni pari al grado di esso. Il numero totale delle operazioni è perciò n + (n+ (n-1) + …+2+1), che per la nota formula della somma dei primi n numeri naturali diviene n+ n(n+1)/2. Già per il 5 grado occorrono 20 operazioni. Conviene perciò cercare riscritture di un polinomio che consentano di eseguire un numero di operazioni minori rispetto a quelle previste dalla sua rappresentazione canonica. Per questa ragione esaminiamo trasformazioni di un polinomio di secondo grado, di uno di terzo, di uno quarto grado, effettuate con uno stesso criterio ispiratore, cercando delle regolarità.
Un polinomio di secondo grado $a_2x^2 + a_1x + a_o$, per la proprietà distributiva applicata ai primi due termini è riscrivibile come $x(a_2x + a_1) + a_o$. Così riscritto il calcolo del polinomio per un valore α attribuito alla x richiede 2 addizioni e 2 moltiplicazioni contro le 5 previste dalla rappresentazione canonica. Un polinomio di terzo grado $a_3x^3+ a_2x^2 + a_1x + a_{o.}$, per la proprietà distributiva è riscrivibile come $x^2(a_3x+ a_2) +a_1x + a_o$ ed ancora per la stessa proprietà applicata ai nuovi primi due termini è riscrivibile come $x (x(a_3x+ a_2) + a_1) + a_o$. Questa riscrittura prevede per il calcolo in α del valore del polinomio 3 addizioni e 3 moltiplicazioni contro le 9 previste dalla rappresentazione canonica. Un polinomio di quarto grado $a_4x^4 + a_3x^3+ a_2x^2 + a_1x + a_{o.}$, sempre per la proprietà distributiva applicata a passi successivi sui primi due termini per tre volte, può scriversi $x^3(a_4x+ a_3) +a_2x^2+ a_1x + a_o = x^2 (x(a_4x+ a_3) + a_2) + a_1x + a_o$ $= x (x(x(a_4x+ a_3) + a_2) + a_1) + a_o$. Per calcolare il valore in α del polinomio con tale procedimento occorrono 4 addizioni e 4 moltiplicazioni contro le 14 previste dalla

rappresentazione canonica. In generale se il polinomio è di grado n, applicando la proprietà distributiva in n-1 passi trasformativi dei successivi primi due termini, si giunge ad una rappresentazione che, per calcolarne il valore in α, richiede 2n operazioni (n addizioni ed n moltiplicazioni) contro le n+ n(n+1)/2 operazioni previste dalla rappresentazione canonica. Ecco perciò che la riscrittura del polinomio per annidamenti successivi di opportuni termini acquista significato e rende chiara l'introduzione dello noto schema, utile per meccanizzare il calcolo dei vari termini annidati.

Le indicazioni della ricerca

Dagli anni '60 del secolo scorso il movimento della matematica moderna ha portato ad una profonda revisione ed innovazione dei contenuti di insegnamento della matematica. Ciò ha comportato in tutto il mondo un notevole investimento di ricerca per la qualificazione della didattica della matematica. Il progressivo consolidarsi di questo campo di studi ha portato alla costituzione di tale disciplina sia a livello di ricerca che a livello di insegnamento universitario. Come A. Sfard (2005) ha ben messo in luce, in cinquanta anni vi è stata una evoluzione degli studi segnata dal succedersi di tre periodi, rispettivamente rivolti ai contenuti dei curricoli, agli apprendimenti degli studenti ed alle loro difficoltà, alla figura e ruolo dell'insegnante ed ai problemi della sua formazione (iniziale ed in servizio). Nella tabella riportata sono indicati i principali temi affrontati nel succedersi di tali periodi.

Periodo	Focus delle ricerche	Principali tematiche affrontate
1970-80	Contenuti di insegnamento	• innovazione dei curricoli • Studi diagnostici sulle abilità degli studenti • Analisi epistemologico-didattica di dati contenuti • Proposte 'a tavolino' di innovazione per dati contenuti (nuovi o rivisitati alla luce di nuovi saperi/concezioni).
1980-2000	Apprendimenti degli studenti e loro difficoltà	Sperimentazioni di innovazione didattica e studi sul superamento di difficolta di apprendimento degli studenti. Apertura verso: a) la scoperta matematica, il problem solving e il problem posing, l'argomentazione e la dimostrazione; b) le modalità socio-costruttive di insegnamento; c) le nuove tecnologie (dalla programmazione all'uso di software didattici)
Dal 2000 ad oggi	Figura dell' insegnante e suo ruolo nei processi di insegnamento/ apprendimento	Conoscenze, convinzioni, emozioni, consapevolezze dell'insegnante. Atteggiamenti e comportamenti dell' insegnante nell'insegnamento/apprendimento di dati contenuti matematici e nelle interazioni insegnante-allievi. Caratteri della formazione iniziale e metodi della formazione in servizio

Per quanto riguarda la didattica dell'algebra gli studi si sono evoluti nelle seguenti tappe: 1. Studi di rilevamento delle competenze degli studenti in algebra; 2. Studi sulle difficoltà di apprendimento; 3. Studi sperimentali di innovazione; 4. Teorizzazioni e modelli di insegnamento; 5. a) Apertura alle attività generazionali e all'oggettivazione dell'early algebra, b) Apertura alle attività algebriche di tipo-meta (modellizzazione, problem solving, dimostrazione) anche attraverso l'uso delle nuove tecnologie; 6. Studi di processi didattici di innovazione in algebra e analisi del ruolo dell'insegnante. Nel successivo paragrafo ci soffermiamo su alcuni di questi studi illustrandoli nel loro concatenamento.

6. Studi paradigmatici in didattica dell'algebra

Tra i primi più significativi studi in didattica dell'algebra segnaliamo lo studio diagnostico di Kucheman (1981), svolto a livello nazionale nel Regno Unito e riguardante le competenze possedute dagli studenti dagli 11 ai 16 anni in Algebra. Tale studio si basa sulla proposizione di 30 quesiti in ambito numerico-algebrico raggruppati secondo 4 livelli di difficoltà crescente. Dall'esame dei quesiti proposti emerge una visione dell'algebra che va ben al di là della capacità di semplificare espressioni o risolvere equazioni. A titolo esemplificativo riportiamo alcuni quesiti risultati tra i più difficili per gli studenti

1. L+M+N = L+P+N   Sempre? Qualche volta (quando?), Mai?
2. Che cosa rappresenta 4c+3b se i dolci costano c pence ciascuno, i biscotti b pence ciascuno, sono stati comprati 4 dolci ecc … ?
3. Se $(x+1)^3 + x = 379$ quando $x = 6$ qual è il valore di x che verifica l'uguaglianza $(5x+1)^3 + 5x = 379$
4. Chi è più grande 2n o n+2? Spiega
5. Sono state comprate 6 penne rosse e 5 penne blu quale il costo totale.

Come appare evidente i quesiti si collocano prevalentemente sul doppio piano della rappresentazione algebrica (es.5) e della interpretazione di formule sia in riferimento ad un contesto realistico (es.2), sia matematico (es. 1 e 3); in questo ultimo caso si punta inoltre a verificare negli studenti il controllo dei significati delle scritture formali e la loro capacità di elaborare piccoli ragionamenti sul piano formale.

Negli anni 70-80 molti sono gli studi di indagine circa i problemi di insegnamento apprendimento dell'algebra. Segnaliamo gli studi di Ursini (1990) rivolti alle difficoltà di apprendimento nell'uso delle lettere con particolare riferimento al passaggio dalla lettera col significato di numero generico a quello di variabile. Di particolare impatto per la loro ricchezza e significatività sono i survey di Keran (1989, 1992). In essi la studiosa raccoglie una serie di studi di analisi su frequenti comportamenti errati degli studenti, ne oggettiva il carattere e ne indica la presumibile origine. Queste le principali concettualizzazioni improprie, carenze e influenze negative rilevate, dovute secondo la studiosa ad un insegnamento unicamente procedurale dell'aritmetica:

- Direzionalità del segno "uguale", inteso come dà luogo, conseguenza di tipiche attività aritmetiche legate alla risoluzione di problemi ed alla semplificazione di espressioni, cosa che porta alla incapacità di invertire uguaglianze o di espandere espressioni (ad esempio trasformare a^2+2a in $(a+1)^2 -1$);

- Necessità di chiusura di semplici espressioni. Ad esempio, espressioni come 5+b o 3c + 9 vengono solitamente uguagliate a zero, l'origine sta nella mancata legittimazione in aritmetica di rappresentazioni numeriche non canoniche. es. 3+5 è visto come procedimento aritmetico non come quantità numerica.
- Mancata concettualizzazione delle proprietà aritmetiche. Ad esempio, espressioni come 685+492+947 e 947+492+947 o come 42+14+ 35 e 7×(5+2+6) non vengono riconosciute uguali senza fare i calcoli.
- Influenza negativa dell'uso delle marche nella risoluzione di problemi . Gli studenti vedono le lettere come appendici ed, ad esempio, trasformano 3x+7,5y in 10,5xy.

Both (1989), prendendo spunto da tali studi, rimarca che l'accumulo dei risultati della ricerca degli anni ottanta porta alla confutazione della diffusa convinzione che le ragioni delle difficoltà degli studenti siano insite nell'apprendimento della sua sintassi ed alla evidenziazione del fatto che molte di esse dipendano dalla mancata comprensione degli studenti di relazioni aritmetiche.
In questo quadro, pionieristici sono gli studi di A. Bell il quale affronta studi esplorativi sul problem solving dimostrativo in ambito aritmetico e documenta anche in ragazzi bravi nel calcolo algebrico difficoltà e inabilità a concatenare scritture algebriche per dedurre nuove informazioni (Bell, 1976). Bell sostiene che il superamento di queste difficoltà può avvenire se nell'insegnamento gli studenti vengono condotti ad esperire il *ciclo algebrico essenziale* caratterizzato da tre tipologie di attività algebriche: 1) *rappresentare,* 2) *manipolare,* 3*) interpretare*.
In quel periodo vengono proposti interessanti progetti per l'educazione matematica per allievi dagli 11 ai 16 anni (Bell & Al., 1985; Harper, 1987) dove è promosso l'uso delle lettere come strumento di rappresentazione sia di espressioni verbali esprimenti regolarità osservate nel reale sia di sintesi di relazioni numeriche analoghe per la generalizzazione.
Tutto questo porta gli studiosi a concepire, durante l'ICME VII (Laval, Quebec, 1992) nuovo filone di studi rivolto a favorire la transizione tra aritmetica ed algebra. Nasce un'area di insegnamento cuscinetto, detta pre-algebra (Linchevski, 1995), caratterizzata da una serie di attività finalizzate a:

- vedere il generale nel particolare ed a promuovere processi di generalizzazione;
- rilevare analogie o differenze nella struttura di espressioni aritmetiche, attraverso l'analisi dei processi di calcolo rappresentati, considerando l'ordine delle operazioni ed evidenziando il ruolo delle parentesi;
- risolvere con procedimenti ingenui equazioni, dando spazio a strategie di sostituzione numerica ed a tentativi ragionati e puntando, attraverso la riflessione sulle strategie attivate, alla costruzione di opportuni schemi cognitivi;
- avviare alla risoluzione di problemi verbali algebrici attraverso procedimenti esplorativi ponte tra metodi aritmetici ed algebrici, (come ad esempio quelli di 'falsa-posizione').

Le sperimentazioni e gli studi realizzati in quest'area portano poi alla costituzione dell'Early Algebra (Malara 2009, Malara & Navarra 2003), area disciplinare oggi presente esplicitamente nei curricoli di diversi paesi (Cai 2005).
Negli stessi anni molte sono le ricerche sui problemi verbali algebrici, esse riguardano: a) l'analisi di problemi dal punto di vista cognitivo e delle difficoltà di soluzione (Vergnaud 1989 PME, Cortes et al. 1990, Filloy & Rojano 1989, Mac Gregor 1991);

b) l'analisi delle tipologie di problemi presenti nei libri di testo e la loro classificazione a seconda della combinazione delle relazioni espresse e lo studio delle strategie risolutive degli studenti (Bernardz et al. 1992 o 1994) c) la valorizzazione da un punto di vista didattico di problemi della storia dell'algebra e di antichi metodi di risoluzione (Mason 1996, Radford 1996); d) l'attuazione di percorsi didattici innovativi centrati sui problemi (Bell et Al. 1988, Da Rocha Falcao 1995, Malara 1999) e) l'uso di software specifici per lo studio di problemi e l'analisi degli effetti di questo sul piano cognitivo (Rojano & Sutherland 1991 1997, Garançon et al. 1990, 1993).

In quegli stessi anni centrale sono considerati il problema della modellizzazione algebrica ed il problema del coordinamento tra i linguaggi verbale ed algebrico. Celebre per il dibattito che suscita tra i ricercatori è uno studio di Clement et al. (1981) in cui si documentano prestazioni errate di studenti bravi di fronte ai seguenti questiti:

a) *In una università ci sono sei volte tanti studenti quanti professori* (Traduci in linguaggio algebrico. Usa S per indicare la quantità di studenti è P per indicare la quantità di professori);
b) *Al ristorante di Mindy's per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ve ne sono cinque che ordinano strudel* **(**Traduci in linguaggio algebrico. Usa C per indicare il numero di cheesecake ordinati ed S per indicare il numero di strudel ordinati).

Il primo presenta la difficoltà di indurre la traduzione letterale 6S = P, errata, in chi segue pedissequamente la successione linguistica dei termini in gioco. L'auto correzione può avvenire solo se gli studenti vengono educati ad operare sul piano interpretativo, esercitando un controllo dei significati delle scritture che producono in relazione alla situazione in esame. La seconda presenta la difficoltà del riconoscimento di una relazione di proporzionalità, rappresentabile attraverso la proporzione ottenuta uguagliando il rapporto C/S delle due quantità incognite in gioco al rapporto 4/5.

Le ricerche in quest'ambito evidenziano l'opportunità di lavorare con gli studenti alla traduzione formale di frasi con dati incogniti prima ancora di affrontare la risoluzione dei problemi algebrici. I ricercatori sostengono inoltre che lo studio di tali problemi dovrebbe essere proposto *prima* dello studio formale delle equazioni. Essi considerano importante portare gli studenti a generare equazioni attraverso la rappresentazione delle relazioni che intercorrono tra i dati (noti e incogniti) di un problema in modo che questi giungano a comprendere la significatività e l'opportunità del loro studio autonomo.

Un'altra loro indicazione importante è che gli studenti siano posti di fronte a problemi che li inducano ad apprezzare la valenza della codifica simbolica come strategia efficace per affrontare problemi difficilmente risolubili per via verbale. Un problema classico al riguardo è quello del peso del pesce proposto da Bell et al. (1987):

La coda di un pesce pesa 4 kg. Il corpo pesa quanto la testa e la coda insieme, la testa pesa quanto la coda e metà corpo. Quanto pesa il pesce?

E' difficile connettere verbalmente le relazioni espresse dal testo di tale problema, cosa che viene aggirata con la rappresentazione algebrica: assegnati i nomi b, h, t, w ai pesi rispettivamente del corpo della testa della coda e del pesce le relazioni sono facilmente traducibili in: $w = b+h+t$; $b = h + t$; $h = t + (1/2)b$; $t = 4$ ed operando su i esse, grazie al principio di sostituzione, si giunge facilmente alla soluzione.

Suggeriscono inoltre, quando possibile, di risolvere uno stesso problema sia con ragionamenti intuitivi sia algebricamente e poi di procedere al confronto tra le due strategie. Si consideri ad esempio il problema**:**
Una signora ha delle caramelle da distribuire ai suoi nipotini. Se gliene dà 5 ciascuno gliene rimangono 5. Ma non può dargliene 6 ciascuno perché gliene mancherebbero 3. Quanti sono i nipotini della signora?
Esso può essere facilmente risolto per via aritmetico-intuitiva, basta osservare che dalla prima informazione si trae che a 5 nipotini si possono dare 6 caramelle, dalla seconda si trae che dando 6 caramelle ciascuno solo 3 nipotini rimangono senza la sesta caramella Di conseguenza, il numero totale dei nipotini risulta 5 + 3. E' interessante, nel caso della soluzione algebrica, lavorare con gli studenti sul piano interpretativo ripercorrendo il processo di ragionamento insito nelle trasformazioni sintattiche attuate. Indicando con c la quantità totale di caramelle e con n il numero dei nipotini, le due informazioni consentono di rappresentare in due modi diversi la quantità di caramelle: $c = 5n+5$ e $c = 6n-3$. Uguagliando le due rappresentazioni si ha: $5n+5 = 6n-3$. Questa rappresentazione consente una semplificazione sintattica: la cancellazione del termine 5n da entrambi i lati, cosa che porta ad una nuova relazione: $5 = n -3$ la cui interpretazione letterale porta a dire che 5 è ciò che si ottiene sottraendo 3 dal numero dei nipotini della signora, pertanto il numero dei nipotini è 5+3.
Nella conferenza generale tenuta all'ICME 8 (Siviglia 1996) Kieran (1998) caratterizza l'algebra da portare nelle classi in tre tipologie di attività da sviluppare in modo intrecciato e sinergico. La studiosa pone ad un primo livello le *attività generazionali*, che riguardano l'esplorazione di situazioni in vari contesti che consentono di costruire gli oggetti dell'algebra ancorandone i significati all'esperienza; ad un secondo livello le *attività trasformazionali* classiche arricchite sul piano concettuale dal controllo delle proprietà che le legittimano, ad un terzo livello *attività avanzate di livello meta*, quali il problem solving e la dimostrazione, dove l'algebra è utilizzata come strumento di produzione di pensiero. Kieran sottolinea la necessità di devolvere più tempo alle attività di terzo livello poiché queste inducono gli studenti ad affrontare attività trasformazionali in modo naturale dal momento che è il significato che guida e supporta la manipolazione algebrica.
Pressoché negli stessi anni vi sono importanti studi sulla didattica dell'algebra che evidenziano l'importanza nell'insegnamento del coordinamento tra piano semantico e piano sintattico dando grande enfasi al piano interpretativo.
Arcavi (1994) in un lavoro oggi ritenuto un classico, sottolinea l'importanza che gli studenti raggiungano la consapevolezza che il linguaggio algebrico costituisce un potente strumento per capire, esprimere e comunicare generalizzazioni, stabilire connessioni, produrre argomentazioni e dimostrazioni. Egli propone una didattica dell'algebra finalizzata allo sviluppo del *Symbol Sense,* espressione che condensa competenze quali: scegliere oculatamente le variabili attraverso cui rappresentare le relazioni in situazioni in gioco; trasformare espressioni ad hoc, con flessibilità, intelligenza e visioni di insieme, evitando circolarità, mantenendo attenzione costante sui significati dei simboli e riuscendo a selezionare tra i possibili quelli funzionali allo sviluppo della situazione in gioco; saper vedere nuovi significati di una espressione attraverso sue forme equivalenti.

MacGregor e Price (1999) inoltre, in riferimento alla capacità di controllare i significati delle espressioni, sottolineano di dedicare spazio nell'insegnamento dell'algebra ad attività che portino gli allievi all'acquisizione di una *consapevolezza metalinguistica*. Le studiose distinguono tra *consapevolezza dei simboli*, relativa alla capacità di individuare i segni matematici relativi a referenti del mondo reale e di riuscire a manipolarli, e *consapevolezza sintattica*, relativa alla capacità di riconoscere la forma delle espressioni algebriche e di controllare, attraverso la struttura sintattica, sia i significati di tali espressioni che le inferenze che possono essere dedotte da esse.
La consapevolezza metalinguistica interviene nella soluzione di svariati problemi. Consideriamo ad esempio il seguente quesito (tratto dalla prova INVALSI 2011): *Il polinomio* $x^4 -16$ *è divisibile per :* ❒ $x^2 -8$; ❒ $x-4$; ❒ $x+2$; ❒ $(x-2)^2$. La corretta risoluzione di esso richiede il riconoscimento di 16 come quarta potenza di 2, l'attivazione della identità sulla differenza di quadrati $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, l'adattamento di essa alla differenza $x^4 -16$, lo spostamento del problema sul fattore $x^2 -4$ ed il riconoscimento del termine $x+2$ come fattore di esso.
Senso del simbolo e consapevolezza metalinguistica stanno alla base dello sviluppo del *pensiero anticipatorio* (Arzarello & Altri 1994, Boero 2001), ossia la capacità di: ipotizzare scritture formali a cui pervenire per poter affermare certi risultati; prevedere, senza svolgere trasformazioni sintattiche, possibili nuove forme di una certa espressione vagliandone i significati in relazione ad un dato scopo; attivare interpretazioni di una forma algebrica secondo prospettive diverse. In particolare, Arzarello & Altri (1994) propongono una visione dell' *algebra come strumento di pensiero* centrata sul potere espressivo delle scritture formali, che evolvono nel tempo verso forme linguistiche sempre più complesse e sofisticate. Concentrano l'attenzione dello studente verso la molteplicità di sensi che una formula può incorporare. Introducono il costrutto di *frame concettuale*, come "insieme organizzato di conoscenze (enti matematici, loro proprietà, algoritmi, strategie di ragionamento…), che suggeriscono ad un soggetto come ragionare, manipolare formule, anticipare risultati, quali ad esempio nella teoria elementare dei numeri, i frame: 'pari/dispari', 'multipli', 'numeri primi', 'scomposizione in fattori', etc.. Sottolineano la dimensione soggettiva della nozione di frame concettuale poiché riguarda ciò che l'allievo ha incorporato circa un dato insieme di conoscenze, alla gamma di azioni che vengono sollecitate in lui, alle aspettative implicate dalla loro attivazione. Chiamano 'mondo risolutivo' un ambiente nel quale un allievo produce un interpretante in riferimento ad una situazione problematica e vedono lo sviluppo del pensiero algebrico come "gioco di interpretazioni attraverso mondi risolutivi diversi". Tali studiosi sostengono che la dimostrazione di congetture è attività tipica nella quale gli studenti sono chiamati ad operare con flessibilità un efficiente gioco di interpretazioni. Cruciale per questo non è solo la padronanza nella manipolazione simbolica, quanto la qualità e la quantità di pensieri anticipatori che lo studente è in grado di mettere in atto in relazione alle possibili nuove forme di una espressione nell'ipotesi di una sua trasformazione. La capacità di produrre pensieri anticipatori è a sua volta strettamente connessa alla flessibilità nell'effettuare cambiamenti di frame per interpretare una data espressione e nel controllare le mutue relazioni tra frame concettuali attivati e il passaggio da un frame ad un altro in uno specifico mondo risolutivo.

Le indicazioni che si traggono per la pratica di classe da tutti questi studi riguardano le attività di generalizzazione in riferimento a:

- Studio di problemi verbali algebrici coinvolgenti una o più incognite, modellizzabili con (dis)equazioni o disequazioni:
- Esplorazioni numeriche per l'individuazione di proprietà, formulazione di congetture e dimostrazione
- Esplorazione di situazioni coinvolgenti più variabili per l'identificazione di relazioni funzionali binarie
- Esplorazione di successioni figurali e numeriche soggiacenti a leggi da individuare e rappresentare.

Tali attività richiedono l'attivazione di modellizzazioni; trattamenti sintattici ragionati; cambiamenti di frame; giochi di interpretazione; pensieri di anticipazione; tutte abilità connesse ad una visione dell'algebra come strumento per di pensiero.
Ci soffermiamo adesso su alcuni aspetti didattici in riferimento all'iniziazione degli allievi alla costruzione di dimostrazioni via linguaggio algebrico.

La dimostrazione via linguaggio algebrico
Contrariamente a quanto indicato dalla ricerca e dalle stesse indicazioni nazionali, nella nostra scuola sono completamente assenti le attività di formulazione di congetture e di loro dimostrazione in connessione con l'esplorazione di situazioni, come nell'esempio da noi riportato sulle esplorazioni numeriche. Molteplici nei vari paesi sono le ricerche al riguardo, in Italia vi sono studi di innovazione didattica che danni indicazioni preziose ed utili agli insegnanti su come affrontare tali attività nelle classi (per approfondimenti si vedano Malara 2009, Cusi 2010, 2012). In questo quadro, ci limitiamo a segnalare un problema didattico che sarebbe opportuno considerare appena si introducono gli studenti alla modellizzazione algebrica.
Molto spesso nella prassi didattica si fa riferimento a proprietà aritmetiche che vengono accettate intuitivamente, ad esempio: "la somma di due pari è pari"; "il quadrato di un dispari è dispari"; "il prodotto di due naturali consecutivi è pari"; e non si richiede agli studenti di dare una giustificazione della loro validità, né si educano a rappresentare in termini generali specifiche proprietà di un numero, quali: "essere pari", "essere dispari, "essere consecutivo di un numero". Queste tacite assunzioni di fatto vengono tarpare la possibilità degli studenti di affrontare attività dimostrative di un qualche rilievo. Nell'insegnamento occorre perciò non solo porre loro il problema di esplicitare le ragioni della validità di una proposizione ma anche educare gli studenti ad esprimere formalmente i loro pensieri, aiutandoli a controllare i processi di traduzione tra linguaggio verbale ed algebrico. Questo consentirà loro di costruirsi il retroterra esperienziale per affrontare problemi dimostrativi per i quali il ricorso al linguaggio algebrico è essenziale. Questo un esempio di problema dimostrativo non risolubile per via verbale: *Dati due numeri interi a e b se 3a = 2b allora la somma a+b è multiplo di 5.* Il problema ha una difficoltà intrinseca, poiché coinvolge le strutture additive e moltiplicative, cosa che richiede il coordinamento tra i due ambienti e la conversione di rappresentazioni. La sua soluzione si basa su un teorema di teoria elementare dei numeri che spesso non è una conoscenza oggettiva ed esplicita degli studenti: *se un numero divide un prodotto ed è primo con un fattore allora deve dividere il rimanente fattore*. Questa la dimostrazione: Da 2a = 3b, per il teorema

citato, segue che b risulta pari. Ponendo b = 2h, sostituendo e dividendo per 2 segue che a = 3h. Il numero a+b è allora rappresentabile mediante h ossia a+b = 3h +2h e per la proprietà distributiva segue l'asserto. Questo esempio è particolarmente interessante perché il controllo del processo dimostrativo e la consapevolezza dei fatti che ne stanno alla base porta a vedere immediatamente la sua generalizzazione: basta considerare l'uguaglianza di multipli di due numeri rispetto a fattori primi tra di loro. Si genera così il più generale teorema: *se due numeri a e b sono tali che ua = vb con MCD (u,v)=1 allora a+b è divisibile per u+v*. La dimostrazione si può ottenere dalla precedente, leggendola in termini generali ed operando semplici variazioni formali. Questa è un'altra importante attività meta che deve essere indotta dall'insegnante. Questo esempio ci porta a spostare l'attenzione sul ruolo dell'insegnante nella classe.

Il ruolo dell'insegnante

L'insegnamento con modalità socio-costruttive richiede nell'insegnante la capacità di assumere vari ruoli nella classe: provocatore, facilitatore, maieuta, guida operativa, modello, guida riflessiva, … ed in relazione a ciascuno di tali ruoli di prefigurarsi i problemi che può incontrare sul campo. Gli insegnanti non possiedono affatto queste competenze e questo richiede una profonda riconversione delle loro conoscenze, convinzioni e comportamenti, purtroppo radicati nelle esperienze di insegnamento ricevuto.

A livello internazionale, già dagli anni 90, vengono realizzati studi *con e per insegnanti* finalizzati a produrre in questi la messa in discussione delle proprie convinzioni circa la matematica ed il suo insegnamento, ad acquisire consapevolezza dei ruoli da svolgere e della rete delle micro-decisioni coinvolte nel lavoro di classe, ad assumere nuovi e più appropriati modelli di comportamento. Tali studi divengono nel tempo più articolati e complessi finendo con il delineare interessanti modelli di formazione degli insegnanti (si vedano ad esempio Goos 2013, Jaworski 2006, Cusi et al. 2011, Mason 2008, Roesken 2011, Schoenfeld 2013, Simon 2013, Sowder 2007). In parecchi di tali studi si sottolinea l'importanza della riflessione critica dell'insegnante sulla propria attività di classe, perché egli acquisisca controllo di sé nell'azione e competenza nell'affrontare situazioni improvise, e si sostiene che nelle pratiche di formazione l'insegnante debba essere portato ad analizzare le proprie azioni, a riflettere sulle ragioni che le hanno prodotte ed a riconoscere l'influenza di esse sullo sviluppo della costruzione matematica degli allievi.

Specifici studi sostengono che nelle pratiche laboratoriali per gli insegnanti rivolte al problem solving algebrico ed alla dimostrazione occorra portare gli insegnanti a mettere in atto nelle classi processi di *'apprendistato cognitivo'*. Nell'affrontare un tal genere di attività l'insegnante infatti deve fungere da modello per gli allievi mostrando loro come porsi per tradurre informazioni o ipotesi in linguaggio algebrico, come operare su una scrittura, ipotizzando possibili trasformazioni e valutandone l'efficacia attraverso l'attivazione di pensieri anticipatori, come interpretare formule ottenute per elaborazione sintattica attivando cambiamenti di frame, come connettere o ricondursi a risultati di elaborazioni svolte in relazione alle finalità da raggiungere.

A questo riguardo Cusi (2012) introduce il costrutto M-CAce (acronimo di "*Modello di Comportamenti ed Atteggiamenti consapevoli ed efficaci")* che esplicita i caratteri di un insegnante che si pone in maniera efficace per attivare negli studenti atteggiamenti funzionali allo sviluppo di competenze dimostrative via linguaggio algebrico. Tale costrutto delinea i caratteri di un docente che assolve essenzialmente due macro ruoli: quello di *modello nell'esplorazione di un problema* e quello di *guida metacognitiva* (per approfondimenti sul costrutto rinviamo a Cusi 2012). Da nostri studi, tale costrutto appare un'idonea 'lente teorica' utile all'insegnante per riflettere su di sé e giungere a concepire ed attuare forme di autocontrollo ed autocorrezione (Cusi & Malara 2013). Tale strumento, squisitamente teorico, frutto di ricerche sul campo con insegnanti e nelle classi, risulta oggi uno strumento molto utile nelle pratiche di formazione professionale, sia per la strutturazione con gli insegnanti di processi di classe da sperimentare sia come riferimento per la conseguente analisi di essi. Nei casi di successo dell'insegnante, grazie alla qualità dell'azione di classe, vi è di conseguenza una ricaduta significativa sugli apprendimenti degli allievi.

Brevi considerazioni conclusive

La trasposizione dei risultati consolidati della ricerca per l'innovazione didattica nelle classi può avvenire, ed in molte realtà avviene, attraverso percorsi di formazione degli insegnanti non episodici ma di lunga durata, nell'ottica del *long life learning*.

In riferimento a tale questione concordiamo con quanto rilevato dalle curatrici del 15° studio ICMI dedicato alla formazione degli insegnanti (Even & Ball 2009) le quali sottolineano l'esigenza di un allungamento dei tempi dedicati alla pratica di classe nei percorsi di formazione e la necessità di studi per la qualificazione professionale dei formatori, detti anche tutor o mentori, intesi come 'promotori dello sviluppo degli insegnanti', dai quali dipende strettamente la qualità della formazione dell'insegnante sul versante della attività di classe.

Per quanto riguarda la formazione dei docenti nel nostro paese, come ricercatori e formatori siamo profondamente consapevoli della inadeguatezza e precarietà delle attuali scelte istituzionali e della scarsità degli investimenti, anche in confronto ai sistemi di formazione, stabilizzati ormai da anni, nei paesi europei di maggiore riferimento, ed agli investimenti da loro messi in campo per la ricerca educativa disciplinare e la formazione anche in servizio.

Purtroppo questa nostra situazione rende difficile la piena diffusione tra gli insegnanti dei maggiori risultati della ricerca (non solo in algebra) pregiudicando così l'attuazione nella gran parte delle nostre classi di un insegnamento in linea con quanto richiesto dagli organismi economici internazionali ed aggravando il solco già profondo tra bisogni sociali e servizi educativi offerti.

Riferimenti bibliografici

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O. (2003-2005). *Matematica 2001- Matematica 2003- Matematica 2004. La matematica per il cittadino.* Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Lucca: Mattoni Stampatore

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.

Arzarello, F., Bazzini, L., and Chiappini, G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto strategico TID, Quaderno 6.

Bell A. (1976). A study of pupils'proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, 23-40

Bell A.W., Malone J.A., Taylor P.C. (1987). *Algebra-An Exploratory Teaching Experiment*, Shell Centre Nottingham, UK

Bernarz N., Radford L., Janvier B., Lepage A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving, proc. *PME XVI*, vol.1 , 65-72.

Bernardz D., Doufur-Janvier B. (1994). The emergence and development of algebra in problem solving context: a problem analysis, *proc. PME XVIII*, vol.2, 64-71.

Boero, P. (2001). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving, in Sutherland, R. & Al. (a cura di), *Perspectives on School Algebra* (pp. 99-119). Netherlands: Kluwer Publishers

Borges, J. L. (1972). *El oro de los tigres*, tr. It, L'oro delle tigri, di J. R. Wilcock e L. Bacchi Wilcock, 1974, Rizzoli, Milano

Both, L. (1989). A question of Structure, in Wagner, S., Kieran, K (a cura di), *Research issues in the learning and teaching of mathematics*, LEA, NCTM, Virginia, US, 57-59

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F. and Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective, *ZDM*, 37(1), 5-15.

Cervantes, M. (1605/15), *El ingenioso hildago don Quijote de la Mancia*, tr. Ital., Don Chisciotte de la Mancia, di V. Boldini, 1980, ed. Struzzi-Einaudi, Torino

Clement, J., Lochead, J., Monk, G. (1981) Translation difficulties in Learning Mathematics, *American Mathematical Montly*, April, 286-290

Cortes S A., Vergnaud G., Kavafian N. (1990). From arithmetic to algebra: negotiating a jump in the learning process, proc. *PME XIV*, vol.2, 27-34.

Cusi, A. (2010). La dimostrazione in ambito aritmetico per un approccio innovativo alla didattica dell'algebra. In F. Ferrara, L. Giacardi e M. Mosca (Eds.), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2009-2010* (pp. 69-89). Kim Williams Books (Torino).

Cusi, A. (2012). L'insegnante come modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci per favorire lo sviluppo di competenze e consapevolezze da parte degli allievi, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 35 A-B, 393-414.

Cusi, A., Malara, N.A. (2013). A theoretical construct to analyze the teacher's role during introductory activities to algebraic modelling. In B. Ubuz et al. (eds.), Proceedings of Cerme 8 (pp. 3015-3024). Antalya (Turkey).

Cusi, A., Malara, N.A., Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives,* (pp. 483-510). Berlin-Heidelberg: Springer.

Da Roca Falcão, J.T., (1995). A case study of algebraic scaffolding: from balance to algebraic notation. In *proc. PME XIX,* vol. 2, 66-73

Even, R., Ball, D.L. (2009), *The professional Education and Development of Teachers of Mathematics,* Springer

Filloy, E. Y., Rojano, T. (1989). solving equation: the transition from arithmetic to algebra, *For The Learning of Mathematics,* vol.9, n. *2*
Garançon M., Kieran C., Boileau A. (1990). Introducing algebra: a functional approach in a computer environment, proc. *PME XIV*, vol. 2, 51-58.
Garancon M., Kieran C., Boilau A., 1993, Using a discrete computer graphing in algebra problem solving: notion of infinity/continuity, *proc. PME XVII*, vol.2, 25-32.
Goos, M (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: a zone theory approach. *ZDM The International Journal of Mathematics Education,* 45, 521–533.
Kuchemann D.E. (1981). Algebra, in Hart K. (a cura di) *Children Understanding Mathematics: 11-16*, Murray, London
Harper E. (ed), 1987-88, *NMP Mathematics for Secondary School,* Longman, Essex, England
Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: a Structurale Perspective. In S. Wagner and K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston (Virginia): LEA.
Kieran C. (1992), The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
Kieran, K. (1998) The changing face of school algebra, in Alsina C. & Alii (a cura di), *Proc ICME 8: selected Lectures*, S.A.E.M. Thales, 271-286
Kilpatrick, J., Swafford, J., Findell, B. (a cura di) (2001). *Adding It Up. Helping Children Learn Mathematics, ,* National Research Council., Washington, DC: The National Academies Press
Jaworski, B. (2012). Mathematics teaching development as a human practice: identifying and drawing the threads, *ZDM The International Journal on Mathematics Education* , 44, 613–625.
Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.
Stacey K., Mac Gregor M. (1995). The influence of problem representation on algebraic writing and solution strategies, *proc. PME* XIX, vol.2, 90-97.
Mac Gregor M., 1991, *Making Sense of Algebra, Cognitive Processes Influencing Comprehension*, Deakin University press, Geelong, Victoria, Australia
MacGregor, M. e Price, E. (1999). An exploration of aspects of language proficiency and algebra learning. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(4), 449-467.
Malara, N.A. (2009) Esperienze laboratoriali nelle classi e nella formazione degli insegnanti per un approccio linguistico all'algebra, in Robutti, O., Mosca, M*., (a cura di). Atti del IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA.*, Kim Williams Books Torino, 13-26
Malara N.A. (2009), Dimostrazione e insegnamento dell'algebra, *Insegnamento della Matematica e Delle Scienze Integrate*, Atti Convegno Nazionale Argomentare e Dimostrare nell'insegnamento pre universitario, vol. 32 A-B, n.6, 795-818
Malara, N.A. (2012). il caso dell'algebra: mutamenti di prospettiva, convergenze e cosolidamenti, in *Insegnare, Dossier 3 'Insegnare matematica oggi'*52-61

Malara, N.A., Navarra, G. (2003), *Progetto ArAl, Quadro Teorico e Glossario*, Pitagora, bologna

Mason, J. (2008). Being Mathematical with and in front of learners. In B. Jaworski e T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (p. 31-55). Sense Publishers.

Merini, A., (1993), *Vuoto d'amore*, Einaudi, Torino

Radford, L. (1996). The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. In: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Ed.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching,* (39-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Roesken, B. (2011). *Hidden Dimension in the Professional Development of Mathematics Teachers*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rojano T., Sutherland R. (1991). Symbolising and solving algebra word problems: the potential of a Spreadsheet environment, *proc. PME XV*, vol.3, 207-213.

Rojano T., Sutherland R. (1997). Pupils' strategies and the cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets, *proc PME XXI*, vol. 3, 72-79

Sfard, A. (2005) What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 393 – 413

Schoenfeld, A.H. (2013). Classroom Observations in Theory and Practice. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, 45, 607-621.

Simon, M. (2013). Promoting fundamental change in mathematics teaching: a theoretical, methodological, and empirical approach to the problem. *ZDM International Journal of Mathematics Education,* 45, 573–582.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F.K. Jr. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, Vol. I (pp. 157-223). Charlotte NC: Information Age Publishing.

Ursini S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: interpretation and symbolization, *proc. PME XIV*, vol.2, 149-156.

Torino
14 Novembre 2013

Appendice

Tabella riassuntiva dei numeri naturali da 100100 a 999999

100100	*101101*	*102102*	*103103*	*104104*	…	…	*109109*
110110	*111111*	*112112*	*113113*	*114114*	…	…	*119119*
120120	*121121*	*122122*	*123123*	*124124*	…	…	*129129*
130130	*131121*	*132122*	*133123*	*134134*	…	…	*139139*
…	…	…	…	…	…	…	…
180180	*181181*	*182182*	*183183*	*184184*	…	…	*189189*
190190	*191191*	*192192*	*193193*	*194194*	…	…	*199199*
210210	*211211*	*212212*	*213213*	*214214*	…	…	*219219*
220220	*221221*	*222222*	*223223*	*224224*	…	…	*229229*
230230	*231231*	*232232*	*233233*	*234234*	…	…	*239239*
…	…	…	…	…	…	…	…
280280	*281281*	*282282*	*283283*	*284284*	…	…	*289289*
290290	*291291*	*292292*	*293293*	*294294*	…	…	*299299*
310310	*311311*	*312312*	*313313*	*314314*	…	…	*319319*
320320	*321321*	*322322*	*323313*	*324324*	…	…	*329329*
330330	*331321*	*332332*	*333333*	*334334*	…	…	*339339*
…	…	…	…	…	…	…	…
380380	*381381*	*382382*	*383383*	*384384*	…	…	*389389*
390390	*391391*	*392392*	*393393*	*394394*	…	…	*399399*
410410	*411411*	*412412*	*413413*	*414414*	…	…	*419419*
420420	*421421*	*422422*	*423423*	*424424*	…	…	*429429*
430430	*431431*	*432432*	*433433*	*434434*	…	…	*439439*
480480	*481481*	*482482*	*483483*	*484484*	…	…	*489489*
490490	*491491*	*492492*	*493493*	*494494*	…	…	*499499*
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…
910910	*911911*	*912912*	*913913*	*914914*	…	…	*919919*
920920	*921921*	*922922*	*923923*	*924924*	…	…	*929929*
930930	*931931*	*932932*	*933933*	*934934*	…	…	*939939*
…	…	…	…	… …	…	…	…
980980	*981981*	*982982*	*983983*	*984984*	…	…	*989989*
990990	*991991*	*992992*	*993993*	*994994*	…	…	*999999*