Innovazioni nell'insegnamento dell'algebra

Nicolina A. Malara
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane
Università di Modena e Reggio Emilia

0. INTRODUZIONE

L'insegnamento tradizionale dell'algebra concentra l'attenzione sullo studio sintattico delle forme algebriche viste come strumenti matematici da imparare a manipolare per un loro utilizzo nelle applicazioni. Questa concezione dà luogo nelle classi ad una presentazione ex abrupto degli oggetti dell'algebra, senza riferimenti a processi che ne giustifichino la genesi, che ne evidenzino i significati e che ne facciano apprezzare la valenza in termini di economia e generalità. In conseguenza l'algebra viene percepita dagli studenti in modo improprio, nella migliore delle ipotesi come una sorta di arte fine a sé stessa, ma nella maggior parte dei casi viene vissuta come un 'non sense' che finisce spesso con il determinare una presa di distanza dalla matematica.

Questo stato di cose è in Italia ancora molto diffuso, nonostante gli investimenti fatti per rinnovare l'insegnamento. Pochi sono i docenti che hanno cura di portare gli studenti a 'pensare algebricamente' instillando in loro un atteggiamento speculativo che li porti a misurarsi con il 'fare matematica' (esplorare e modellizzare situazioni, evidenziare e rappresentare relazioni tra date variabili, formulare congetture e cimentarsi nella loro prova, …). Le ragioni di questa situazione sono molteplici e cercheremo qui di evidenziarle.

Inizieremo con l'esaminare momenti di mutamento per l'insegnamento della matematica in Italia segnati da iniziative che hanno visto il coinvolgimento dell'ambiente accademico. Richiameremo i principali problemi di insegnamento-apprendimento dell'algebra evidenziati dalla ricerca e le indicazioni offerte per la pratica. Presenteremo brevemente i nostri studi di innovazione in algebra, che vedono il coinvolgimento degli insegnanti anche sul piano della formazione. Concluderemo con alcune considerazioni sui problemi che rendono difficile un'ampia diffusione dei nuovi indirizzi d'insegnamento dell'algebra, evidenziando come il permanere di vecchie concezioni e modalità d'insegnamento dipenda, oltre che da ristagni nei libri di testo, dalla mancanza di specificità dei percorsi di studio per l'accesso all'insegnamento, dalla frammentarietà ed occasionalità delle iniziative di formazione in servizio, ma soprattutto dalla povertà dei collegamenti stretti tra il mondo della ricerca e quello degli insegnanti.

1. MOMENTI DI MUTAMENTO DELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN ITALIA

Il primo importante momento di mutamento per l'insegnamento della matematica risale agli anni '60, era della new maths, periodo di notevole rivolgimento sociale nel paese ma anche di impegno istituzionale per l'educazione scientifica. Sono gli anni della estensione dell'obbligo scolastico ai 14 anni, dell'avvento della scuola media unica con l'abolizione del latino, e con l'unificazione dell'insegnamento della matematica e delle scienze. Sono anche gli anni in cui presso le Università si istituiscono gli indirizzi didattici nei corsi di laurea delle varie discipline scientifiche e seriamente si pensa ad una riforma per la scuola secondaria superiore. Sotto l'egida dell'Unione Matematica Italiana (UMI), vengono compiute in scuole secondarie superiori sperimentazioni pilota per l'innovazione dei curricoli che vedono, tra l'altro, l'introduzione di elementi di algebra moderna. Queste iniziative sono alla base della proposta dei programmi per la scuola superiore della commissione De Finetti, noti anche come programmi di Frascati, storicamente importanti per l'impianto culturale e la concezione pedagogica che li pervade (De Finetti 1967). In tali programmi, i primi in Italia concepiti per temi, la visione della matematica è composita e complessa ed il ruolo stesso dell'insegnante è nuovo e culturalmente elevato: non è più un esecutore di compiti prefissati temporalmente ma è un agente decisionale, con la responsabilità di scelta degli argomenti matematici da approfondire (scelta che può essere fatta secondo le proprie inclinazioni), dei tempi e delle modalità di insegnamento nelle classi ed ancor più con la responsabilità di promuovere negli studenti un atteggiamento di ricerca e di apprezzamento per la conoscenza.

Contrariamente a quanto avviene oggi, negli anni '70 a livello accademico si pensa anche di predisporre libri di testo idonei a supportare gli insegnanti nel rinnovamento della loro didattica. Due sono le iniziative degne di nota, la prima riguarda la traduzione curata dalla Unione Matematica Italiana del progetto inglese '*School Mathematics Project*' (SMP), rivolto a studenti dagli 11 al 16 anni (UMI, 1972-76), la seconda riguarda il progetto '*Matematica come scoperta'* di G. Prodi (1975-78) per il biennio della scuola secondaria superiore.

Il testo inglese SMP, frutto di ampie sperimentazioni, è profondamente innovativo, sia in riferimento agli argomenti trattati sia per la soggiacente filosofia di lavoro. Si tratta di 5 di testi, corredati da altrettante guide analitiche per l'insegnante, usabili dalla prima classe della scuola secondaria di I grado alla seconda classe della scuola secondaria superiore. I testi per gli studenti sono di matrice costruttiva, gli argomenti si sviluppano attraverso attività esplorative devolute agli studenti dalla risoluzione delle quali emergono specifici concetti matematici. Nei testi per l'insegnante i problemi proposti agli studenti sono commentati criticamente, risolti ed inquadrati concettualmente. Ancora oggi, nonostante gli anni trascorsi, sarebbero innovativi e non semplici da usare nelle nostre classi. A titolo di esempio presentiamo in figura 1 alcune prime attività finalizzate a far comprendere la genesi delle funzioni esponenziali e logaritmiche, spesso nelle nostre scuole introdotte in modo strumentale, nonostante la loro significatività matematica.

Figura 1

Problema della rana. *L'ovulo fecondato di una rana è costituito da una sola cellula; essa si divide in due cellule, ciascuna delle quali a sua volta si divide in due, dando luogo complessivamente a quattro cellule e così via*

Supponendo che la divisione cellulare avvenga in intervalli di tempo uguali ed assumendo come unità di tempo l'intervallo di scissione il problema si schematizza nella tabella:

Tempo	0	1	2	3	4	5	…
N.ro cellule	1	2	4	8	16	32	…

Riconoscendo i dati relativi al numero di cellule come potenze di 2 si rileva che l'esponente è proprio il valore del tempo in cui si produce la quantità di cellule osservata. La corrispondenza rilevata viene detta *funzione di accrescimento* e rappresentata in generale in modo sagittale: $x \to 2^x$ con $x \in$ N. Si fa poi riferimento ad analoghe situazioni in campi diversi (fisica, chimica, biologia,...), mostrando che 'l'accrescimento' può anche essere negativo come nel caso del decadimento radioattivo. Discussi i vari esempi ci si sposta sul piano matematico, proponendo ai ragazzi di pensare a ragionare sui 3 quesiti seguenti attraverso i quali i ragazzi sono portati ad esplorare l'andamento della funzione e concettualizzare la regolarità soggiacente ed ad estenderne il dominio ai razionali relativi

a) $x \to 2^x$ *applica la prima di queste due sequenze alla seconda. Nota che il dominio può essere ampliato fino a comprendere numeri negativi, anche se questo non avrebbe alcun significato nell'esempio della cellula della rana.*

Dominio x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
Codominio 2^x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	…

Chiamando f la funzione, che cosa sono: i) f(3) ; ii) f(-2) ; iii) f(0) ; iv) f(6) ; v) f(-5) ?
Descrivi come cresce f(x) al crescere di x.

b) *La proprietà di questa funzione, di grande utilità nei calcoli, è quella di trasformare le addizioni in moltiplicazioni nel modo seguente:*

$$2 \to 4$$
$$3 \to 8$$

$5 \to 32$

dove i numeri di sinistra sono sommati e i numeri di destra moltiplicati.

f(2)=4;   f(3)=8;   f(5)=32;

e potremmo scrivere

$$f(5) = f(2) \times f(3)$$

Oppure

$$f(2+3) = f(2) \times f(3)$$

Possiamo utilizzare questo schema per trovare per esempio f(8) a partire dai numeri presenti nella sequenza precedente.

$$f(8) = f(3+5) = f(3) \times f(5)= 8 \times 32 = 256$$

In modo analogo, calcola f(7) e controlla il risultato calcolando effettivamente 2^7.

Come troveresti: i) f(-5), ii) f(10), iii) f(12) utilizzando solo i numeri che compaiono nella sequenza data?

c) Seguendo il procedimento analogo, potremmo dire che : $2 = f(1) = f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right)$. *cosa si può dedurre circa $f\left(\frac{1}{2}\right)$?*

I quesiti che seguono a questo alternano questioni matematiche a questioni di matematizzazione di fenomeni. I quesiti matematici propongono di ragionare per analogia nel caso di funzioni di accrescimento per basi diverse da 2, come 3 e 4, e di individuare le leggi di corrispondenza e, cosa importante, considerano sempre in parallelo le corrispondenze inverse, come in questo esempio

Quesito

a) Completa la seguente tabella per $f: x \to 3^x$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)										

b) Descrivi come varia f(x) al crescere di x.

c) Scrivi una relazione che leghi f(2), f(3) e f(5).

d) Che cosa sono $f^{-1}(27)$, $f^{-1}(81)$, $f^{-1}(\frac{1}{9})$?

e) Scrivi una relazione che leghi $f^{-1}(9)$, $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ e $f^{-1}(3)$.

Altri propongono la costruzione di grafici cartesiani per intervalli limitati del dominio e il confronto sullo stesso sistema di riferimento dei grafici delle funzioni $y = 2^x$ e $y = 3^x$, giungendo a chiedere di determinare, attraverso misure rilevate nei due grafici delle ascisse relative a valori di y, il coefficiente dello stiramento rispetto all'asse *x* che muta il primo grafico nel secondo. Ancora, dallo studio del grafico di un fenomeno di accrescimento si richiede di individuare la rappresentazione algebrica della funzione. Si ritorna su quesiti modellizzazione di fenomeni, nei quali si richiede di ragionare su dati sperimentali e attraverso un loro opportuno arrotondamento, di individuare la funzione di accrescimento che li modellizza. Un esempio di ciò si trova nel seguente quesito

Quando il perossido di idrogeno reagisce con il permanganato di potassio in soluzione alcalina si produce ossigeno. Durante un esperimento di questo tipo, l'ossigeno è stato raccolto in una siringa graduata e le letture fatte sulla siringa sono state registrate ad intervalli di 1 minuto. Si sono ottenuti i seguenti risultati:

Tempo(min)	0	1	2	3	4	5
Volume(ml)	20	24	29	35	42,5	51,5

Rappresenta tali informazioni su un grafico. Calcola, per ogni intervallo di 1 minuto, la frazione

$$\frac{volume\ alla\ fine\ dell'intervallo}{volume\ all'inizio\ dell'intervallo}$$

Per esempio, per il primo minuto, la frazione risulta $\frac{24}{20} = 1{,}2$.

Il volume aumenta in modo analogo al numero delle cellule di rana di cui si è parlato nel paragrafo 1? Giustifica accuratamente la risposta con parole tue. Stima il volume alla fine del settimo minuto, supponendo che il processo di accrescimento continui secondo lo stesso schema.

Con questo quesito si portano i ragazzi a considerare costante il rapporto tra i volumi iniziale e finale della sostanza nei vari intervalli di osservazione, e di giungere così a vedere i volumi della sostanza accrescersi moltiplicativamente di tale quantità inquadrando la corrispondenza <*intervallo di tempo – volume finale*> secondo il modello delle funzioni di accrescimento. Si noti la richiesta di argomentazione sul confronto tra questa situazione e quella del problema della rana.

L'intero capitolo è molto ben articolato e ricco di attività non standard anche sul versante dei logaritmi, cosa che consente agli studenti di apprezzarne significato e l'economia d'uso.

Il testo 'Matematica come Scoperta', in due volumi e altrettante guide per l'insegnante, è decisamente contro corrente rispetto ai libri di testo dell'epoca. Lo sviluppo della trattazione ha una impostazione per problemi, le attività operative per lo studente sono prototipo, originali e non addestrative, ed è lasciato all'insegnante il compito di variarne la portata. In tale testo l'approccio all'algebra si sviluppa secondo quattro filoni intrecciati: 1) l'introduzione delle relazioni d'equivalenza e d'ordine, la caratterizzazione dei vari insiemi numerici nella loro struttura dai naturali ai complessi, l'evidenziazione della struttura di anello euclideo dall'analogia tra i polinomi in una indeterminata a coefficienti in Q e quella degli interi relativi; 2) il calcolo letterale solitamente inteso con uno spostamento di attenzione verso le proprietà che legittimano le trasformazioni di espressioni e la reversibilità delle operazioni di trasformazione di uguaglianze e disuguaglianze; 3) l'apertura allo studio della teoria elementare dei numeri con lo studio dimostrativo di proprietà numeriche e la proposizione di problemi dimostrativi sulla divisibilità; 4) lo studio di problemi algebrici in svariati contesti (realistici e matematici) con focus sui tre piani: della messa in formula, del controllo sintattico nelle trasformazioni, della interpretazione dei risultati (cosa che, come vedremo, in quegli anni veniva raccomandato dalla ricerca). Dal punto di vista didattico, al di là di un approccio algebrico all'aritmetica e degli aspetti strutturali, si rileva la novità della proposizione: a) di problemi dimostrativi in ambito aritmetico, b) di problemi di ottimizzazione lineare, importanti dal punto di vista interpretativo, che richiedono lo studio congiunto di equazioni e disequazioni e la loro rappresentazione nel piano cartesiano, e di problemi geometrici di massimo o minimo. In Figura 2 riportiamo esempi di attività proposte

Figura 2

Attività algebriche per il biennio tratte dal 'Matematica come Scoperta' (1975-1978)

Attività di modellizzazione

<u>Un problema di programmazione lineare</u>

Un produttore ha due depositi nei quali si trovano, rispettivamente, 4000 tonnellate e 6000 tonnellate di combustibile. Egli deve consegnare a due clienti, A e B, due partite di 3000 tonnellate e 5000 tonnellate rispettivamente. I costi di trasporto sono i seguenti: 2K£ (kilolire) la tonnellata dal I deposito al cliente A; 3K£ la tonnellata dal I deposito al cliente B; 5K£ la tonnellata dal II deposito al cliente A; 4K£ la tonnellata dal II deposito al cliente B. Si domanda come deve essere fatto il prelievo del combustibile perché il costo dei trasporto sia minimo.

<u>Un problema di massimo in geometria piana</u>

Fra tutti i rettangoli di perimetro 2p assegnato trovare quello di area massima

Attività dimostrative in ambito aritmetico

<u>Proprietà nell'ambito dei naturali</u>

Se a è un numero dispari, i numeri a e a+2 sono primi tra loro perché? Analogamente: se a non è divisibile per 3 i numeri, i numeri a e a+3 sono primo fra loro.

Sia a n. naturale non nullo. Se a non è divisibile né per 2 né per 3 allora a^2-1 *è divisibile per 24.*

<u>Proprietà nell'ambito dei razionali</u>

Sia h un numero positivo minore di 1. Dimostrare che le sue successive potenze formano una successione decrescente, cioè: $1 > h > h^2 > h^3 > h^4$ *...*

Siano a, b, c, d numeri positivi tali che a/b < c/d; dimostrare che si ha : a/b < (a+c)/(b+d) < c/d

---

Per completezza va rilevato che negli stessi anni escono in prima edizione libri di testo per la scuola secondaria superiore maturati in ambiente accademico, precisamente 'Il Metodo matematico' di Lucio Lombardo Radice e Lina Mancini Proia e il testo 'Matematica' di Francesco Speranza ed Alba Rossi dall'Acqua, testi che presto diventano di riferimento tra gli insegnanti più qualificati. Il primo pur essendo vicino alla tradizione ha un taglio culturale moderno, cura l'aspetto storico e presenta anche le strutture algebriche finite. Già nella presentazione enfatizza una visione dell'algebra come 'multiconcreto' e, cosa nuova per allora, affronta le studio delle equazioni in riferimento a diversi campi numerici, anche finiti. Il testo di Francesco Speranza, pur presentando le stesse innovazioni è più rivoluzionario, non solo per l'apertura allo studio delle relazioni in diversi contesti e per l'attenzione agli aspetti strutturali ma anche per l'uso diffuso di nuove rappresentazioni matematiche, funzionali alla chiarificazione dei concetti, in particolare per quelle, originali ed accurate, che evidenziano gli isomorfismi di immersione nel passaggio da un sistema numerico all'altro[1].

---

1 Per questioni di spazio non è possibile soffermarci sui mutamenti della trattazione nei libri di testo dell'algebra elementare, dati della carenza dei testi in uso negli anni '80 si trovano in Quattrocchi & Fiori (1988), indicazioni sull'evoluzione della trattazione il tema 'equazioni algebriche' dal tardo ottocento al 2000 si trovano in Malara e Tagliagambe (2000).

1.1 Momenti di svolta per l'insegnamento dell'algebra nei programmi scolastici italiani

Dagli anni '60 i primi programmi di forte innovazione circa l'insegnamento dell'algebra (e non solo) sono i programmi per la scuola media del 1979. Sono i primi programmi in vigore ad essere organizzati per temi e senza scansioni temporali, ed aprono a modi nuovi di guardare alla matematica: uno sperimentale, che affonda le sue radici nei processi di matematizzazione del reale, ed uno strutturale con la messa in opera di collegamenti tra le varie branche della matematica, che porta ad una superiore concettualizzazione. Globalmente offrono una visione dinamica ed evolutiva della matematica, in connessione alle scienze e più in generale alle attività umane. Per quanto riguarda l'algebra vengono ridimensionati esplicitamente argomenti fino allora dominanti, come la semplificazione di espressioni aritmetiche, l'estrazione di radici quadrate e il calcolo letterale; e viene proposto un approccio linguistico, funzionale alla generalizzazione e alla matematizzazione del reale, con enfasi sulla 'messa in formula' e sulla osservazione congiunta di coppie di variabili nello studio di fenomeni (lineari o quadratici). E' da rimarcare in essi la sparizione del termine 'Algebra' e l'ingresso di termini quali 'Relazioni', 'Funzioni', 'Analogie strutturali'. Aspetti algebrici sono trasversalmente presenti nei diversi temi (da quello dedicato agli ambiti numerici, che vengono visti in un ottica strutturale, a quello di introduzione alla geometria analitica vista come strumento di rappresentazione di fenomeni; a quello dedicato alla geometria delle trasformazioni). In tali programmi inoltre si esalta la dimensione logico-linguistica della matematica aprendo da un lato agli aspetti logici del linguaggio ed alle regole di ragionamento (preparando il terreno alla dimostrazione), dall'altro alla esplorazione di problemi non standard, al loro trasferimento da un contesto ad un altro, ai ragionamenti euristici e per analogia, realizzando così uno spostamento di attenzione dallo studiare matematica all'operare in matematica. Gli slogan 'matematica nella realtà' e matematica per problemi', affermatesi all'epoca sono indicatori del cambiamento di prospettiva promosso per la matematica da tali programmi: da disciplina chiusa in sé, statica ed astratta, a disciplina dinamica, radicata nel concreto ed aperta alle interazioni tra contesti e discipline diversi.[2]

[2] Lucia Ciarrapico (2001) definisce tali programmi "forse troppo ambiziosi per trovare reale applicazione nelle scuole" e sottolinea come un'errata interpretazione del concetto di "programmazione didattica", intesa da molti docenti come arbitrio nelle scelte, li conduce spesso ad escludere i contenuti nuovi delle proposte ed a rifugiarsi nell'inerzia dell'insegnamento tradizionale. Sostiene che "nella scuola media, tranne lodevoli eccezioni, si continua per lo più ad insegnare algebra, più di quanto previsto dal programma stesso… con una didattica del tutto tradizionale".

Un altro importante momento di mutamento è segnato dal progetto *Matematica 2001- 2003-2004* (Anichini et al. 2001-2004), messo a punto da una commissione di intesa UMI-MIUR nell'alveo della proposta di riforma del sistema scolastico italiano promossa dal ministro Luigi Berlinguer. Esso presenta le proposte di programmi dalla scuola primaria alla scuola secondaria superiore e una nutrita serie di percorsi didattici esemplificativi per i vari 'nuclei tematici' che offrono agli insegnanti dei modelli operativi ed una chiave interpretativa dei programmi stessi. In tali programmi vengono travasati molti risultati consolidati di ricerca e si introduce una vera rivoluzione nelle finalità e modalità di insegnamento. La metodologia didattica proposta per le classi è di tipo socio-costruttivo, basata sull'idea di *laboratorio di matematica* inteso non certo come luogo fisico o momento specifico dedicato all'uso delle nuove tecnologie ma piuttosto come momento corale di attività esplorativa promossa e guidata dall'insegnante, affrontabile anche solo con carta e matita, dove le idee dei singoli o di piccoli gruppi vengono condivise nella classe, discusse ed organizzate e dove gli aspetti matematici che emergono diventano oggetto di riflessioni metacognitive. I temi di insegnamento sono enucleati in sette grandi aree di cui quattro riferiti ai contenuti solitamente intesi, grosso modo riconducibili rispettivamente ad Aritmetica, Geometria, Algebra e Probabilità e Statistica e tre aree trasversali dedicate ad 'Argomentare e Dimostrare' , 'Misurare', 'Porsi e Risolvere problemi'. Questi ultimi tre temi evidenziano in modo netto lo spostamento di attenzione nell'insegnamento della matematica dai risultati ai processi facendo divenire oggetto di insegnamento/apprendimento la formulazione di problemi, l'attivazione di rappresentazioni e di strategie, la costruzione di modelli di situazioni, la formulazione di congetture e la dimostrazione. In riferimento all'insegnamento dell'algebra si amplia ed approfondisce il tradizionale approccio limitato ai puri aspetti trasformazionali, si apre vistosamente alle attività dimostrative in ambito aritmetico (e non solo) ed ad attività di modellizzazione in contesti matematici ed extra matematici. Acquistano spessore i processi di traduzione dal verbale all'algebrico e più in generale di coordinamento tra i registri di rappresentazione verbale-algebrico-grafico/cartesiano[3].

C'e da rilevare purtroppo che le attuali 'Indicazioni Nazionali', pur ispirandosi al *Matematica 2001-2004,* presentano un arretramento rispetto ad esso. In riferimento all'algebra domina una visione legata al calcolo letterale in intreccio con aspetti algoritmici dell'aritmetica ed una

---

[3] Si vedano ad esempio i percorsi: 'la somma dei primi numeri naturali (nucleo 'Numeri ed algoritmi'); La 'traduzione' dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra' (nucleo 'Relazioni e Funzioni'); Quel che vedo è sempre vero', 'Sarà vero ma non ci credo'; Condizione Necessaria ma non sufficiente (nucleo 'Argomentare, Congetturare, Dimostrare').

proiezione verso le applicazioni. Completamente assenti sono le attività di generazione degli oggetti dell'algebra e gli aspetti strutturali legati agli ampliamenti numerici. L'unica apertura verso una visione dell'algebra connessa alla produzione di pensiero si rileva dalla competenza richiesta in uscita circa la dimostrazione di proprietà aritmetiche ma nulla è detto attraverso quali attività i ragazzi possano acquisire una tale competenza.

2. LE INDICAZIONI DELLA RICERCA

L'avvento della new maths porta ad una profondo mutamento circa la matematica da insegnare. A livello internazionale si comprende l'importanza di investire su studi dedicati ai problemi didattici e di acculturazione degli insegnanti che questo mutamento comporta. Si hanno importanti iniziative di promozione della ricerca[4] e fioriscono i momenti di incontro tra ricercatori ed insegnanti promossi da associazioni internazionali quali ICMI[5], CIEAEM[6] e PME[7]. Da quegli anni ad oggi molti sono gli studi svolti e i risultati consolidati raggiunti. Circa l'apprendimento dell'algebra gli studi riguardano nell'ordine: 1. rilevamento e diagnosi delle competenze degli studenti; 2. Studi sulle difficoltà di apprendimento; 3. Studi sperimentali di innovazione con focus su: a) attività di tipo pre-algebrico e di generalizzazione (modellizzazione di relazioni funzionali e di successioni lineari o quadratiche), b) attività algebriche di tipo-meta (problem solving avanzato, dimostrazione) anche attraverso l'uso delle nuove tecnologie; 4. Teorizzazioni e modelli di insegnamento; 5. Studi di processi didattici in algebra, analisi del ruolo dell'insegnante e degli apprendimenti degli allievi.

Per indicazioni analitiche sull'evoluzione di tali studi rinviamo a Malara (2012a), qui ci limitiamo brevemente a richiamare aspetti salienti che emergono da essi e che hanno portato alla visione attuale della didattica dell'algebra. Iniziamo con gli studi di C. Kieran (1989, 1992) i quali, in contrasto alle idee allora dominanti, mostrano con trasparenza come i problemi dell'apprendimento dell'algebra non dipendano solo da questioni epistemologiche della disciplina ma siano invece in buona parte dovuti ad un insegnamento dell'aritmetica poco o nulla attento al controllo dei significati ed agli aspetti relazionali. Dai dibattiti che seguono si giunge a concepire

---

4 Su ispirazione di Hans Freudenthal si ha la fondazione della rivista "*Journal of Mathematics Education*"

5 ICMI sta per International Commission on Mathematical Instruction che è una commissione dell'IMU (Unione Matematica Internazionale). Nel 1966 in seno all'ICMI viene istituito l'ICME (***International Congress on Mathematical Education***) congresso a cadenza quadriennale rivolto unicamente a questioni di educazione matematica prevalentemente a livello pre-universitario.

6 CIEAEM è acronimo di 'International Commission for the Study and Improvement of Mathematics', associazione fondata nel 1950 su ispirazione di Caleb Gattegno.

7 PME sta per 'The International Group for the Psychology of Mathematics Education', gruppo istituitosi nel 1976 all'ICME3 (Karlsruhe, Germany) su ispirazione di Efraim Fishbein.

un nuovo spazio di insegnamento finalizzato allo sviluppo di aspetti aritmetici evoluti, basilari per la comprensione dei concetti algebrici, più astratti e formali (Linchevski 1995). Gli studi sviluppatisi da allora portano alla costituzione dell'Early Algebra come disciplina ed alla algebrizzazione dei curricoli a livello di scuola primaria e secondaria di I grado (Caj e Knut 2011). Nello stesso tempo maturano mutamenti di prospettiva anche per l'insegnamento dell'algebra solitamente intesa. Si sostiene la valenza didattica del problem solving algebrico con riferimento a problemi classici della storia dell'algebra, anche per il recupero didattico di metodi di soluzione antichi come quello di falsa posizione (Mason 1996b, Radford 1996a). Si promuove la generalizzazione, che Mason definisce *il cuore pulsante della matematica* (1996a) ed in relazione alla quale egli sostiene che gli studenti debbano essere portati a conquistare una doppia consapevolezza: '*vedere il generale nel particolare*' , '*vedere il particolare nel generale*', e soprattutto a divenire consapevoli della pluralità di casi che una affermazione generale racchiude. Anche Radford (1996b p. 107-109) sostiene l'efficacia della generalizzazione, ma mette in guardia dall'inferire fatti matematici dall'osservazione di pochi casi esemplificativi ponendo il problema della validità logica degli assunti che emergono da essa[8]. Denuncia l'abuso che se ne fa nell'insegnamento, per il fatto che gli studenti acquisiscono la concezione che basti verificare una 'legge' in pochi casi per asserire la sua validità in termini generali, e che pertanto occorra spendere tempo e lavoro per portarli a riconoscere i limiti della generalizzazione, a distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi, a divenire consapevoli che la validità di una proposizione desunta induttivamente si stabilisce attraverso una dimostrazione[9].

Le attività di manipolazione non vengono più viste isolate ma in correlazione con attività di rappresentazione e di interpretazione, Bell (1996) parla di 'ciclo algebrico essenziale', e si apre alla dimensione metacognitiva spostando l'attenzione verso il controllo dei processi ed il senso degli apprendimenti. In particolare Arcavi (1994) sottolinea l'importanza di condurre gli studenti alla conquista del '*Symbol Sense',* espressione che indica quella competenza di ordine superiore, che porta tra l'altro a: scegliere oculatamente le variabili attraverso cui rappresentare le relazioni in situazioni in gioco; trasformare espressioni ad hoc, con flessibilità, intelligenza e visioni di insieme, evitando circolarità; mantenere attenzione costante sui significati dei simboli e a

---

8 Radford introduce la questione facendo riferimento ad una celebre scena della 'Cantatrice calva' di Jonesco: in casa Smith suonano alla porta, Mrs Smith va ad aprire ma non trova nessuno; così al secondo e terzo squillo di campanello; al quarto squillo ella sbotta con il marito con una inferenza assurda, generalizzazione dai casi precedenti.: «*Non mandarmi ad aprire la porta! Hai visto che è inutile! L'esperienza ci ha mostrato che quando sentiamo il campanello questo implica che non c'è nessuno*».

9 Per approfondimenti sugli studi rivolti alla generalizzazione in algebra si veda Malara 2009 e la bibliografia relativa.

selezionare tra i possibili quelli più funzionali alla situazione in gioco; saper vedere nuovi significati di una espressione attraverso sue forme equivalenti; ecc.. La conquista del Symbol Sense è vista come necessaria per raggiungere la consapevolezza che il linguaggio algebrico è un potente strumento per capire, esprimere e comunicare generalizzazioni, stabilire connessioni, produrre argomentazioni e dimostrazioni. Si parla anche di *consapevolezza metalinguistica* ed in particolare di *consapevolezza sintattica*, ossia la capacità di controllare, attraverso la struttura sintattica delle espressioni algebriche, sia i significati che le inferenze che possono essere dedotte da esse. Senso del simbolo e consapevolezza metalinguistica concorrono allo sviluppo del *pensiero anticipatorio* (Arzarello *et al.* 1994, Boero 2001) inteso come la capacità di: ipotizzare scritture formali a cui pervenire per poter affermare certi risultati; prevedere, senza svolgere trasformazioni sintattiche, possibili nuove forme di una certa espressione vagliandone i significati in relazione ad un dato scopo; attivare interpretazioni di una forma algebrica secondo prospettive diverse. In Figura 3 si analizzano due quesiti in relazione alle competenze di tipo meta necessarie per la loro soluzione. Un altro esempio, più corposo e relativo ad un quesito P.I.S.A. 2012 si trova in Malara (2014).

Figura 3

Due quesiti proponibili nel biennio di scuola secondaria superiore:
analisi delle competenze di tipo meta implicate

Un problema sintattico (tratto dalla prova INVALSI 2011):

Il polinomio x^4 *-16 è divisibile per :* ❒ $x^2 - 8$; ❒ $x-4$; ❒ $x+2$; ❒ $(x-2)^2$.

La corretta risoluzione richiede il riconoscimento di 16 come quarta potenza di 2, il riconoscimento di una quarta potenza come quadrato, l'attivazione della identità sulla differenza di quadrati $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, l'adattamento di essa alla differenza $x^4 - 16$, lo spostamento del problema sul fattore $x^2 - 4$ ed il riconoscimento del termine $x+2$ come fattore di esso.

Un problema dimostrativo

Dimostra che un qualunque numero naturale di 4 cifre che abbia le prima cifra uguale alla terza e la seconda cifra uguale alla quarta è divisibile per il numero 101

La corretta risoluzione richiede il controllo della rappresentazione polinomiale di un numero naturale, il riconoscimento che il numero in oggetto può vedersi come somma tra il numero di due cifre costituito dalle sue unità e dalle sue decine ed il numero che si ottiene moltiplicando tale numero per 100, il riconoscimento dell'applicabilità della proprietà distributiva alla somma dei due numeri e la conseguente trasformazione di tale somma nel prodotto tra il numero di due cifre e il numero 101 visto come (100+1).

Arzarello *et al.* (1994) sottolineano che la consapevolezza del potere del linguaggio algebrico possa essere sviluppata solo quando gli studenti si impadroniscano di alcuni aspetti chiave che entrano in gioco nello sviluppo di attività di produzione di pensiero. In particolare fanno riferimento all'attivazione di '*frame concettuali'* intesi come "insieme organizzato di conoscenze" (enti matematici, loro proprietà, algoritmi, strategie di ragionamento…), che suggeriscono ad un soggetto come ragionare, manipolare formule, anticipare risultati. Essi propongono un modello di insegnamento dell'algebra come '*gioco di interpretazioni',* evidenziano la necessità di promuovere nella scuola una visione dell'*algebra come strumento di pensiero* e sostengono che la dimostrazione di congetture è attività tipica nella quale gli studenti sono chiamati ad operare con flessibilità un efficiente gioco di interpretazioni.

Il quadro d'insieme degli studi condotti all'incirca a ridosso del 2000 porta C. Kieran (1998) ad oggettivare tre aree di attività per l'insegnamento dell'algebra, da intendersi non gerarchicamente separate ma al contrario con forti interrelazioni: le *attività generazionali*, che riguardano l'esplorazione di situazioni problematiche che consentono di costruire gli oggetti dell'algebra ancorandone i significati all'esperienza; le *attività trasformazionali*, che riguardano attività sintattiche classiche affiancate sul piano concettuale dal controllo delle proprietà che le legittimano, le *attività algebriche avanzate di tipo meta*, quali il problem solving e la dimostrazione, dove l'algebra è utilizzata come linguaggio di rappresentazione e strumento ragionamento. La studiosa sottolinea la necessità di devolvere più tempo alle attività avanzate di tipo meta poiché queste inducono in modo naturale ad affrontare attività trasformazionali dal momento che è il significato che guida e supporta la manipolazione algebrica.

Questa visione dell'algebra pervasiva e composita, che spazia dalle attività pre-algebriche e generazionali alle attività algebriche avanzate di tipo metà si può ritenere consolidata a livello internazionale. I nostri studi in didattica dell'algebra, iniziati nei lontani anni '90 si inquadrano in questi indirizzi ma sono più compositi poiché affrontano questioni di innovazione in algebra studiando la correlazione tra apprendimenti degli studenti e azioni degli insegnanti, attuando pratiche di formazione insegnanti sul campo e mettendo a punto strumenti e modelli per una formazione di qualità. Per questioni di spazio ci concentriamo sugli studi svolti a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado nell'ambito dell'early algebra, per studi di innovazione nella scuola secondaria superiore rinviamo a Malara (2009, 2012b) e Cusi e Malara (2008 e 2009).

3. I NOSTRI STUDI

Il nostro interesse per la didattica dell'algebra nasce in relazione ad un ampio studio svolto nella scuola media sulla didattica del problema, volto alla esplicitazione dei processi di pensiero negli allievi ed allo spostamento di attenzione dal risultato alle strategie risolutive (Malara 1993). All'epoca, riguardo ai problemi algebrici, gli insegnanti mostrano una certa perplessità a farne oggetto di insegnamento, motivata dalla convinzione che non sia possibile affrontare tali problemi per la poca dimestichezza degli allievi con i metodi di soluzione di equazioni e sistemi lineari. In quella occasione appaiono chiaramente in loro concezioni diverse circa l'algebra stessa ed in alcuni emerge una visione riduttiva e distorta di essa. Si lavora perciò con e per insegnanti nella prospettiva di un approccio socio-costruttivo e linguistico all'algebra, non solo nei suoi aspetti sintattici ma soprattutto in quelli di traduzione e produzione/comunicazione di pensiero. La strada che concordemente si sceglie è quella di promuovere nelle classi un uso precoce delle lettere per la codifica di relazioni e la formulazione di proprietà in termini generali *attraverso e per* lo studio di problemi. Le sperimentazioni svolte, al di là dei successi raggiunti,[10] ci convincono dell'opportunità di intervenire a livello di scuola primaria per evitare negli allievi l'acquisizione di atteggiamenti procedurali e meccanici che rendono più difficoltoso o addirittura inibiscono l'acquisizione di un modo relazionale di guardare ai fatti aritmetici. Nasce così il *Progetto ArAl. Percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico* (Malara & Navarra, 2003) che si inquadra nella corrente di studi in early algebra, ed è oggi un fecondo terreno di studio, confronto e ricerca per insegnanti di scuola primaria e secondaria di I grado.

3.1. Il progetto ArAl

L'ipotesi di fondo del progetto è che i modelli mentali propri del pensiero algebrico vadano costruiti sin dalla scuola elementare in ambito aritmetico (ma non solo) attraverso un contratto didattico basato sul principio *prima rappresenta poi risolvi* e la costruzione di un ambiente di classe che consenta l'elaborazione autonoma di quello che noi chiamiamo *balbettio algebrico*, ossia l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio, interno alla matematica, nel quale le regole vengono a trovare la loro collocazione gradualmente attraverso la produzione, l'analisi e la discussione di rappresentazioni, inizialmente 'sporche'. Attraverso un *gioco di traduzione e interpretazione* tra espressioni in linguaggio naturale e linguaggio formale gli allievi si avvicinano all'uso delle lettere, attivano la costruzione e l'elaborazione di prime espressioni algebriche, costruiscono e risolvono equazioni riflettendo sui processi soggiacenti, interpretano il significato di scritture formali in relazione a specifiche questioni. In tal modo vengono ad acquisire consapevolezza del significato di segni e simboli e del loro ruolo nelle scritture formali.

---

[10] I risultati emersi dagli studi rendono evidente la possibilità di: a) affrontare a livello di scuola media problemi algebrici non banali modellizzabili con equazioni o sistemi lineari senza un studio preventivo del metodi di soluzione di equazioni, studio che viene affrontato dai ragazzi in modo 'ingenuo' e costruttivo; b) proporre sin dalla prima media problemi aritmetici quali "*se n è un numero naturale, ci sono valori di n in modo che 5n+3 sia: divisibile per 5, divisibile per 3, divisibile per 2*?, portando gli allievi ad argomentare sotto ipotesi, formulare controesempi e dare giustificazioni, giungendo nel tempo a costruire piccole dimostrazioni e, cosa più importante, a comprendere cosa significhi dimostrare. Una sintesi degli studi svolti è riportata in Malara (1999).

Il progetto si sviluppa nelle classi attraverso l'esplorazione di situazioni con modalità socio-costruttive (discussione, argomentazione, verbalizzazione). Elementi matematici di base sono: la simmetria del segno 'uguale'; la pluralità di rappresentazioni di un numero; l'oggettivazione delle proprietà delle operazioni aritmetiche dall'analisi delle modalità di risoluzione di problemi; il confronto del valore di espressioni numeriche senza fare calcoli; la modellizzazione algebrica e la soluzione di problemi con dati incogniti; l'individuazione e la rappresentazione di regolarità numeriche e di leggi di corrispondenza[11].

In questo approccio elemento chiave è l'insegnante, occorre infatti che egli attui una didattica che consenta l'affermarsi di un'autentica attività matematica socialmente condivisa, in cui si dia grande spazio agli aspetti meta-cognitivi ed alla rappresentazione di informazioni e processi. Per questo, la struttura metodologica del progetto è concepita come *sistema formativo integrato:* gli insegnanti partecipano alla messa a punto dei materiali da sperimentare nelle classi, alla redazione e commento delle trascrizioni di discussioni di classe e alla riflessione critica sui processi attuati.

Al di là dei supporti per l'approfondimento individuale che il progetto offre agli insegnanti,[12] strumenti da noi ritenuti fondamentali per indurre negli insegnanti una presa di coscienza del proprio modo di operare e per promuovere un loro reale cambiamento, sono le *trascrizioni multi-commentate*. Esse sono realizzate sulla base della trascrizione delle registrazioni delle discussioni su attività concordate e corredate da commenti (analitici e generali) dell'insegnante. Queste poi vongono spedite via mail ai ricercatori i quali a loro volta stendono i propri commenti e le rimandano all'autore, ad altri insegnti coinvolti in analoghe attività e a volte ad altri ricercatori impegnati nel progetto. Spesso l'autore fa ulteriori commenti di chiarimento o di riflessione su quelli ricevuti. I commenti plurimi evidenziano spesso questioni nodali nella conduzione dell'attività attorno alle quali si riflette congiuntamente. E' proprio questo processo di analisi e riflessione sulle micro decisioni che l'insegnante compie che consente di oggettivare la problematicità e limiti della sua azione e consente di guidarlo verso una riconversione di conoscenze e convinzioni circa l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra, e verso una

---

[11] Per esempi di attività e di conduzione delle stesse nelle classi si rinvia alle Unità della Collana *Progetto ArAl* o al sito www.progettoaral.it.

[12] Oltre ai materiali reperibili nel sito www.progettoaral.it, (video di attività, articoli per l'inserimento di attività ArAl nelle programmazioni curricolari, diari degli insegnanti, ecc.), materiali di studio offerti sono il libretto *Quadro teorico e glossario e Le Unità* del progetto. Nel quadro teorico si richiamano conoscenze algebriche e si affrontano questioni inerenti aspetti linguistici, psico-pedagogici, sociologici, ecc, che intervengono nella costruzione matematica. Il glossario fa da supporto al quadro teorico ed è composto da un centinaio di termini connessi fra loro da una fitta rete di rimandi interni. Le 'Unità', costituiscono *modelli di processi costruttivi di insegnamento-apprendimento* relativi ad uno specifico tema aritmetico-algebrico, e sono strutturate in modo rendere trasparenti agli insegnanti scelte metodologiche, passi chiave dei processi, estensioni, comportamenti potenziali degli alunni, difficoltà che si possono incontrare, ecc., tutti elementi essenziali per una loro libera riproduzione.

ricostruzione dei personali atteggiamenti nella classe (per approfondimenti si veda Cusi, Malara e Navarra, 2011).

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

L'attuazione di un insegnamento dell'algebra secondo i nuovi indirizzi implica negli insegnanti una riconversione delle loro convinzioni non solo sulla disciplina ma anche sulle modalità del suo insegnamento. L'approccio socio-costruttivo richiede sensibilità didattica, capacità di ascolto e di coordinamento delle voci nella classe e un grande controllo delle dinamiche e dei tempi didattici. Lo spostamento di attenzione nell'insegnamento dell'algebra dai risultati ai processi e l'apertura alle attività generazionali da un lato ed a quelle avanzate di tipo meta (problem solving e dimostrazione) richiedono negli insegnanti una profonda revisione dei contenuti di insegnamento ed una riconversione metodologica che dia spazio al lavoro a piccoli gruppi degli studenti ed alla discussione matematica di classe.

I nostri studi ci hanno reso sempre più consapevoli delle difficoltà che gli insegnanti incontrano nella gestione delle discussioni matematiche: spesso essi parcellizzano il problema in gioco e non lo devolvono agli studenti, tendono a dialogare con i singoli ratificandone gli interventi senza coinvolgere la classe, utilizzano un linguaggio operativo, a volte deviante rispetto alla costruzione matematica che si prefiggono e, cosa di non poco conto, non colgono intuizioni degli allievi se divergenti dalle loro aspettative. Occorre perciò lavorare molto su questo versante.

I risultati dei nostri studi ci consentono di affermare che l'affinamento della capacità di osservazione e controllo di sé nell'azione di classe non si raggiunge in tempi brevi, come certe proposte di didattica breve possano far credere, ma si sviluppa lentamente nel tempo, purché l'insegnante si confronti in modo costruttivo con colleghi ed esperti, impari ad esercitare una costante analisi dei processi didattici in cui è coinvolto, rifletta sulle micro-decisioni che ne determinano lo sviluppo, e giunga a sentire il 'bisogno intellettuale' di riferirsi alla letteratura come supporto.

Tutto questo è molto difficile da ottenere sui grandi numeri. Il problema da un punto di vista sociale è enorme e richiederebbe molti investimenti. Una decisione immediata da prendere a livello istituzionale riguarderebbe l'attivazione di corsi di formazione didattico-disciplinare continua per insegnanti in servizio, condotti da specialisti del settore e da svolgersi all'interno del loro monte ore di lavoro, possibilmente presso le università. Questo però richiederebbe il superamento della frattura istituzionale tra università e scuola, cosa difficile da ottenere vista la generalizzata lentezza con cui operano gli uffici scolastici regionali che fungono da cerniera tra i due mondi.

Un altro serio problema da risolvere è la realizzazione di una qualificata formazione pre-servizio. Manchiamo di lauree magistrali per l'insegnamento e le conoscenze che i nostri laureati acquisiscono sono diversificate e in settori lontani dall'insegnamento. Occorrerebbe perciò istituire percorsi di studio professionalizzanti che dotino i futuri insegnanti di conoscenze matematiche per l'insegnamento nel senso di Bass (2005) e laboratori almeno biennali (meglio se triennali) di preparazione all'azione di classe, per la conquista di competenze fini sul versante metodologico didattico e per l'uso intelligente e critico degli strumenti (libri di testo, LIM, software specifici,…). Tutto questo richiederebbe innanzi tutto un grosso investimento a livello accademico per la formazione di giovani ricercatori.

Questi due macro problemi legati alla qualificazione professionale dei docenti rendono di fatto difficile pensare di poter avere in tempi brevi un rinnovamento generalizzato dell'insegnamento della matematica ed in particolare dell'algebra in linea con i trend internazionali.

Crediamo che, da un punto di vista sociale, sia urgente investire risorse per una adeguata e diffusa professionalità degli insegnanti. Crediamo inoltre che, a fortiori, si debba investire per una formazione di tipo avanzato di coloro che andranno a svolgere i ruoli di tutor ospitante o di tutor coordinatore nell'ambito dei tirocini previsti per l'accesso all'insegnamento. Data la situazione economica del paese la speranza è minima ma l'importante è credere che in qualche modo, prima o poi, le cose muteranno nel giusto modo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Bass, H. (2005). Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education, *Bullettin of the American mathematical Society* (new series), vol. 2, n.4, (pp. 417-430)

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In Bednarz, N. & Al. (Eds), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp.151-154). Netherlands: Kluwer Publishers

Cai, J., Knuth, E. (a cura di) (2011). *Early Algebraization: A Global Dialogue under Multiple Perspectives,* Springer, New York.

Ciarrapico, L. (2002). L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità, relazione svolta al Congresso della Associazione per la Didattica con la Tecnologia (ADT), Cattolica , 7 ottobre 2001, http://www.roma1.infn.it/people/longo/SSIS/ciarrapico.pdf in versione ridotta su *Archimede,* (2002), n. 3.(pp.123-128)

Cusi A., Malara N.A., (2008). The approach to the Principle of Mathematical Induction, *proc. PME 32,* Morelia (Mexico), vol. 2, (393-399)

Cusi, A., Malara, N.A., (2009). Il ruolo dell'insegnante nell'approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico, *L'Educazione Matematica* (pp. 5-23).

Cusi, A., Malara, N.A. e Navarra, G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510). Springer, (pp. 483-507).

De Finetti, B. (1967). Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti critici, suggerimenti, *Periodico di Matematiche*, Serie IV, vol. XIV, Aprile, (pp. 75-153)

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: a Structurale Perspective. In S. Wagner and K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston (Virginia): LEA.

Kieran C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1998). The changing face of school algebra, in Alsina C. & Alii (a cura di), *Proc ICME 8: selected Lectures*, (pp. 271-286). S.A.E.M. Thales.

Linchevski, L., (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, (pp. 113-120).

Malara N.A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 16 n. 10, (pp. 928-954).

Malara, N.A. (1999), Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi, *Rivista di Matematica dell' Università di Parma* (6), 3*, (pp. 153-181).

Malara N.A. (2009). Dimostrazione e insegnamento dell'algebra, *Insegnamento della Matematica e Delle Scienze Integrate*, vol.32 A-B, n.6, (pp. 795-818).

Malara, N.A., (2012a) Il caso dell'algebra. Consolidamenti nella ricerca e mutamenti di prospettiva nell'insegnamento, in Arzarello, F. (a cura di), *Insegnare matematica, oggi. Ricerca didattica, rilevamento degli apprendimenti. Pratiche di classe*. *Dossier Insegnare*, (pp. 52-61).

Malara, N.A. (2012b). Studi circa la formazione degli insegnanti e lo sviluppo professionale degli insegnanti, *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* Vol. 35 A-B, n. 3, (pp. 255–294).

Malara, N.A. (2013). Processi di generalizzazione nell'insegnamento/apprendimento dell'algebra, in Borgato M.T. (a cura di), *Annali online formazione docente*, http://annali.unife.it/ssis/, (pp. 13-36).

Malara, N.A. (2014). La didattica dell'algebra tra ricerca formazione e pratica di classe, in Ferrara, F.,Giacardi, L. Mosca et al. (a cura di), *Conferenze e Seminari Mathesis subalpina 2013-2014*, (pp. 35-55). Torino: Kim Williams Books

Malara N.A, Tagliagambe, R. (2000). Evoluzione nell'insegnamento delle equazioni algebriche, in Gallo et al. (a cura di), *Seminari e Conferenze Mathesis ubalpina 1999-2000*, Torino, 23-39

Mason, J. (1996a). Future for Arithmetic & Algebra: Exploiting Awreness of Generality, in Gimenez, J., Lins, R., Gomez, B. (eds), *Arithmetics and Algebra Education, Searching for the future*, (pp. 16-33) Barcelona: Universitat Rovira y Virgili.

Mason, J. (1996b). Espressing generality and roots of algebra, in Bernardz, N., Kieran, K, Lee, L. (eds), *Approaches to Algebra*, (pp. 65-86) Dordrecht: Kluver Academic Publisher.

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*. The Falmer Press, London.

Prodi, G. (1975/78). *Matematica come scoperta*, D'Anna, Firenze.

Quattrocchi, P., Fiori, C. (1988). *Esami di testi di matematica largamente adottati nelle Scuole Secondarie Superiori,* Univ. Modena, Modena

Radford, L. (1996a). The roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. In: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Ed.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching,* (39-53). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (1996b). Some reflection on teaching algebra through generalization, in Bernardz, N., Kieran, K, Lee, L. (eds), *Approaches to Algebra*, (pp. 107-111) Dordrecht: Kluver Academic Publisher.

Unione Matematica Italiana (a cura di), (1972-1976). *School Mathematics Project. Un progetto per l'insegnamento della matematica*, Zanichelli