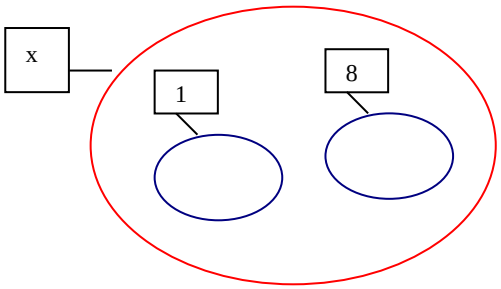
Commenti dell'insegnante di classe
Commenti dell'E-tutor Giancarlo Navarra

23 febbraio 2010 1 *(uso del registratore)*

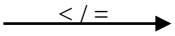
Premessa, obiettivi, contesto in cui si colloca il diario.

La classe è formata da 24 alunni, di cui uno (Gianluca) iscritto da febbraio 2010.
Oggi è assente Alessio.
Attraverso l'attività descritta in questo diario mi interessa verificare se col lavoro svolto finora ho contribuito in qualche modo alla formazione del pensiero pre-algebrico nei miei alunni rispetto a questi argomenti:
- la rappresentazione non canonica del numero
- il simbolo = come indicatore di equivalenza fra due rappresentazioni e non solo come indicatore di conclusione in una lettura procedurale delle operazioni aritmetiche
- il linguaggio algebrico per rappresentare relazioni fra quantità (... ma questo non include già i primi due?[1]).

Occorre precisare che gli alunni:
- conoscono solo le addizioni e le sottrazioni
- eseguono esercizi tipo 26+6=(26+4)+2=30+2=32
- usano x come 'numero misterioso', il 'dato da trovare nella risoluzione dei problemi aritmetici.



- attribuiscono a questa rappresentazione



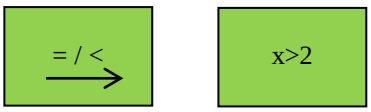
il significato di: ordina mettendo fra un elemento e l'altro il simbolo = oppure < e hanno già svolto esercizi come questo:

0 < (5 – 4) = 1 < (8 – 3) = 5

Per introdurre l'attività ho detto ai bambini che racconto sempre quello che facciamo in classe a un professore di matematica che conosco e che lui ha un amico un po' strano che parla solo 'matematichese' e si chiama Brioshi. Ho detto anche che sicuramente il professore ha raccontato a Brioshi l'ultima attività che abbiamo svolto in classe, in cui erano stati proprio bravissimi, perché mi è arrivata una strana busta a casa e sospetto che provenga da Brioshi...
Ho portato la busta in classe, contiene due cartoncini verdi firmati BRIOSHI con le lettere fatte con forme geometriche (matematichese!). Su uno c'è la freccia con sopra = / < , sull'altro x > 2.
Ci sono anche 8 cartoncini gialli, su ciascuno dei quali c'è una delle seguenti rappresentazioni:

x x-x 0 1 x-1 x+1 x+x 2+x

Apro la busta[2] *e... comincia il verbale.*

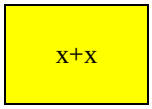


I: Siamo sicuri che la firma è di Brioshi?

---

[1] *Certo, è comunque una competenza autonoma che 'sfrutta' le altre due.*
[2] *I bambini capiscono subito che la firma sui cartoncini è di Brioshi.*

Matteo: Perché è scritto in matematichese!
I: Ma da cosa lo capisci?
Giada: È fatta con lunghi, unità, forme…
I: Allora… il primo cartello avete visto che è di colore verde e c'è scritto…
Manuel: x maggiore di 2!
I: Il secondo è anche verde e cosa c'è scritto?
Giorgio: È uguale… che avevamo già fatto… uguale minore, un disegnetto sul quaderno, così, che mettevamo la freccia e uguale o minore…
I: Per dire che dobbiamo mettere in ordine, la freccia ci domanda sempre di fare qualcosa, no? Questa freccia ci domanda di mettere in ordine, però…
Giorgio: Però usando = e <.
I: = e < oppure = o <?[3]
Giorgio: = o <
I: Si può usare sia = sia < ?
G: Nooo!
I: Due numeri possono essere uguali e anche diversi, cioè uno più piccolo e uno più grande?[4]
Molti rispondono no ma qualcuno dice sì.
I: Andrea, facciamo un esempio: 3 e un altro 3. Sono uguali o no?
Andrea: Sì
I: Può essere che 3 è minore di 3?
C: No.
I: Allora si può usare sia = che <?
C: No.
I: Bisogna scegliere: o due numeri sono uguali o uno è maggiore e quell'altro è minore! Guardiamo cosa c'è ancora nella busta…
Estraggo il cartoncino con x+x.



Valentina: È un'addizione!
Giorgio: In colonna!
I: Se la metto così è in colonna, se la metto così è in riga (*ruoto il cartoncino*). Vediamo come sono scritti gli altri… (*estraggo un altro cartoncino dalla busta*)

---

[3] *Bella puntualizzazione, molto fine. Mi convinco sempre di più che queste 'microsensibilità' dell'insegnante verso aspetti così 'sottili' creano premesse determinanti per la costruzione di una conoscenza significativa in campo matematico. Molto spesso l'insegnante, impegnato nel raggiungimento dell'obiettivo che si è prefisso, è più attento alla distanza fra esso e ciò che un alunno dice che non al senso dell'argomentazione in sé (come in questo caso, il valore di un connettivo).*

[4] *Il commento che sto per scrivere riguarda la sequenza:*

> I: Due numeri possono essere uguali e anche diversi, cioè uno più piccolo e uno più grande?
> *Molti rispondono no ma qualcuno dice sì.*
> I: Andrea, facciamo un esempio: 3 e un altro 3. Sono uguali o no?
> Andrea: Sì
> I: Può essere che 3 è minore di 3?
> C: No.
> I: Allora si può usare sia = che <?
> C: No.
> I: Bisogna scegliere: o due numeri sono uguali o uno è maggiore e quell'altro è minore! Guardiamo cosa c'è ancora nella busta…

Vorrei partire da questa sequenza per un'osservazione di carattere generale.
L'insegnante formula quattro domande con l'obiettivo di far capire il senso dell''o' in senso esclusivo *e con il quinto intervento conclude. Tre di queste domande ammettono come risposta possibile Sì o No. Possiamo dire che la conclusione è stata* argomentata*? A mio avviso no. Gli alunni, di fatto, oltretutto in modo collettivo, forniscono risposte* locali*. Per esempio la risposta* 'No' *alla domanda* 'Può essere che 3 è minore di 3?' *è spontanea, per molti aspetti 'ovvia', ma non dice nulla sull'aspetto cruciale del 'tertium non datur' ('aut', obiettivo dell'insegnante). Una domanda del tipo:* 'Qualcuno ci spiega perché non può essere allo stesso tempo uguale e minore?' *aprirebbe la strada ad una – pur semplice, ma non banale – 'vera' argomentazione. Ci si manterrebbe comunque ad un livello intuitivo, però sarebbe la classe a tenere sotto controllo – nel suo complesso logico – il tema in questione, invece che rispondere Sì o No alle domande dell'insegnante.*

x+1

Giacomo: x+1.
I: Ecco, vanno messi così… Allora questa è un'addizione, avete detto voi. Che cosa c'è scritto?
Jessica: x+x
I: Ma cosa sarà 'sto x?
G: Un numero!
Giorgio: Un numero misterioso!
Giada e Sanne: Sì!
I: Che cosa c'è scritto qua?
Martin: x+1, il numero misterioso più uno.
I: Sempre quel numero misterioso ma+1…, quindi è un'altra…
C: … addizione!
Estraggo un altro cartoncino

x-1

I: Gianluca, cosa vedi qua?[5]
Gianluca: x… -1
I: Quindi questa cosa sarà?
Valentina: Una sottrazione
Arianna: Posso dire una cosa, come si dice… il numero misterioso devi vedere chi ha vinto, perché sul libro io, a casa, c'è quella specie di numero… no, e allora io dico sarà 100!
I: Tu intendi che sta al posto del numero, potrebbe essere 100…[6]
Estraggo un altro cartoncino

1

C: 1! Un numero! Un altro numero!
Estraggo un altro cartoncino

0

C: 0! Un numero! Un altro numero!
Estraggo un altro cartoncino

x-x

C: x–x!
Gioia: È una sottrazione
Giada: Io so quanto fa!
I: Tu sai quanto fa???
Giada: Zero, perché x-x fa zero!
C: Sì!
I: E come fai a saperlo? Come sei sicura?
Giada: Perché fai la sottrazione…

---

[5] *È l'alunno nuovo, ho notato che cerca di seguire, pur non avendo svolto con noi le attività precedenti.*
[6] *Sarebbe stato meglio chiedere ad Arianna di spiegarsi meglio invece che proporre un'interpretazione della sua frase. Il suo pensiero è stato esposto in modo confuso ma un'idea forte c'era, e andava al di là del 'numero misterioso': è un numero al quale si può attribuire un valore. C'è, in modo ancora esilissimo, l'embrione della differenza fra* incognita *e* variabile.

I: Margherita, che cosa pensi? Giada dice: Io so quanto fa, x-x fa sicuramente zero, è sicura, tu sei anche convinta? Sì. Ma come fai a sapere che se c'è x-x è sicuramente zero? Proviamo con un esempio… se x fosse 100, cosa vorrebbe dire questo?
Andrea: 100–100... se tipo le x sono tutte e due 100, 100-100 fa 0.
I: Ma siamo sicuri che x e x sono uguali?
C: Nooo!
Giacomo: E no ah, perché potrebbero essere, non so, tipo la prima x 9 e la seconda 4…
I: E secondo te si può scrivere x e intendere ogni volta un'altra cosa?
Borbottii…
Sanne, secondo te le due x potrebbero essere due numeri diversi?
Sanne: No, maestra, tipo 1–1 fa zero, quindi è la stessa cosa, soltanto non è lo stesso simbolo!
I: Tu dici: Se x è 100, 100–100 fa zero; se x è 1, 1–1 fa zero, vale sempre zero, no? Però Giacomo dice che x potrebbe essere un numero e anche un altro, ma si può usare una letterina misteriosa e darle due valori diversi?
Sofia: E scusa, se uno vuole fare due numeri diversi mette x e y, per esempio…
I: Scusate, se io voglio scrivere un numero qualunque, voglio scrivere 5 per esempio, posso scrivere anche 6 e intendere 5?
Giada e Sofia: No!
I: E no, ah! Se metto x vuol dire che intendo un numero, almeno nella matematica è così, non può avere due valori; giustamente, dice Sofia, se voglio che siano due numeri misteriosi diversi uno lo chiamo magari x e quell'altro lo chiamo y… almeno è chiaro. Vediamo, mi sa che Brioshi ci ha messo in grande difficoltà, ci ha dato un compito molto difficile…[7]
Estraggo un altro cartoncino.

x

C: x!
I: Questo è x da solo.
Estraggo un altro cartoncino.

2+x

C: 2+x
Giada: Addizione.[8]
I: Allora, ragazzi, qua bisogna cercare di mettere a posto 'sta roba… io dico così, non so se sarete d'accordo, ma siccome vedo i cartoncini di due colori diversi e vedo anche che qua c'è la firma, per conto mio questo è il messaggio di Brioshi che ci chiede qualcosa, ma siete d'accordo? Non so… pensate anche voi…
Giorgio: E quelli saranno gli indizi! *Indica i cartoncini gialli.*
I: E queste sono le cose da mettere in ordine, immagino.
Sanne: Forse ci fa una caccia al tesoro…
Valentina: Maestra, mandagli una mail!

---

[7] *Una lunga sequenza di interventi veramente interessante, su un aspetto matematico molto importante e tutt'altro che semplice. Sono emerse molte idee (una lettera che sta al posto di un numero, a lettere uguali corrispondono numeri uguali, attribuzione di un valore ad una lettera). È evidente che la classe è abituata ad argomentare. Forse sarebbe stato meglio lasciare a Giada, che ha aperto le danze con la sua osservazione, uno spazio maggiore per spiegarsi rispetto a quel suo striminzito* 'Perché fai la sottrazione... '. *L'argomentazione deve essere il più possibile completa. Troppo spesso gli alunni si limitano a poche parole perché sanno che tanto l'insegnante capirà e aggiusterà la faccenda anche linguisticamente. Bisogna capovolgere questo stereotipo.*

[8] *Il termine è corretto ma l'intervento è troppo povero. Va specificato: 'È un'addizione fra 2 e x'. Saper costruire argomentazioni complete, coerenti, linguisticamente significative è una competenza richiesta ormai in molti ambienti istituzionali: dai programmi italiani, alle prove SSIS, al RMT (Rally Matematico Transalpino, a numerosi progetti speciali anche nel campo dell'educazione matematica. Per esempio il progetto inglese 'The National Numeracy Strategy' formula questo suggerimento:* Chiedete agli alunni di fornire delle risposte costituite da più di una singola parola o di un singolo numero. Per esempio, talvolta potreste richiedere che anche la risposta a domande brevi come: 'Quanto fa sedici più otto?' sia espressa con la frase completa: 'Sedici più otto è uguale a ventiquattro' senza accontentarvi di un semplice 'Ventiquattro'.

I: Io faro così, quello che facciamo oggi dopo io glielo mando, lo mando al mio amico professore e gli scrivo: Guarda, noi abbiamo pensato questo, prova a domandare a Brioshi se gli va bene, magari gli chiedo l'indirizzo e-mail così gli scriviamo direttamente…[9] Allora ricordiamoci bene che cosa vuole Brioshi, lui vuole dirci due cose: di fare un lavoro che è mettere in ordine… che cosa dobbiamo mettere in ordine?[10]
Jessica: I numeri.
I: Se ce li manda vuol dire che lui vuole che li mettiamo in ordine, ma fra uno e l'altro che cosa possiamo mettere?[11]
Giada: = o >
I: Bene, e qua però lui ci dà un indizio, vedete? *Indico il cartoncino con x>2.*

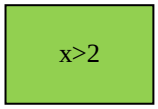
x>2

Che cosa dice? Guarda che x è…[12]
Martin: … maggiore di 2.
I: Allora, Sanne, può essere 1, x?
Sanne: No, può essere tanti altri numeri, 1, 2, 4…
I: 1 può essere?[13]
C: Nooo!
Sanne: No, perché non si sa, può essere 1, o 100.
I: Pensaci bene, Giada dice una cosa diversa, la vedo che freme là sul banco… può essere 1, x, Giada?
Giada: No, perché dev'essere un numero maggiore di 2 e 1 è minore di 2.
Sanne: Ah! È vero! Può essere o 3 o 4 o 6 o 7…
I: Può essere mille?[14]
C: Siìì!
I: Può essere zero?[15]
C: Nooo!
I: Arianna, cosa volevi dire?
Arianna: Che se x è maggiore di 2 allora… è zero.
I: È zero… perché zero è maggiore di 2?[16]
Brusìo di nooo.[17]
I: Zero secondo te è maggiore di 2? Pensa bene, cosa vuol dire essere maggiori?
Arianna: Mi sono sbagliata.
I: No, dimmi se ti ricordi, non importa se ti sei sbagliata, ma adesso ti sei accorta… cosa vuol dire essere maggiori?
Arianna: Essere più grandi…
I: Essere più grandi, valere di più…vale più zero o 2?

---

[9] *Non so ancora come prosegua, ma potreste farlo davvero! Ho fatto il Brioshi per molte classi. Ma potete fare anche scambi fra 'classi Brioshi'.*
[10] *Attenzione alle domande 'a risposta sincopata'…*
[11] *Credo che l'insegnante dica troppo cose. Dovrebbe far argomentare gli alunni, invece che indurre risposte* brevi *e* locali. *Potrebbe essere che l'insegnante ritenga l'attività interessante ma 'difficile' e aiuti quindi in modo eccessivo la classe? Mi sembra di cogliere questa preoccupazione di fondo. Ma forse sbaglio. In effetti ero un po' preoccupata, ma non tanto della difficoltà della consegna (avevo un po' enfatizzato questo "compito assai difficile" per stimolare l'attenzione e la motivazione a svolgerlo). La mia vera preoccupazione era che non fosse abbastanza chiaro che i cartellini verdi erano la consegna e soprattutto erano in relazione fra loro (non ho avuto abbastanza fiducia nei miei alunni…)(V. anche commenti 20 e 30).*
[12] *Perché l'insegnante dice i tre quarti della frase che dovrebbero costruire gli alunni? Non sarebbe sufficiente aprire le danze con una consegna del tipo* 'Interpretate questo cartellino' *e poi passare la mano favorendo e pilotando gli interventi? Gli insegnanti, molto spesso, non assumono il ruolo fondamentale di* smistatori del traffico argomentativo. *La responsabilità di costruire affermazioni, definizioni, ipotesi, deve essere lasciata alla classe, in quel rapporto che Broussou chiama* devoluzione, *in cui l'insegnante fa accettare all'alunno la responsabilità di una situazione di apprendimento e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer. Questa osservazione vale anche per altre parti dell'attività che non metto in evidenza per non rischiare di essere ripetitivo.*
[13] 'Sanne, puoi spiegarci meglio?'
[14] 'Può essere 1000? Come il solito spiegatevi (sapete farlo), non basta dire Sì o No'.
[15] *Idem. Si perdono molte occasioni per costruire dei significati anche in modi imprevedibili (come argomenterebbero gli alunni il fatto che 'può essere zero?').*
[16] 'Puoi spiegare meglio quello che vuoi dire?'
[17] *Penso al Commento 4 e all'ovvietà di certi interventi collettivi che riflettono solo una presa di posizione locale (in questo caso: è 'ovvio' che zero non è maggiore di 2).*

Arianna: 2.
I: E quindi se x è maggiore di 2 non può essere 0. 2 è più grande o più piccolo di 0?
Jessica: Più grande!
Valentina: Maestra, ma non si può mettere neanche il numero 2!
I: Perché?
Valentina: Perché se no dovevamo mettere =.
I: Brava Valentina![18] Allora facciamo così, io vi suggerisco di fare in un modo, siccome qua ci sono i cartelli, non posso scrivere alla lavagna, io li metterei appesi… facciamo una fila… e dopo li spostiamo cercando di metterli in ordine…
Giacomo: Forse… ma perché solo uno ha la freccia e gli altri no?
I: Solo uno ha la freccia? Quale? Quello verde?
Giacomo: Sì.
I: Perché[19] qua ci dice cosa fare, credo, perché usa proprio il modo nostro, noi abbiamo fatto giorni fa questo esercizio, evidentemente il mio amico professore gli ha raccontato che noi con questo esercizio abbiamo messo in ordine i numeri, e lui ci dice: Voglio anch'io che fate questo lavoro, solo che vi do un indizio, che x è maggiore di 2[20].
Appendo il cartello verde alla lavagna.

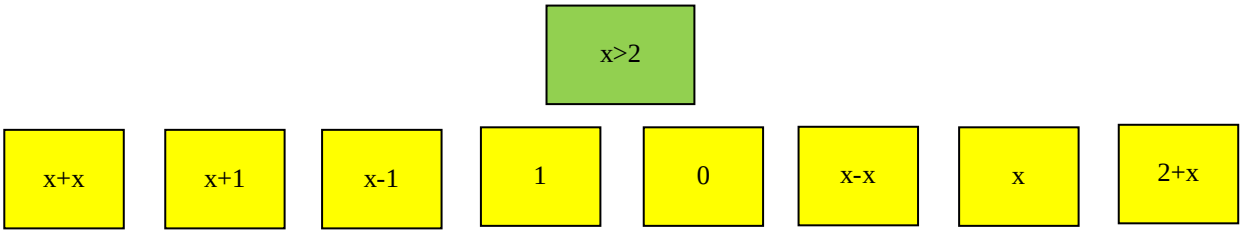


I: Questa è la regola, secondo me, io adesso la appendo là in alto…
Sanne: Maestra, io forse ho capito come si mettono in ordine, perché… allora… visto che c'è scritto x>2, tipo se ci sono i cartellini gialli, ci sono 0, 1 e gli altri, allora metteremo x vicino a x>2.
I: Vediamo adesso cosa succede…[21]
Comincio a sistemare uno spaghetto fra la lavagna e il termosifone per appendere i cartoncini
Sofia: Maestra, tu sei curiosa di sapere chi è Brioshi?
I: Sìii!
Sofia: Anch'io!
Giacomo: Maestra, ma tu conoscevi Brioshi?
I: No, l'ho sentito nominare ma non lo conosco di persona, comunque ci ha messo di fronte a un bel compito, eh? Io avevo detto che siete bravi in matematica, però stavolta ci ha dato un compito assai difficile…
Deniz: Maestra, ma tu sai scrivere in matematichese?
I: Ma sai, finché facciamo queste cose qua so anche scrivere… in matematica so qualcosa più di voi, dopo non so se qualunque messaggio di Brioshi riesco a capirlo… finora sì, perché quello che ha mandato io l'ho capito!
Sanne: Ma dove hai messo quel messaggio che ci aveva mandato l'altro anno?
I: Quello lo devo aver salvato in un computer, lo tireremo fuori…
Sofia: Ma non mi ricordo, l'avevamo risolto quello dell'altro anno?
I: No, eravate troppo piccoli, non ce le facevate… Ma mentre finisco di sistemare lo spago e i cartellini vi chiedo intanto se avete qualche idea su… come partiamo? Come troveremo da dove partire?
Sanne: Appendiamo tutti i cartellini e dopo veniamo uno alla volta e cercheremo di metterli in ordine.
I: Ok, e da dove partiamo?
Sanne: Mettiamo tutti i cartellini a caso e poi veniamo uno alla volta e facciamo il serpente[22]
I: Mi pare una buona idea…
Jessica: Maestra io ho già capito
Tutti commentano, parlano animatamente
I: Ho quasi finito…ecco. Io adesso vi chiedo di stare un momentino in silenzio, di osservare bene questi cartelli e di studiare un modo per cominciare. Jessica aveva un'idea e poi la sentiremo, ma pensateci un attimo, non dite così, tanto per parlare… da dove possiamo incominciare, cosa possiamo fare? Ci dobbiamo ricordare che x è maggiore di 2, quindi lo dobbiamo mettere in una posizione dove si capisca che è più grande di 2. Su questo siete d'accordo?
C: Sì

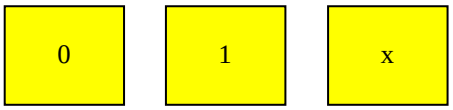
---

[18] *L'osservazione di Valentina è davvero molto fine, e meritava un* 'Brava! Credo però che sia meglio che tu spieghi questa tua osservazione perché voglio essere sicura che tutti i tuoi compagni l'abbiano capita'. *Oppure:* 'Jessica *(per esempio)* ma cos'è 'sta cosa che dice Valentina? Spiega quello che hai capito'.
[19] 'Chi lo spiega a Giacomo?'
[20] *Sono tutte spiegazioni che dovrebbero emergere dal confronto fra gli interventi degli alunni.*
[21] *Chiederei a Sanne di spiegarsi meglio, altrimenti sembra che le cose che dice, e come le dice, abbiano poca importanza, perché, tanto (è il pensiero dominante nelle classi)* le cose le dice la maestra. *Spesso, in queste situazioni, invito ad un contratto che negozi una* rifondazione dei ruoli.
[22] *È un modo di alzarsi dal primo all'ultimo banco uno dopo l'altro.*

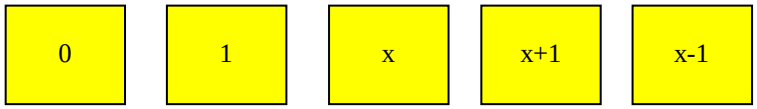
I: E dopo pensateci voi…Jessica, cosa volevi dire?
Jessica: Metto x, poi 0, poi 1.
Proteste.
I: Sentiamo cosa dicono i tuoi compagni, io però ti ricordo una cosa: fra un cartello e l'altro dobbiamo mettere o = o <. Tu hai detto: Io metterei x, 0, 1. Adesso vediamo se funziona (*sistemo i cartelli*). Facciamo la prova: x… posso mettere che è uguale a 0? Pensaci bene.



Jessica: Sì…
Proteste.
I: Jessica ha pensato una cosa; se ha pensato sbagliato glielo faremo capire, non occorre fare boati!
Sanne: Se x è maggiore di 2 non può essere per primo, perché allora sarebbe minore di 0 e di 1, e quindi si mette 0, 1 e x.[23]
Deniz: Anch'io pensavo la stessa cosa!
I: Sei d'accordo, Jessica? Hai capito? Loro dicono che non puoi dire che x è minore di 0, perché sappiamo già che è maggiore di 2. Il contrario, dicono loro. Prova, vediamo se funziona.
Jessica sposta i cartelli.
I: 0 è uguale a 1?
C: Nooo!
I: 0 è minore di 1?
C: Siii!
I: Allora ci sta. 1 è uguale a x?
C: Nooo!
I: Perché?
Sanne: 1<x perché x>1[24].
I: Allora questi tre sono in ordine.



Cosa possiamo sistemare adesso?
Deniz: x+1, poi x-1, poi 2+x, x-x e x+x.
I: Facciamo una cosa per volta perché mi hai confuso le idee… prendiamo x+1, dove lo metteresti in modo che vada bene con i nostri simboli? Non puoi metterlo dove ti pare… deve funzionare con l'ordine preciso che ci ha dato Brioshi…
Nicolò: Io so dove potrebbe andare.
Deniz rimette x+1 dopo x, poi x-1.



I: Perché pensi che vada bene?
Deniz: Eh, perché… sempre è x e x, per me, solo per questo, non so se va bene anche per i miei compagni, c'è + e -, e 1 e 1.

---

[23] *Ottima argomentazione. Molto puntuale il ragionamento matematico.*
[24] *È un'argomentazione tautologica. Io credo che Sanne intendesse: "è ovvio che 1<x, perché x>1, c'è il cartellino che dice x>2!" Lo capisco dall'intonazione della voce, dall'espressione del volto.*

I: E allora? Aspetta un attimo… chi viene prima, x+1 o x-1, nell'ordine che dobbiamo fare qua?[25] Tu metti prima x+1 e poi x-1, quindi questo è minore di questo (*indico i due cartelli*) o è uguale? Sono uguali questi due? Noi possiamo mettere solo = o <. Fra questi due posso mettere un =? Ci sta bene il segno =? (*Deniz non è più sicura*). Matteo, cosa pensi?[26]
Matteo: No.
I: Allora l'altra possibilità: si può mettere <? Deniz? Non guardare i tuoi compagni, la tua idea c'è, quindi tu spiega la tua idea, se sarà sbagliata dopo capiremo…
Deniz: Sì
I: Per te si può, quindi x… cos'è x?
Deniz: Un numero.
I: Sì, allora un certo numero +1 è minore dello stesso numero -1[27]. Va bene… Manuel, sei d'accordo?
Manuel: No, perché non può andare, perché secondo me, allora… x+1, dopo 2+x e x+x.
I: Tu dici la tua idea, ma mi devi dire se è giusto quello che ha detto Deniz. Io non dico niente perché ho anche la mia idea, magari ve la dico dopo. Deniz dice: Io penso di lasciare in questo ordine le cose: x, poi viene x+1,quindi x è minore di x+1, questo vale di meno di questo. E poi dice: siccome non posso mettere il segno = fra x+1 e x-1, ci metto <..
Proteste.
I: No, voglio sentire se va bene quello che dice lei, perché sì o perché no…
Sofia: Allora non sono d'accordo perché meno non è maggiore di più, perché 'più' vuol dire che aggiungo, invece 'meno' vuol dire che tolgo…
I: Io anche penso che sia più sicuro…
Sofia: Mettere prima meno che più…
I: Sei d'accordo, Deniz? Ti sei resa conto? Bene… Adesso se io lo metto qua… sta a vedere cosa succede… perché non è mica finito qua! Abbiamo spostato i cartelli e abbiamo messo prima x-1 e poi x+1. Allora la situazione è questa:

0	<	1	<	x	<	x-1	<	x+1

Funziona tutto, qua?
Sanne: Per me sì…
I: Sofia scuote la testa… cosa c'è che non va?
Sofia: Il problema è che x-1… è maggiore x, no, x-1…
I: Eh, non può essere che x-1 sia maggiore di x…[28]
Deniz: Anche per me…
I: Brava![29] Lo metto più indietro?
Valentina: Maestra, ma ci ha dato un compito difficilissimo!
I: È una cosa tremenda…[30] allora così va bene? Gioia, guarda bene: c'è 0, c'è 1, poi c'è x-1, qui cosa metto, = o <? Può essere che 1 sia uguale a x-1?[31]

---

[25] *Di fronte a queste inevitabili difficoltà gli alunni mostrano certamente di possedere delle competenze, pur embrionali nell'interpretazione della lettera. Poiché però le difficoltà sono oggettive, forse varrebbe la pena recuperare rappresentazioni non canoniche del tipo '3+1', '3-1', con le quali la classe ha confidenza, e utilizzarle come ponte verso la comprensione (almeno l'embrione della comprensione) che, per qualunque valore di x, x-1 è minore di x+1 (v. successivo Commento 27).*
[26] *Mi sembra che l'intervento dell'insegnante sia troppo 'corposo'. Sei domande diverse in poche frasi disorientano. Proprio perché gli alunni mostrano un atteggiamento positivo verso la formulazioni di ipotesi, sarebbe stato forse meglio che l'insegnante desse loro più autonomia, e rendesse la sua presenza meno forte, svolgendo il ruolo prevalente di osservatore del modo in cui la classe si muove in questo ambiente.*
[27] *Ribadisco l'opportunità, vista anche l'età degli alunni, di fare ricorso - o, meglio, di stimolare il ricorso – a rappresentazioni non canoniche strutturalmente analoghe a quelle dei cartellini gialli. È troppo presto per un ragionamento condotto solo in ambito astratto. Probabilmente riferimenti di questo tipo avrebbero consentito salti significativi nella comprensione.*
[28] *Ancora una volta sarebbe stato importante il ricorso alle forme canoniche.*
[29] 'Brava! Spiegaci quello che hai capito' *(o qualcosa del genere).*
[30] *È un po' la conferma dell'ipotesi che formulo nel Commento 11 a proposito della percezione da parte dell'insegnante di una difficoltà eccessiva del compito. La conseguenza, di cui lei si è resa conto, è che, siccome desidera condurre la classe comunque alla conclusione, deve forzare la mano reggendo il filo del discorso.*
[31] *Qui mi sono perso. Dopo 1 non c'è x? E avevo capito che i simboli fra questi primi cinque cartellini li aveste già messi. Sì, dopo 1 c'era x. Ma quando i bambini stabiliscono che (x–1)<(x+1), non va più bene l'ordine*

Gioia: No, perché x>1[32].
I: È addirittura maggiore di 2! Allora se x > 2, quando io dico un numero più grande di 2 quale può essere?
Valentina: 3, 4, …
I: Mettiamo che sia 3, il più piccolo possibile, ma potrebbe essere anche mille, 3-1 fa 1? Può mai fare 1?
C: Nooo!
I: Allora 1 potrebbe essere uguale a x-1?
Samuele M: Nooo!
I: Perché 1 non è uguale a x-1, di sicuro, io sono sicurissima…
Samuele M: Perché può essere anche che, tipo 1, cioè voglio dire x può essere più grande…
I: Ma non può essere più piccolo, questo è il problema… l'unico numero che meno1 è uguale a 1 qual è?
Giada: Io so! 2-1!

I: L'unico modo per fare 1 è 2-1[33]. Ma x può essere 2?
C: Nooo!
I: Impossibile, perché? Samuele Miccoli…[34]
Samuele M: …
I: Io ho la prova che non può essere 2!
Martin: Perché deve essere più alto…
I: Cioè maggiore, è scritto sul cartello di Brioshi, mai x può essere 2! E se l'unico numero che meno 1 dà 1 è il 2, allora x-1 non può essere 1 ma è di più. Allora che segno metto fra 1 e x-1?
Sanne: Minore.
I: Brava! Adesso facciamo parlare qualche altro bambino: Nicolò, dimmi la tua idea.
Nicolò: Che x-x è uguale a zero (*sposta il cartello*)
I: E cosa ci mettiamo fra x-x e 0?
Nicolò: =
I: Siete d'accordo?
C: Siìì!
I: E posso metterli anche al contrario?(*lo faccio*)
C: Nooo!
I: Così non va bene? Solamente prima x-x e poi 0?
Molti si accorgono che va bene lo stesso.
I: Cosa dice Manuel?
Manuel: Vanno bene tutti e due! È sempre 0!
Giorgio: È la stessa cosa, già prima lo avevi detto, se x e con quell'altra x sarebbe un altro numero…
I: Qualunque sia x… se x è mille, mille – mille quanto fa?
C: Zero!
I: E che venga prima mille – mille o che venga prima 0 è uguale. Allora, sistemato un altro cartello!

0	=	x-x	<	1	<	x-1	<	x	<	x+1

Chi ha altre idee? Mancherebbero questi due cartelli…
Sanne: Veramente questo qua dovrebbe andare…qui (*sistema 2+x dopo x+1 e infine x+x*)

---

precedentemente ipotizzato, in quanto (x–1) deve stare prima di x. Quando chiedo "qui cosa metto, = o < ?" non spiego con un commento che chiedo che segno mettere fra 1 e (x–1). Io voglio che capiscano che x–1 non può essere uguale a 1, in quanto x>2.

[32] *L'osservazione di Gioia non va bene. Lei dice che x è maggiore di 1, ma da dove ricava questa informazione? Gioia dice che x > 2 perché c'è il cartellino verde di Brioshi che lo afferma*

[33] *I bambini conoscono e operano solo con i numeri interi naturali.*

[34] *Provo a coinvolgerlo perché lo vedo poco partecipe, mi sembra strano perché è abilissimo nel calcolo. Sì, ma qui, purtroppo per lui, non c'è niente da 'calcolare'. Qui conta il comprendere le relazioni fra diverse rappresentazioni, ed è una questione più sofisticata e molto più algebrica del calcolo. Da questo derivano, probabilmente, il suo disorientamento e il suo estraniarsi. Era abituato a considerarsi e ad essere considerato bravo e qui si sente come un pesce fuor d'acqua e non si mette in gioco. Abbiamo rilevato questo atteggiamento in moltissimi altri casi. Allo stesso modo non mi meraviglierei se alunni, normalmente poco presenti, in questa attività, più di riflessione, si fossero trovati più a loro agio (v. Commento 38).*

0	=	x-x	<	1	<	x-1	<	x	<	x+1	<	2+x	<	x+x

I: Penso che tu abbia ragione, però voglio essere sicura, facciamo tutto il ragionamento… non so se avete ascoltato bene, lei dice: io dopo x+1 metto prima 2+x e poi x+x, e lei è sicura. Gioia, sei d'accordo?
Gioia: Sì, perché x>2 quindi può stare dopo il 2.
I: 2+x vale di meno o di più di x+x? Qui (*al posto del 2*) ci potrebbe stare una x?
Giada: Nooo[35]!
I: No, sarebbe troppo piccolo. Proviamo a vedere se funziona…
Giacomo: Per me bisogna cambiare tutto…
I: Cambiare tutto! Oh Dio, e cosa facciamo?
Manuel: È giusto! È tutto giusto!
Sanne: 0 = x – x < 1 < x – 1 < x < x+1 < 2+x < x+x … è giusto!
Giacomo: Secondo me è da cambiare una cosa[36].
I: Che cosa cambieresti?
Giacomo: Quelle due x ultime… vengo lì per spiegare…
I: Vieni, Giacomo, solo ascoltiamolo, perché se dopo ha torto bisogna spiegare perché…
Giacomo: *Scambia 2+x con x+x*. Secondo me questo potrebbe andare qui, perché tipo non so, mettiamo caso che x sia 3, questo è un 2, quindi…
I: Scusa, tu dici: mettiamo caso che x sia 3, facciamo la prova… allora questo è 3, questo è…
Giacomo: 2…
I: E no, perché? Cambia numero? Se x è 3, x è sempre 3 dappertutto dove lo metti, quindi questo (*indico x+1*) sarebbe 3+…
Giacomo: 1…
I: Cioè…
Giacomo: 4.
I: Sarebbe 4 ed è più grande di 3… questo quanto sarebbe? Se x fosse 3 qui che numero avremmo?
Nicolò: 5!
I: … ed è più grande di 4, scusa se mi permetto… e qua che numero verrebbe?
Giada: 6.
I: E quindi… è sbagliata questa successione?
C: Nooo!
I: È giusta. Facciamo un'altra prova?
Sanne: Ma tu prova a leggere questo…
I: Io leggo… correggetemi se sbaglio… 0 è uguale a x-x, che è uguale a 1…
C: Nooo!
I: Come no?
Nicolò: x-x è minore di 1!
I: Sì, scusami, x-x è minore di 1 perché x-x è…
C: Zero!
I: Che è minore di 1, chè è minore di x-1, che è ancora minore di x, che è minore di x+1, così leggo io, che è minore di 2+x, che è ancora minore di x+x. (*I bambini hanno seguito passo passo la mia lettura commentando ogni passaggio con un 'sìii'*). Facciamo una prova proprio per essere sicuri prima che spedisca a Brioshi questa roba, che dopo facciamo una figuraccia se abbiamo sbagliato… Proviamo a mettere al posto di x un numero[37], dimmi Jessica un numero per provare, un numero che sia x, mettiamo al posto di x un numero, Jessica che numero vuoi mettere?
Jessica: 3.
I: Posso mettere 3 al posto di x? Non abbiamo mai provato a mettere 3 al posto di x?
C: Sì!
I: Direi di sì… ci ha provato Giacomo. Dimmi un altro numero, Samuele Mijatovic.

---

[35] *Non capisco perché l'insegnante abbia posto questa domanda, ma la risposta è che sì, si potrebbe anche scrivere una x al posto del 2; in questo modo le due ultime tessere a destra diventerebbero uguali (x+x) e quindi sarebbero unite da un '='. Ma perché sostituire un numero conosciuto con un'incognita? Io posso attribuire ad una lettera un certo valore (o un insieme di valori) ma non posso fare l'inverso. Ma non posso mettere x al posto del 2! x>2, lo dice Brioshi nel suo cartellino! Io chiedo se si può mettere x al posto di 2 perché così renderei uguali gli ultimi due cartellini, ma mi aspetto che gli alunni rispondano di no, perché x>2, e che per questo considerino (2+x)<(x+x).*
[36] *Devo proprio dire che la classe è eroica!*
[37] *Oh… bene!*

Samuele Mij: 5.
I: Proviamo col 5. Allora 0 =…
Giada: 5-5.
I: Funziona?
C: Sì.
I: Che è minore di 1, è giusto che 5-5 è minore di 1?
C: Sì.
I: Che è minore di…
Carlotta: 5-1…
I: È giusto che 1 è minore di 5-1? Quanto vale 5-1?
Carlotta: 4.
I: Che è minore di… 5, che è minore di…
Jessica G.: 5+1.
I: Che vale…
Jessica G.: 6.
I: Che è minore di… (*indico 2+x)*
Sanne: 7.
I: Che è minore di…
Jessica: 8.
C: 10!
I: Ultima prova!
Varie proposte, qualcuno dice dieci.
I: Proviamo col 10, ma ultimissima, perché la maestra Antonella deve fare la sua lezione…
Lo eseguono un po' per ciascuno esattamente.
I. Sentite, io adesso me lo segno e lo mando in questo ordine a Brioshi, e stiamo a vedere se è giusto e cosa ci chiederà la prossima volta, se ci manda qualche altro messaggio…
.[38]

---

[38] *Ho notato che alcuni alunni che normalmente sono molto abili nel calcolo non hanno contribuito in prima persona, mentre altri che non sono affatto precisi e veloci nel calcolo hanno dimostrato molta vivacità mentale e capacità di operare con l'incognita x, con grande sforzo ma senza perdersi d'animo. Via via che i cartoncini si sistemavano al posto giusto vedevo aumentare la partecipazione degli alunni più insicuri. Probabilmente non erano in grado di formulare proposte, ma capivano benissimo quelle dei più intraprendenti. In particolare la bambina con le maggiori difficoltà in matematica, che interviene fra i primi proponendo una successione completamente sbagliata, è stata attenta e partecipe fino alla fine e quando abbiamo sostituito per prova i vari numeri con x non ha più avuto dubbi.*
L'alunno appena iscritto alla classe, che sa già eseguire moltiplicazioni e divisioni scritte ma non padroneggia alcuna strategia di calcolo mentale, né la linea dei numeri, ha seguito per un po' e poi ha cominciato a distrarsi.
Certamente ho indirizzato e sostenuto i vari ragionamenti ponendo molte domande e ribadendo più volte alcuni concetti, ma l'ho fatto per permettere a tutti di arrivare alla conclusione, perché avevo la netta sensazione che Manuel, Sanne, Sofia e Giada avrebbero eseguito il compito da soli e in brevissimo tempo…
Non vorrei che dalla quantità dei Commenti, rivolti soprattutto alla gestione della discussione, l'insegnante ritenesse che io non abbia apprezzato una lezione così intensa e partecipata in una situazione problematica indubbiamente complessa. Ritengo che tale complessità, forse non pienamente prevista in sede di preparazione dell'attività, abbia in certi momenti condizionato la sua conduzione, enfatizzando il ruolo dell'insegnante e limitando l'autonomia degli alunni.
Per esempio, quattro o cinque tessere al posto di otto sarebbero state sufficienti per permettere comunque delle belle analisi di forte valenza logico-matematica. Altre tessere avrebbero potuto emergere chiedendo agli alunni stessi di proporle, come se dovessero essere loro a costruire un problema per Brioshi. Allo stesso tempo, ripeto il suggerimento di ricorrere, appena necessario, all'aritmetica, in particolare ai numeri in forma non canonica, traghetti molto potenti verso la conquista di significati a livello algebrico.
Gli alunni, chiaramente abituati alla discussione e all'argomentazione in ambiente matematico (cosa non semplice per una seconda primaria), sarebbero stati favoriti da una situazione iniziale meno 'abbondante', e l'insegnante, forse più tranquilla, avrebbe potuto consentire una maggiore libertà di espressione e avrebbe potuto svolgere un ruolo più decentrato.
Le differenze di comportamento fra gli alunni rilevate dall'insegnante non mi stupiscono, e vi ho accennato nel Commento 34. In questo senso, a proposito dei Manuel, Sanne, eccetera, col tempo sono diventato sempre più cauto nell'affrontare questioni come 'essere portato per la matematica', 'essere veloce nei calcoli', 'essere intuitivo', 'capire subito', e così via. Certamente 'l'orecchio assoluto' in matematica esiste, ma sono casi molto, molto rari. L'intuizione 'normale' viene favorita perché, in condizioni in cui prevalgono il gruppo, il tempo che fugge, la necessità di svolgere il programma, i test a scelta multipla, eccetera, la velocità diventa un valore *diffuso. Ma questioni altrettanto*

importanti nell'apprendimento (soprattutto iniziale) della matematica riguardano anche altri aspetti come una capacità di riflessione 'lenta', il mettersi in gioco, la disponibilità a collaborare, lo sforzo di esprimersi, il gusto di esplorare, la fantasia, la creatività, il ricorso a competenze diverse come 'chiave' per l'accesso ai saperi matematici, eccetera, aspetti che spesso hanno bisogno di condizioni in cui la velocità del pensiero non sia il valore dominante.

Comunque: la classe ha seguito molto bene fino alla conclusione, ha mostrato di sapere che di matematica si può parlare e lo fa con entusiasmo, mostra notevole confidenza con le rappresentazioni matematiche, è tenace nel seguire l'insegnante. Direi che puoi essere molto soddisfatta.

Condivido le osservazioni sulla velocità come valore diffuso, ma quando scrivo che "Manuel, Sanne, Sofia e Giada avrebbero svolto il compito da soli e in brevissimo tempo" non considero la velocità come una componente della "bravura": li vedo più intraprendenti e sicuri degli altri e mi preoccupa che possano concludere troppo presto, non lasciando agli altri il "loro" tempo per arrivare alle stesse conclusioni.

Delle considerazioni finali quella che mi fa più piacere è che si nota che la classe parla di matematica con entusiasmo: il primo obiettivo che perseguo con passione e convinzione è proprio quello di far affrontare la matematica agli alunni come una materia affascinante, da esplorare senza paura, e non (come spesso la considerano per primi i genitori) come la "bestia nera" fra le materie. Per me un problema di matematica difficile è un problema "gustoso", che mi darà soddisfazione risolvere. Cerco di trasmettere tutto questo ai bambini ed evidentemente qualche volta (non tutte le classi che ho avuto erano come quella in cui lavoro adesso…) ci riesco.