LE INDAGINI DELL'ISPETTORE CLOUSEAU. IL CASO DEL MILIARDARIO ASSASSINATO E ALTRI DELITTI ANCORA

Dove si parla da un punto di vista inconsueto di variabili e si ragiona di linguaggio e metaconoscenza[1]

Giancarlo Navarra[2]

1. PREMESSA

Questo lavoro fa parte di un'attività condotta dal 1986 in classi di scuola media a tempo prolungato da me, insegnante di matematica, in collaborazione con Laura Buzzatti, insegnante di lettere dello stesso corso, per due ore alla settimana, costantemente in compresenza. Tale attività, molto articolata al suo interno, si è differenziata e ampliata nel corso del tempo, ed è già stata illustrata in alcune delle sue fasi più significative anche su questa rivista [5] [6].

Il principale obiettivo educativo è rappresentato dal *miglioramento delle competenze linguistiche e argomentative* degli alunni, condizione essenziale per la comprensione in un qualsiasi contesto disciplinare. L'ambito in cui operiamo è quello della Logica, intesa come *area trasversale* rispetto a quella linguistica e a quella scientifico matematica, e quindi soprattutto come *riflessione sul linguaggio.*

Nello svolgimento della nostra attività usiamo la lavagna luminosa in modo costante e soprattutto molto dinamico in quanto le possibilità che essa offre - sovrapporre trasparenti, accostarli, sostituirli o elaborarli *in itinere* - rendono molto più facilmente interpretabili certe proposte dell'insegnante e realmente confrontabili durante le riflessioni collettive le argomentazioni degli alunni da loro riportate su lucido. Quello del confronto è infatti uno momento educativo al quale attribuiamo grande importanza, stimolando gli alunni in due direzioni: ad esplicitare le loro argomentazioni e ad intervenire criticamente su quelle addotte dai compagni (a questo scopo la lavagna luminosa è un partner insostituibile). In questo modo cerchiamo di favorire la nostra e la loro attenzione sui processi di organizzazione, sulla completezza e sulla coerenza dei ragionamenti esposti, sapendo che una fra le competenze linguistiche più complesse da gestire riguarda il saper organizzare in modo *comunicabile* il proprio pensiero e il saper quindi *spiegare* - in queso caso sia per iscritto che a voce - come lo sviluppo di un ragionamento conduca, a partire da certe premesse, ad una o più conclusioni. A questo proposito sottolineiamo l'importanza dal punto di vista cognitivo di questa fase che chiameremo della “concatenazione delle informazioni”. Nella nostra esperienza sulle

---

1 Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto CNR n. 96.00191.CT01. E' stato presentato al BISME 3 (3rd Bratislava International Symposium on Mathematical Education) di Bratislava, Slovakia.

2 Giancarlo Navarra, insegnante di Scienze MCFN in classi a tempo prolungato presso la Scuola Media di S.Giustina (BL), è membro del Gruppo di Ricerca sull'Educazione Matematica (GREM) operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena sotto la direzione della prof. Nicolina Malara. Per l'anno scolastico 1996/97 è distaccato presso tale università.

attività concernenti la costruzione di un ragionamento ipotetico abbiamo potuto osservare infatti - come altri ricercatori [4] - quanto sia difficile per gli allievi, più che enucleare le ipotesi, *sviluppare argomentazioni concatenate a partire da esse*, e l'attività che presentiamo è programmata anche per aiutarli a superare queste difficoltà.

Infine, poiché l'obiettivo di fondo è il potenziamento delle competenze linguistiche *in generale*, ricordiamo che uno degli aspetti più significativi dell'attività con la Logica nella scuola primaria e secondaria inferiore è rappresentato dalla possibilità di far sì che gli alunni imparino a distinguere all'interno della ricchezza del linguaggio naturale - la molteplicità di significati, la varietà lessicale, l'ambiguità, ecc. - le differenze fra gli aspetti *semantici* e quelli *logico sintattici* di una comunicazione.

Alcune parole sull'articolo. È organizzato in due parti e un'appendice. Nella prima parte presenteremo un'attività (svolta in una seconda media) sotto forma di "diario ragionato", sottolineando passaggi, contenuti particolari, difficoltà e reazioni degli allievi, cambi di strategia, ecc. Nella seconda svilupperemo alcune riflessioni su tre tematiche generali che consideriamo molto importanti anche per un incontro a livello epistemologico fra la matematica e la lingua. Esse rappresentano lo sfondo teorico della nostra attività, e sono dei nodi attorno ai quali è in atto a livello internazionale un dibattito molto ricco e ampio nell'ambito dell'educazione matematica:

a) la matematica come linguaggio

b) il ruolo della discussione in "classi di matematica"[3]

c) la metacognizione

In appendice daremo, come esempio, il testo di un racconto giallo elaborato da un'alunna, che illustrerà il modo in cui si è concluso l'itinerario.

2. AMBIENTIAMO L'ATTIVITÀ

Ci troviamo nella prima metà dell'anno scolastico e stiamo analizzando la capacità di *argomentare* sulla base di brevi racconti gialli inventati da noi, aventi per protagonisti vari ispettori, fra i quali il celebre Clouseau. Gli alunni debbono aiutare l'ispettore a risolvere alcuni fra i suoi casi più delicati collegando fra loro *logicamente* gli indizi presenti nel testo (concatenazione delle informazioni) e dimostrando quindi di saper usare in modo ragionato elementi della logica quali:

- enunciati atomici e loro negazioni
- proposizioni composte (i connettivi che abbiamo incontrato sinora sono E, E/O, O)
- variabili proposizionali
- tavole di verità.

Come si vedrà, il risultato finale che riteniamo di aver raggiunto è stato anche quello di consolidare - in una prospettiva inconsueta - la comprensione del concetto di variabile, che peraltro abbiamo affrontato in numerose occasioni durante le lezioni di matematica sin dalla prima media e che gli alunni hanno già incontrato nella scuola elementare, anche se *mascherato* in varie maniere e non esplicitato in quanto tale. Ad esempio in problemi del tipo:

- *Calcola quanto potresti spendere per comperare tre matite uguali a seconda che il prezzo di ognuna di loro vari da 300, 400, 500 lire.*
- *Non sai quanti amici verranno alla tua festa di compleanno. In ogni caso, hai deciso che ad ognuno di loro vuoi offrire un terzo di pizza. Calcola*

[3] Usiamo l'allocuzione "classi di matematica" come traslato dell'originale inglese (*mathematical classroom*) non tanto perché esistano nel nostro ordinamento scolastico, quanto per sottolineare l'importanza della discussione *durante* le ore di matematica.

quante pizze dovresti comperare se pensi che gli amici possano essere in un numero compreso fra sei e undici.

Nonostante questa “distribuzione” dell'argomento nel corso degli anni scolastici, gli insegnanti conoscono la difficoltà di far comprendere *il concetto di variabile* sia in un contesto numerico (lettera che denota un qualsiasi numero) sia in un contesto logico linguistico (lettera che denota una qualsiasi proposizione, per cui si parla di “variabile proposizionale”).

Prima di continuare, però, vorremmo riassumere alcune considerazioni su un aspetto del “problema variabili” che forse risulteranno utili per le loro implicazioni generali in merito sia all'uso delle lettere in campo matematico che all'individuazione e alla valutazione di misconcetti riscontrabili durante attività in ambiente logico o algebrico.

3. UNA COMPRENSIONE AMBIGUA DEL CONCETTO DI VARIABILE

L'aspetto che vogliamo sottolineare è il seguente: senza che l'insegnante ne sia pienamente consapevole si può formare negli alunni una sorta di *comprensione invertita* - al posto di un corretto *“Sostituisco ad una lettera una parola, una frase, un numero”* un erroneo *“Sostituisco una lettera ad una parola, ad una frase, ad un numero”* - e questo equivoco viene forse favorito anche dall'uso di una didattica collocabile nella più generale area della *scoperta guidata* in cui la generalizzazione viene conquistata partendo da alcuni casi particolari attraverso un processo di tipo *induttivo*.

Per chiarire il concetto, ci serviamo di un episodio accaduto nella stessa classe in una precedente occasione [5] nel corso della quale stavamo ragionando attorno ad una serie di piccoli testi dati in sequenza con l'obiettivo di giungere in un modo intuitivo alla “scoperta” di qualche cosa che sarebbe diventato in seguito la tavola di verità del connettivo O esclusivo.

Il testo sottoposto all'attenzione della classe era il seguente:

> Alcuni ragazzi vogliono imparare a suonare uno strumento musicale, e chiedono informazioni al maestro sull'orario delle lezioni.
> Il maestro risponde: «*Venite o di lunedì o di martedì*».
> Ritornando a casa i ragazzi giocano, si fanno gli scherzi, incontrano altri amici, e il ricordo delle parole del maestro diventa sempre più confuso.
> In conclusione, il primo amico decide di andare a lezione tutti e due i giorni, il secondo solo il lunedì, il terzo solo il martedì, il quarto né lunedì né martedì».
> *Chi si attiene alle indicazioni del maestro? Chi sbaglia?*

Man mano che la discussione procedeva, organizzavamo alla lavagna una tabella che alla fine assunse questo aspetto:

AMICI *(x)*	LUNEDI'	MARTEDI'	CONCLUSIONE
il primo	ci va	ci va	sbaglia
il secondo	ci va	non ci va	non sbaglia
il terzo	non ci va	ci va	non sbaglia
il quarto	non ci va	non ci va	sbaglia

Infine passammo alla generalizzazione usando un linguaggio simbolico ormai familiare agli alunni:

L	>--<	M
1	0	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Pensiamo sia in situazioni come questa che possa consolidarsi l'*inversione* di cui parlavamo in precedenza, che fa sì che in una parte degli alunni si costruisca la convinzione che *le lettere stiano al posto di certe frasi invece che rappresentare frasi qualsiasi.* A consolidare l'equivoco, in questo caso, sono concorsi probabilmente due fattori.

In primo luogo, l'introduzione da parte nostra delle lettere “L” e “M”, per indicare nella tavola rispettivamente “*x* va dal maestro Lunedì” e “*x* va dal maestro Martedì”, cosa che può aver favorito la persistenza dell'idea della lettera come *abbreviazione*, come *sigla al posto di*. In altre parole, mentre negli alunni si forma la comprensione corretta della semantica *interna* alla situazione (cioè la comprensione del significato interno della tavola di verità), si deforma la semantica *esterna* (e cioè la comprensione dei riferimenti al contesto, e quindi di una corretta particolarizzazione).

In secondo luogo, l'aver favorito anche in seguito, almeno nelle fasi iniziali dell'attività logica, questa semantica esterna delle lettere (“P” per “Piove”, “O” per “prende l'Ombrello”, “S” per “Studia” e così via) che ci sembrava potesse facilitare il passaggio dal caso concreto alla generalizzazione. Come conseguenza gli studenti hanno finito per vedere le tavole di verità non come uno “strumento di lavoro” logico, ma come una *rappresentazione schematica* di una certa situazione, una specie di *versione stenografica* costruibile anche *a posteriori* per completare - *ad usum magistri* - la soluzione di un problema raggiunta per altre strade, attraverso l'intuizione, o il buon senso.

Di questo equivoco eravamo diventati sì gradualmente consapevoli, ma non avevamo ancora individuato una strategia che ci sembrasse efficace per verificarlo e quindi chiarirlo. É stato con tale *background* che abbiamo iniziato con la classe l'esperienza che stiamo per descrivere la quale, programmata essenzialmente all'interno di un'attività di riflessione linguistica, ci ha ad un certo punto offerto l'occasione di riaffrontare questo malinteso e di dare un contributo al suo superamento.

PRIMA PARTE

4. IL “CASO”

Proponiamo alla classe il seguente racconto:

IL CASO DEL MILIARDARIO ASSASSINATO

UN CELEBRE MILIARDARIO VIENE TROVATO UCCISO A PARIGI. L'ISPETTORE CLOUSEAU, INCARICATO DELLE INDAGINI, DOPO AVER SENTITO VARIE TESTIMONIANZE, RICAVA I SEGUENTI FATTI, CHE SEGNA SUL SUO BLOCCO DEGLI APPUNTI:
(A) SONO CERTO CHE L'ASSASSINO É AMERICANO O É DI BASSA STATURA.
(B) NON CORRISPONDE A VERITÀ L'IPOTESI DEL MIO RIVALE ISPETTORE JUPIEN SECONDO CUI L'ASSASSINO É DONNA O RECITA IN TEATRO.
(C) L'ASSASSINO É ATTORE ED É DI NEW YORK. QUESTO È POCO MA SICURO.

METTITI AL POSTO DELL'ISPETTORE E CERCA DI RISOLVERE IL CASO, DESCRIVENDO LE CARATTERISTICHE DELL'ASSASSINO.

Il testo è un po' più complesso dei precedenti racconti analizzati dalla classe e ci serve per verificare a quali livelli gli studenti siano in grado di usare le loro conoscenze e di utilizzare alcune *regole* (che chiariremo nel corso dell'esposizione).

La prima fase del lavoro consiste nell'individuazione delle parti *logiche* degli appunti, opportunamente "camuffate". Esse sono:

1) i valori di verità (espressi linguisticamente in vari modi) di ciascuna delle proposizioni composte (A), (B), (C);
2) i connettivi presenti in ciascuna proposizione;
3) gli enunciati atomici.

Per ottenere questo risultato, gli alunni debbono di fatto saper *smontare* gli indizi di Clouseau. Vediamo come.

5. SI SMONTANO GLI APPUNTI E SI SCOPRE L'ASSASSINO

Riscriviamo gli indizi:

(1) (A) SONO CERTO CHE L'ASSASSINO É AMERICANO O É DI BASSA STATURA.
(B) NON CORRISPONDE A VERITÀ L'IPOTESI DEL MIO RIVALE ISPETTORE JUPIEN SECONDO CUI L'ASSASSINO É DONNA O RECITA IN TEATRO.
(C) L'ASSASSINO É ATTORE ED É DI NEW YORK. QUESTO È POCO MA SICURO.

Per poter analizzare la "struttura logica " di queste proposizioni gli alunni devono suddividerle in modo opportuno superando due differenti livelli di difficoltà. Devono individuare:

1) la verità / falsità attribuite da Clouseau ad ognuno dei tre indizi *nel suo complesso;*
2) la verità / falsità *delle proposizioni* che compongono gli indizi.

I due differenti livelli di difficoltà implicano due differenti livelli di conoscenza:

1) relativamente alle informazioni espresse *a monte* circa il valore di verità della frase composta
2) relativamente ai dati *effettivi su* cui si deve operare, e cioè il valore di verità di ognuna delle frasi componenti, i cosiddetti "enunciati atomici".

Questa fase è molto importante perché la consapevolezza della necessità di tenere ben distinti i diversi livelli favorisce implicitamente la *metacognizione*. Ma questo è uno dei tre punti sui quali ritorneremo nella seconda parte dell'articolo; ora preferiamo continuare il racconto dell'esperienza.

In definitiva gli alunni devono evidenziare *le parole che, in modo più o meno palese, permettono di capire i valori di verità delle tre proposizioni composte* (l'ispettore Clouseau - ecco una *regola del gioco* - è sempre sincero e quindi le sue affermazioni non vanno messe in dubbio):

(2) (A) SONO CERTO CHE ... (equivale a È VERO CHE)
(B) NON CORRISPONDE A VERITÀ L'IPOTESI DEL MIO RIVALE ISPETTORE JUPIEN SECONDO CUI ... (equivale a NON È VERO CHE)
(C) ... QUESTO È POCO MA SICURO (equivale a È VERO CHE)

Come passo successivo individuano i *connettivi:*

(3) (A) ... O ...
(B) ... O ...
(C) ... E ...

Ecco quindi ciò che rimane delle frasi (1) una volta tolte le parti (2) e (3):

(4) (A) L'ASSASSINO É AMERICANO ... É DI BASSA STATURA.
(B) L'ASSASSINO É DONNA ... RECITA IN TEATRO.
(C) L'ASSASSINO É UN ATTORE ... É DI NEW YORK.

Le (4), ulteriormente "smontate", portano a sei enunciati atomici:

(5) • L'ASSASSINO É AMERICANO
• L'ASSASSINO É DI BASSA STATURA
• L'ASSASSINO É DONNA
• L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO
• L'ASSASSINO É UN ATTORE
• L'ASSASSINO É DI NEW YORK

Gli alunni sanno di poter applicare un'altra *regola del gioco* che consente di eliminare le frasi accettabili come "doppioni", e cioè:

L'ASSASSINO É AMERICANO ≈ L'ASSASSINO É DI NEW YORK
L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO ≈ L'ASSASSINO É UN ATTORE

Rimangono in definitiva quattro enunciati atomici:

(6) • L'ASSASSINO É AMERICANO
• L'ASSASSINO É DI BASSA STATURA
• L'ASSASSINO É DONNA
• L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO[4].

A questo punto, sulla base
• dei valori di verità delle proposizioni composte (2),
• delle tavole di verità dei connettivi "E" e "O esclusivo",
gli alunni analizzano gli indizi (1) e isolano le situazioni possibili.
Da (A), avente valore di verità VERO, ricavano:

(7) (A1) (VERO/FALSO) L'ASSASSINO *É* AMERICANO E *NON É* DI BASSA STATURA
(A2) (FALSO/VERO) L'ASSASSINO *NON É* AMERICANO ED *É* DI BASSA STATURA

Da (B), con valore di verità FALSO:

(8) (B1) (VERO/VERO) L'ASSASSINO *É* DONNA E *RECITA* IN TEATRO
(B2) (FALSO/FALSO) L'ASSASSINO *NON É* DONNA E *NON RECITA* IN TEATRO

Da (C), con valore di verità VERO:

(9) (C) (VERO/VERO) L'ASSASSINO *RECITA* IN TEATRO ED *É* AMERICANO

Gli allievi infine trascrivono ordinatamente queste cinque situazioni (10) e le analizzano costruendo quello che abbiamo battezzato *percorso del ragionamento:* (1) si parte dall' indizio *certo* (C) la cui prima informazione "L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO" permette di selezionare (2) la proposizione (B1) che fornisce la nuova informazione "É

[4] In classe i passaggi dalla fase (1) alla fase (6) sono stati sviluppati con la lavagna luminosa partendo da una serie di trasparenti sovrapposti che venivano tolti uno alla volta man mano che procedeva l'analisi dei testi. Approfittiamo di questo dettaglio per sottolineare ancora una volta la straordinaria efficacia pedagogica e comunicativa della lavagna luminosa, praticamente ignota alla stragrande maggioranza degli insegnanti, o da loro del tutto sottovalutata.

DONNA". Poiché né (B1) né (B2) consentono di passare ad (A1) o ad (A2), si ritorna a (1) la cui seconda informazione "É DONNA" consente di selezionare (3) la proposizione (A1) dalla quale si apprende che "NON É DI BASSA STATURA".

Le fasi 2 e 3 sono interscambiabili perché, se nella proposizione (C) si seleziona la seconda informazione "L'ASSASSINO É AMERICANO", si ottiene un secondo *percorso* parzialmente diverso dal primo ma ad esso equivalente (nel senso che conduce alla medesima soluzione):

(10) (A1) L'ASSASSINO É AMERICANO E NON É DI BASSA STATURA............ (3) (2)
(A2) L'ASSASSINO NON É AMERICANO ED É DI BASSA STATURA

(B1) L'ASSASSINO É DONNA E RECITA IN TEATRO......................... (2) (3)
(B2) L'ASSASSINO NON É DONNA E NON RECITA IN TEATRO

(C) L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO ED É AMERICANO................ (1) (1)

Sulla base di (6) la conclusione può essere formulata in questo modo:

(11) L'ASSASSINO RECITA IN TEATRO, È AMERICANO, È DONNA E NON È DI BASSA STATURA.

In un linguaggio un po' più scorrevole: l'assassina è un'attrice americana non di bassa statura.

6. DI CRIMINE IN CRIMINE

É a questo punto che intuiamo che l'attività, anziché concludersi con la scoperta dell'assassino (com'era nelle nostre intenzioni iniziali, concentrate sull'analisi di un ragionamento) può essere sviluppata in un modo imprevisto e la continuiamo proponendo questi quattro enunciati atomici:

(6') • LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA
• LA BARONESSA GIOIELLONI É SINCERA
• IL LADRO É ENTRATO DALLA FINESTRA
• L'ALLARME NON ERA INSERITO

e chiedendo agli allievi di collegarli fra loro in modo del tutto analogo a quanto abbiamo fatto con i precedenti (6) utilizzando gli stessi valori di verità di (2).

Lo *shock* iniziale è forte. La classe è disorientata: manca un contesto, il giallo da cui siamo partiti e queste nuove frasi appaiono estranei fra loro, del tutto *inconfrontabili*. Sono sufficienti però pochi suggerimenti perché la situazione diventi chiara per tutti e le tre ipotesi vengano ricostruite sulla falsariga di (1).

In breve, sulla lavagna luminosa compaiono queste frasi:

(1') (A) SONO CERTO CHE LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA O LA BARONESSA GIOIELLONI É SINCERA.
(B) NON CORRISPONDE A VERITÀ L'IPOTESI DEL MIO RIVALE ISPETTORE JUPIEN SECONDO CUI IL LADRO É ENTRATO DALLA FINESTRA O L'ALLARME NON ERA INSERITO.
(C) L'ALLARME NON ERA INSERITO E LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA. QUESTO È POCO MA SICURO.

Ripercorrendo le fasi precedenti gli allievi ricavano le cinque situazioni possibili e si accorgono che possono ricostruire uno dei *percorsi* di (10):

(10‘) (A1) LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA E LA BARONESSA GIOIELLONI NON É SINCERA (VERO/FALSO) .... (3)
(A2) LA PORTA D'INGRESSO NON ERA CHIUSA E LA BARONESSA GIOIELLONI É SINCERA (FALSO/VERO)

(B1) IL LADRO É ENTRATO DALLA FINESTRA E L'ALLARME NON ERA INSERITO (VERO/VERO) .... (2)
(B2) IL LADRO NON É ENTRATO DALLA FINESTRA E L'ALLARME ERA INSERITO (FALSO/FALSO)

(C1) L'ALLARME NON ERA INSERITO.E LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA (VERO/VERO) .... (1)

La “soluzione” che possono scrivere è:

(11‘) L'ALLARME NON ERA INSERITO E LA PORTA D'INGRESSO ERA CHIUSA, QUINDI IL LADRO É ENTRATO DALLA FINESTRA.
IN CONCLUSIONE: LA BARONESSA GIOIELLONI HA MENTITO.

Andando a ritroso, si potrebbe ora inventare una storia gialla scrivendo un testo ricco quanto si è capaci sul piano narrativo.

7. LE VARIABILI PROPOSIZIONALI

Appare evidente a questo punto che possiamo pensare a *tanti gruppi di quattro indizi* quanti ne vogliamo - che “stiano bene fra loro” - con i quali costruire altrettanti racconti gialli uno diverso dall'altro.

Proponiamo allora una scrittura simbolica degli enunciati. È un secondo shock, assorbito però con una progressiva compiaciuta sicurezza dalla classe che è ormai “entrata in situazione”:

(6”)
- p
- q
- r
- s

Risulta chiaro alla maggior parte degli alunni che le quattro lettere usate ora non sono *sigle* (non è possibile alcun *aggancio semantico* con degli enunciati, come accadeva invece in precedenza con l'utilizzo di lettere che in qualche modo “ricordavano”, come abbiamo visto, le proposizioni alle quali erano riferite).

Introduciamo poi la riscrittura simbolica dei tre appunti di Clouseau:

(1”) (A) p O q (VERO)
(B) r O s (FALSO)
(C) s E q (VERO)

I percorsi del ragionamento sono facilmente ricostruiti:

(10”) (A1) p e non q...................................... (3) ...... (2)
(A2) non p e q

(B1) r e s................................ (2) oppure ...... (3)
(B2) non r e non s

(C1) s e p................................ (1) ...... (1)

e la “soluzione del caso” è quindi:

(11”) s, p, r, non q.

Grazie alla coerenza tra i vari passaggi del ragionamento, e soprattuto grazie alla loro “evidenza”, ci rendiamo conto che gli alunni stanno lavorando con delle lettere che ormai si sono distaccate completamente da un qualsiasi contesto semantico. Il nuovo ambiente non richiede - e d'altro canto non potrebbe farlo in alcun modo - alcuna plausibilità. Di fatto, gli alunni stanno *manipolando simboli* con un'accettabile consapevolezza del fatto che essi racchiudono *una pluralità di enunciati.* di farlo. Ci sembra di aver così evitato il rischio cognitivo di cui parla David Pimm [8, p.19], che viene a generarsi quando l'attenzione del ragazzo viene rivolta maggiormente sui *simboli in sé* piuttosto che sul *significato* di cui essi sono portatori.

Tale rischio cognitivo dovrebbe essere familiare agli insegnanti di matematica - soprattutto, ma non solo - della secondaria inferiore, quando si accostano all'algebra e si trovano a dover gestire gli aspetti *semantici* e quelli *sintattici* insiti in una procedura. La strada da noi seguita dovrebbe aver aperto agli alunni uno spiraglio di maggiore chiarezza nella comprensione di questi due aspetti.

8. LA STORIA GIALLA INFINITA

Ritornando al diario della nostra attività, ci rendiamo conto assieme ai ragazzi di essere di fronte ad una pianura praticamente senza limiti: i percorsi del ragionamento appaiono come contenitori vuoti in attesa di essere riempiti. Chiunque può farlo! E ad ognuno dei possibili percorsi corrispondono *infiniti* racconti gialli. La fantasia può espandersi in qualsiasi direzione: basta rispettare i percorsi e il gioco è fatto!

Dopo alcuni divertiti e frenetici tentativi la classe si accorge che in realtà la faccenda non è così semplice, perché alcuni percorsi che vengono proposti dagli alunni contengono informazioni contraddittorie, o insufficienti, o mal combinate fra loro, e quindi rendono la soluzione impossibile. Ad esempio quello di Michele, che ora riportiamo, in cui il percorso porta alla conclusione che sono entrambe vere sia “p” che “non p”, e questa contraddizione evidentemente è inaccettabile:

INFORMAZIONI	PERCORSO DEL RAGIONAMENTO	CONCLUSIONE
(A) p E q (VERO) (B) r E/O non q (FALSO) (C) non p E non r (VERO)	(A1) p e q................... (1) (B1) non r e q.............. (2) (C1) non p e non r....... (3)	p, non p, q, non r

Al termine dei confronti, delle verifiche, delle discussioni (ognuno vorrebbe esibire la propria idea) giungiamo ad uno schema di ragionamento corretto su cui la classe dovrà poi lavorare:

INFORMAZIONI	PERCORSO DEL RAGIONAMENTO	CONCLUSIONE
(A) p E/O q (VERO) (B) q E s (FALSO) (C) p E/O r (FALSO)	(A1) p e non q (A2) non p e q..... ..... (2) (B1) q e non s................ (3) (B2) non q e s (B3) non q e non s (C1) non p e non r..... (1)	non p, non r, q, non s

Ogni alunno escogita quattro enunciati e li sostituisce alle variabili proposizionali p, q, r , s rispettando le parti strutturali (i connettivi e i valori di verità) e ottenendo così delle nuove informazioni su un crimine che, pur non avendo alle loro spalle una storia che li motivi, risultano perfettamente comprensibili, come è altrettanto comprensibile che rappresentano delle storie *in nuce*.

Ed è proprio quest'ultimo lo spunto per la conclusione dell'attività: vengono selezionati collettivamente cinque nuovi gruppi di informazioni scritte in linguaggio simbolico fra i quali ogni alunno sceglie, in segreto (con la sola complicità di uno degli insegnanti), il suo, che gli servirà da base logica per un racconto giallo che dovrà scrivere e poi presentare ai compagni. Individuiamo così cinque *classi di racconti* all'interno di ognuna delle quali i testi saranno completamente diversi fra loro nell'impianto narrativo ma equivalenti nella struttura logica, e ogni alunno sarà quindi in due fasi successive prima scrittore e poi investigatore.

Riportiamo *in appendice* - come nelle migliori tradizioni - uno di questi gialli, “Assassinio in piscina”. La soluzione narrativa e il soggiacente percorso del ragionamento sono - è d'uso in questi casi - capovolti e per la loro consultazione si fa affidamento sull' onestà del lettore. **[nota per l'editore: se non è possibile stampare capovolta la soluzione, sostituire alla frase precedente la seguente]** “La soluzione narrativa e il soggiacente percorso del ragionamento sono stampati di seguito, e per la loro consultazione si fa affidamento sull' onestà del lettore”.

SECONDA PARTE

9. LO SFONDO TEORICO DELL'ATTIVITÀ

a) LA MATEMATICA COME LINGUAGGIO

Attività come quella che abbiamo presentato, basate sulla riflessione linguistica e aventi quindi per obiettivo il potenziamento delle competenze linguistiche, assumono (o dovrebbero assumere) un rilievo crescente nella didattica anche in relazione all'insegnamento della matematica.

In linea di principio [2, pag.2], possiamo rilevare che ci sono due "immagini" differenti della matematica: da un lato quella di un prodotto ormai consolidato, strutturato gerarchicamente in modi pressoché definitivi, per così dire sovrastante coloro che imparano a conoscerla. Da un altro lato, quella di un organismo vivente, che si espande e cresce attraverso una riorganizzazione pressoché continua delle sue strutture interne.

Analogamente, il linguaggio è visto nella prima accezione come una "struttura sintattica per denotare oggetti del mondo reale" o, come scrive Eco [3, pag.192], un "meccanismo convenzionato retto da regole, macchina previsionale che dice quali frasi si possono generare e quali no, e quali tra le generabili siano 'buone' o 'corrette', o dotate di senso".

Nel secondo invece è visto "come un mezzo culturale e sociale per costruire nuovi oggetti nel mondo reale e per organizzare e comunicare le proprie esperienze" in cui "ogni regola e convenzione posteriore nasce per ridurre e disciplinare la ricchezza metaforica che definisce l'uomo come animale simbolico" [3, pag. 192].

Se intendiamo la matematica dai due secondi punti di vista (come *organismo vivente e mezzo culturale e sociale per costruire nuovi oggetti nel mondo reale),* allora possiamo concludere che "analogamente al processo di acquisizione del linguaggio, l'introduzione nel mondo della conoscenza matematica diventa un'introduzione o un'iniziazione ad una nuova cultura" e per essere in grado di distribuire questa cultura socialmente "bisogna muoversi in un'ottica sociale e culturale mentre si costruisce uno specifico, autonomo linguaggio come un mezzo per attivare la partecipazione a questa cultura" [2].

Di frequente, di fronte a studenti realmente (o considerati tali) immaturi, impreparati, poco motivati, il livello del linguaggio degli insegnanti di matematica tende ad impoverirsi, e ad articolarsi in frammenti di routine, stereotipati, rigidi, ipersemplificati. La conseguenza di tutto questo è che siffatti livelli di comunicazione producono studenti altrettanto poveri nel linguaggio matematico, e privi di quei mezzi che potrebbero qualificare la loro "comunicazione matematica". Spesso tale situazione è aggravata da una concezione rigida dell'educazione matematica, collegabile a definizioni del primo tipo *(come prodotto ormai consolidato, meccanismo convenzionato retto da regole),* e allora l'uso del linguaggio matematico in classe appare agli studenti come un codice molto ristretto a causa di termini rigidamente pre-definiti e di oscure convenzioni e l'unico significato che questo linguaggio finisce per assumere per gli studenti è quello definito dalle comunicazioni ritualizzate con l'insegnante e dai modelli che da lui vengono proposti in modi schematizzati.

È indubbiamente una situazione complessa da gestire, ma riteniamo che sia uno dei nodi fondamentali dell'educazione matematica attorno ai quali bisognerebbe riflettere con crescente attenzione. E dovrebbe essere difficile disconoscere le potenzialità del tempo prolungato - e quindi delle compresenze fra insegnanti diversi - anche (o soprattutto) dal punto di vista della riflessione epistemologica sugli statuti delle rispettive discipline.

B) LA DISCUSSIONE IN "CLASSI DI MATEMATICA"

La discussione in classe è una prassi del tutto normale durante le ore di italiano, storia, geografia, per commentare situazioni legate all'attualità, ai problemi o ai gusti degli adolescenti, oppure brani letterari, film, e così via. La discussione in questi casi ha lo scopo di favorire la verbalizzazione negli alunni, il rispetto di determinate regole nella comunicazione, le capacità critiche, quelle espressive, eccetera.

Il nodo della questione è che normalmente si ritiene che il *delegato* per questo ampio settore educativo sia soprattutto (o soltanto) l'insegnante di lettere (gli altri hanno troppo poco tempo, oppure argomenti troppo *tecnici* che non si prestano alle discussioni, e via discorrendo). E comunque, in genere, le discussioni che si fanno al di fuori delle ore di lettere sono discussioni in regime - anche bonariamente - "totalitario", nelle quali l'insegnante detiene saldamente il controllo della situazione (gli alunni, più o meno consapevolmente, stanno al gioco) e favorisce tutt'al più, spesso in modo piuttosto frettoloso, la *scoperta guidata* di un certo risultato.

La pratica della discussione in "classi di matematica" è, come fatto generalizzato, una strategia relativamente recente. Presenta, fra gli altri, un carattere molto marcato che rende generalmente gli insegnanti sospettosi sulla sua funzionalità: è *difficilmente controllabile nella durata*. In altre parole, impone tempi lunghi è c'è sempre, in agguato tra le fronde, il programma che resta indietro.

Di fatto non esiste *la* discussione, ma possono essere attuati differenti *modelli* di discussione [1]: ad esempio, far lavorare la classe attorno alla soluzione collettiva di un giallo di Clouseau o di un qualsiasi altro problema (in questo caso è in atto una *problem-solving discussion);* oppure, attorno al confronto fra le strategie che sono state elaborate dai singoli o dai gruppi per risolvere quel determinato problema (si parla allora di una *balance discussion).* É ancora diverso discutere attorno a temi generali (e provocatori) del tipo "Cosa sono i numeri?" o "Cos'è la geometria" o, come ha fatto un ispettore (questa volta *ministeriale,* davanti alla classe attonita che vedeva in lui un redivivo Clouseau) "A cosa serve la logica?" (si sta svolgendo in questi casi una *conceptualization discussion*[5]). Di volta in volta si mettono in gioco valori diversi: la capacità di collaborare, di argomentare, di misurarsi con ostacoli epistemologici. E di conseguenza dovrebbero cambiare i tempi di collocazione nell'attività didattica (all'inizio di una sequenza, in momenti intermedi, alla fine), le modalità di gestione, le osservazioni sul comportamento degli alunni.

Per quel che concerne la nostra esperienza - in "classi di matematica" o in attività di compresenza matematica/lettere - l'utilizzo della discussione rappresenta a lungo termine un volano potente per competenze sia matematiche che linguistiche. Questo non significa né che sia di facile attuazione né che rappresenti una garanzia di risultati immediatamente verificabili. É lo stile generale dell'insegnamento che ne viene influenzata, nel senso che il sapere in gioco è più *dinamico*, e gli alunni sono per molti aspetti coinvolti nella sua costruzione.

c) LA METACOGNIZIONE

Sapere non significa necessariamente *capire*. Autorevoli testimonianze lo sottolineano [ad es. 9]. In altre parole: la padronanza delle tecniche formali è una cosa molto diversa dall'uso consapevole che se ne può fare al momento opportuno per risolvere *problemi* (la prima è utile essenzialmente per svolgere *esercizi)*. Spesso

---

[5] Abbiamo mantenuto l'uso dei termini inglesi perché è soprattutto nel mondo anglosassone che tali attività sono oggetto di studio e di ricerche [1] e il loro significato è comunque ben comprensibile.

l'insegnamento della matematica punta prevalentemente all'*addestramento*, aspetto che in certi casi può essere necessario, ma che non può rappresentare - come spesso accade, con motivazioni anche simili, praticamente in tutto il mondo - l'obiettivo principale di un'attività didattica.

Un punto nodale, difficile, oltre che da raggiungere, anche da capire da parte dell'insegnante, consiste nella costruzione nella coscienza degli alunni della *capacità di riflettere sulle loro conoscenze*. Non stiamo parlando di un atteggiamento astratto, al contrario, di una consapevolezza costantemente traducibile in termini operativi, in azioni concrete, intenzionali, finalizzate: di fronte alle situazioni problemiche, il saper richiamare le conoscenze opportune e l'abbandonarle, se si rivelano improduttive, sostituendole con altre; il saper valutare la qualità di un'argomentazione proposta da altri e confrontarla con la propria traendone, se possibile, un beneficio. Questi sono alcuni degli aspetti della *metacognizione*, quando si affrontano domande del tipo "*Conosco le mie conoscenze*?" (Analogamente si parla di *metamemoria*, ossia della capacità di rispondere a domande come: "Ho una buona memoria?" "Ricordo bene le cose?" "Perché dimentico?").

In precedenti occasioni [5] [6] [7] abbiamo proposto esempi di attività in cui gli aspetti metalinguistici possono favorire la metacognizione. Ne abbiamo sottolineato uno anche in questo articolo, quando abbiamo parlato della necessità per gli alunni di individuare i due diversi livelli ai quali viene espresso il valore di verità di un'espressione composta. In primo luogo a livello *linguistico* : le informazioni contenute nei fatti di Clouseau potrebbero portare, per quello che se ne sa all'inizio, a risultati sia veri che falsi. Secondariamente, a livello *metalinguistico:* a seconda che esse vengano attribuite da Clouseau ad un testimone attendibile o meno si capovolgono completamente i loro valori di verità.

Il principale obiettivo metacognitivo è quindi di cercare di modificare quegli atteggiamenti tipici della maggior parte degli alunni che danno luogo - alla richiesta da parte dell'insegnante "Ma *perché* hai fatto così?" - a risposte del tipo "Non so...mi è venuto", "Perché in questo modo mi viene il risultato giusto" "Ma non è così che bisognava fare?" conducendoli verso la consapevolezza di scelte chiaramente *motivabili*.

Costruire negli studenti una tale autonomia intellettuale non è certamente un compito semplice, anche perché è oggettivamente difficile individuare e utilizzare bene didatticamente le situazioni più significative e più ricche di informazioni, che permettono di cogliere la costruzione di un ragionamento *nel suo farsi*. É molto più frequente, infatti, trovarsi di fronte ad un prodotto finito che però, di fatto, è di difficile - se non impossibile - ricostruzione e quindi molto più povero di informazioni. É probabilmente necessario, a nostro avviso, organizzare come prassi didattica abituale un ambiente favorevole alla metacognizione, e costruire di conseguenza il proprio ruolo (di coordinatore, consulente, mediatore, animatore, eccetera).

APPENDICE: "ASSASSINIO IN PISCINA" (Ileana, seconda media)

Nella tetra villa situata sulla Collina Nera viveva una vecchietta di settantacinque anni: la signora Pazzaglia Adelina. Questa signorina era molto ricca, possedeva la villa in cui abitava e un'azienda vinicola in Francia, a Cognac.

Angelina era paralizzata ad una gamba ed era per questo che si muoveva su di una cigolante sedia a rotelle.

Erano al suo servizio il fidato maggiordomo, con lei da trent'anni, ed il giardiniere pazzo che dormiva fuori, tra le sue rose rosse, per paura che gliele rubassero.

L'unico parente che la signorina Pazzaglia aveva ancora in vita, e al quale affidare l'azienda e la villa, era suo nipote Gino di venticinque anni.

Il medico di famiglia le aveva detto che poteva campare ancora per cinque anni e forse più, ma sarebbe stato opportuno fare un testamento per un'eventuale morte.

Adelina tenne conto del consiglio: una sera riunì accanto a sè il nipote Gino, il maggiordomo e il giardiniere e scrisse: "Lascerò la villa al maggiordomo e al giardiniere e l'azienda al mio unico erede e nipote Gino".

La notte passò calma, ma, il giorno dopo, nel pomeriggio, un'ombra scura spinse la vecchia sull'orlo della piscina: lei urlò a squarciagola chiamando "AIUTO!", si agitò sbracciandosi, ma poi cadde nell'acqua. Quando qualcuno se ne accorse, era ormai troppo tardi: Adelina era già morta, morta per annegamento.

Arrivò la polizia con il tenente Poiana che chiamò a sé i testimoni.

Dopo aver ascoltato attentamente le testimonianze e dopo aver annotato frettolosamente alcune cose, cominciò a riflettere.

"I testimoni sono tre: il giardiniere, il maggiordomo e il nipote Gino. Il primo testimone, ossia il giardiniere, dice che gli assassini possono essere Gino o anche il maggiordomo, ma non dice tutta la verità, perché è matto. Al secondo, cioé al maggiordomo, ho dovuto credere, perché è una persona fidata, in servizio da tanti anni, e perché è sinceramente addolorato: egli diceva che l'assassino è Gino, o il giardiniere, ma non tutti e due. Al terzo, il nipote, non ho potuto credere, perché troppo agitato e con i sudori freddi, come una persona che non dice la verità, diceva che gli assassinio sono il maggiordomo e il giardiniere".

Si levò una leggera nebbiolina, la notte si avvicinava e il tenente Poiana fece la classica domanda: "Chi ha ucciso la signorina Adelina? Forse il nipote, per avere prima l'eredità, o il maggiordomo per la villa, o il giardiniere, per proteggere le sue adorate rose rosse?"

SOLUZIONE

LE IPOTESI

(A) Il colpevole è Gino E/O il maggiordomo	(FALSO)
(B) Il colpevole O è Gino O è il giardiniere	(FALSO)
(C) I colpevoli sono il maggiordomo E il giardiniere	(FALSO)

IL PERCORSO DEL RAGIONAMENTO

A1) I colpevoli non sono né Gino né il maggiordomo......................... 1

B1) Il colpevole è Gino o non è il giardiniere
B2) Il colpevole non è Gino ed è il giardiniere................................... 2

C1) Il colpevole è il maggiordomo e non il giardiniere
C2) Il colpevole non è il maggiordomo ma è il giardiniere.................... 3
C3) I colpevoli non sono né il maggiordomo né il giardiniere

LA CONCLUSIONE
Il colpevole è il giardiniere.

CONCLUSIONE "NARRATIVA"

Dopo alcune ore il tenente Poiana tornò nel salone della villa e radunò tutti e tre i testimoni e presunti assassini e iniziò ad illustrare il suo ragionamento: "Dalla prima testimonianza, falsa, deduco che gli assassini non possono essere né Gino né il maggiordomo. Dalla seconda, deduco che l'assassino non è Gino, ma il giardiniere. La terza testimonianza conferma che l'assassino non è il maggiordomo, ma il giardiniere."

Poiana chiamò due agenti e ordinò di portare il pazzoide in cella d'isolamento. Per una volta ancora, l'astuzia e l'ingegno, uniti ad un pizzico di fortuna, avevano aiutato il tenente a risolvere il centesimo difficile ed intricato caso.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Bartolini Bussi Maria, Social interaction and Mathematical knowledge, in Furinghetti Fulvia (a cura di), *Proc. PME XV,* Assisi (Italia), vol. 1, 1991, 1-17.
[2] Bartolini Bussi Maria, Sierpinska Anna, Steinbring Heinz, *Language and communication in the Mathematics Classroom*, in preparazione.
[3] Eco Umberto, voce *Metafora* in Enciclopedia, vol. 9, Einaudi, Torino, 1980, 191-236.
[4] Malara Nicolina, Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 16, n. 10, 1993, 927-954.
[5] Navarra Giancarlo, Il signor Kappa allo zoo, riflessioni su un'attività didattica sulla comprensione dei valori di verità dei connettivi ‘E’, ‘E/O’, ‘O’, *Scuola e Didattica,* 13, Editrice La Scuola, Brescia, 1992, 83-88.
[6] Navarra Giancarlo, Un mazzo di fiori alquanto pericoloso, itinerari didattici aventi per oggetto le Leggi di de Morgan, *Scuola e didattica,* 9, Editrice La Scuola, Brescia, 1993, 36-40.
[7] Navarra Giancarlo, Itinerari attraverso la Logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative, versione italiana della relazione presentata all'ICME 7, Quèbec (Canada), *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol. 16, n. 8, 1993, 731-756.
[8] Pimm David, *Speaking mathematically, Communication in Mathematics Classrooms,* Routledge & Kegan Paul, London and New York, 1987.
[9] Schoenfeld Alan, Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical Understanding, in Silver Edward A. (a cura di), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives,* LEA, 1985, 361-379.