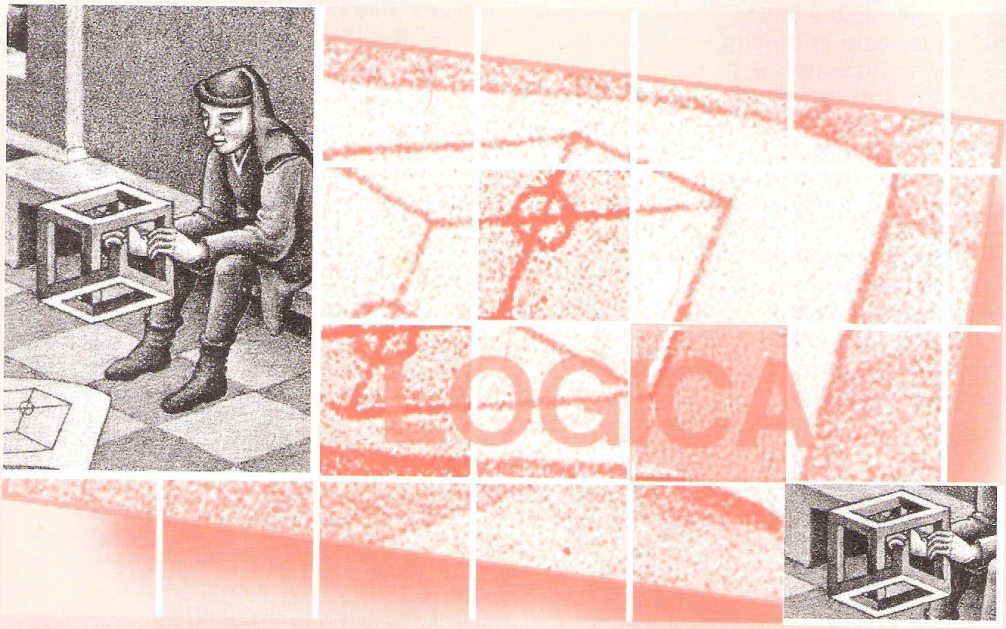
SCUOLA e didattica

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

Tracce per un percorso didattico triennale

Giancarlo Navarra



17

15 maggio 1998, anno XLIII

EDITRICE LA SCUOLA

INSERTO

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

La logica nella scuola media

Tracce per un percorso didattico triennale

Giancarlo Navarra

I materiali didattici che presentiamo fanno parte di un'attività interdisciplinare matematica/lettere iniziata nell'anno scolastico 1985/86 in classi a tempo prolungato. Tale attività, programmata e condotta in compresenza dall'Autore[1] e dall'insegnante di lettere Laura Buzzatti nella scuola media di S. Giustina (Belluno) per due ore alla settimana (sostanzialmente senza soluzione di continuità), si è avvalsa della costante consulenza della prof. Nicolina Malara[2]. L'esperienza è stata illustrata in convegni in ambito nazionale e internazionale e durante corsi di formazione e di aggiornamento per insegnanti della scuola primaria e secondaria ed è stata oggetto di numerosi articoli (v. bibliografia). Parti di essa sono state adattate alla scuola elementare e costituiscono materiale di riflessione e di lavoro sulla continuità nella scuola dell'istruzione obbligatoria.

In copertina: M.C. Escher, Belvedere *(part.), 1958.*

Matematica, lingua, logica. Per la maggior parte delle persone matematica e lingua sono cose del tutto diverse, spesso antagoniste fra loro. È frequente che un insegnante si senta dire da un genitore «Mio figlio è come me. Non ho mai capito niente di matematica. Però in compenso ero bravo in italiano», con la variante speculare «Mio figlio è come me. Nei temi di italiano non sapevo mai cosa scrivere, ma nei calcoli a mente ero un fenomeno».
Matematica e lingua sono vissute come mondi separati.
La matematica, invece, è anche linguaggio e spesso le prime difficoltà nell'affrontare il suo studio sono collocabili proprio in ambiti *linguistici*: nel seguire un ragionamento, nel decodificare il testo di un problema, nell'organizzare una spiegazione, nel descrivere oggetti e situazioni, nel dare definizioni.
La potenza del linguaggio matematico sta nella sua essenzialità priva di sfumature. Quella del linguaggio naurale al contrario nella varietà dei suoi registri espressivi.
L'educazione logica, a livello della scuola dell'obbligo, consiste soprattutto in una mediazione ragionata fra i due linguaggi.
In particolare, per quanto concerne il linguaggio matematico, la logica può favorire la comprensione del suo vocabolario, della sua grammatica, dei problemi di traduzione da/in linguaggi diversi (primo fra tutti quello naturale), della necessaria distinzione fra aspetti semantici e sintattici. La semantica, come interpretazione dei suoi significati; la sintassi, come studio della sua struttura.
La prospettiva interdisciplinare matematica/lettere ha influenzato sin dall'inizio l'impostazione del nostro lavoro, fortemente legata al linguaggio verbale. Di conseguenza, pur toccando anche altri sistemi di rappresentazione e altri linguaggi, l'obiettivo principale è stato soprattutto il *potenziamento delle competenze linguistiche sia orali che scritte.* Abbiamo inteso quindi la Logica come area *trasversale* rispetto a quella linguistica e a quella scientifico-matematica, e soprattutto come *riflessione* sul linguaggio e la comunicazione, sul rapporto fra linguaggio naturale e linguaggi formalizzati, sugli aspetti semantici e sintattici di un testo, e come stimolo allo sviluppo delle capacità di argomentare e di dimostrare. D'altro canto, è proprio in queste direzioni che vanno le indicazioni contenute nei Programmi Ministeriali e quelle date dagli specialisti del settore per la scuola dell'obbligo.

La discussione. Coerentemente con questa impostazione, l'ambiente nel quale viene svolta l'attività è caratterizzato da quello che definiamo un *elevato tasso di discussione.* Sappiamo bene che — al di là di generiche prese di posizione da parte del Consiglio di classe sull'opportunità di affrontare collegialmente i problemi linguistici (un buon controllo delle capacità linguistiche e argomentative è una condizione necessaria per la comprensione in un qualsiasi contesto disciplinare) — anche la pratica della discussione in classe viene di regola delegata all'insegnante di lettere. È affrontata molto meno frequentemente dall'insegnante di scienze perché è ritenuta inadatta, in generale, a trattare questioni inerenti le sue discipline (è difficilmente controllabile nella durata e non

[1] Insegnante di Scienze matematiche, chimiche, fisiche, naturali, membro del GREM (Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica), distaccato negli anni 1994/95, 1996/97 e 1997/98 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena.
[2] Professore associato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena, direttore del GREM.

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

sembra garantire risultati significativi).
Per quel che concerne, invece, la nostra esperienza e quella di altri ricercatori[3], l'utilizzo della discussione in ambito logico-matematico da un lato rappresenta un volano potente per competenze sia matematiche che linguistiche e, dall'altro, influenza positivamente lo stile generale dell'insegnamento nel senso che il sapere in gioco è più *dinamico* e la classe è per molti aspetti coinvolta attivamente nella sua costruzione.
In questo senso l'ambiente logico è particolarmente adatto alla discussione e offre ampi spazi per il *confronto* nel corso del quale gli alunni vengono stimolati sia ad esplicitare le loro argomentazioni che ad intervenire criticamente su quelle addotte dai compagni. In questo modo si favoriscono sia i processi di *organizzazione* dei ragionamenti che le modalità della loro *comunicazione* — scritta e orale — grazie anche alla lavagna luminosa con la quale si pongono a confronto le argomentazioni degli alunni da loro riportate su lucido.

Linguaggio e metalinguaggio. Un aspetto molto importante delle attività concernenti la logica è rappresentato dalla distinzione che bisogna imparare ad operare fra il livello *linguistico* e quello *metalinguistico*, e questo può favorire la *metacognizione* nel senso che lo svolgimento di percorsi che privilegiano la verbalizzazione (spiegare un ragionamento, motivare una risposta, confrontare delle ipotesi, analizzare un testo, organizzare un piano, e così via) conduce gli alunni a riflettere sulla correttezza, la coerenza, la consistenza delle proprie conoscenze.
Nella usuale attività didattica, normalmente, non ci si pone nell'ottica di verificare questi aspetti perché molte delle situazioni che si presentano sono considerate poco significative, e quindi povere di elementi per la discussione. L'insegnante, per mancanza di modelli ai quali riferirsi, instaura un contratto didattico finalizzato alla produzione di "risposte" chiuse e schematiche (soluzioni telegrafiche, risposte non argomentate, calcoli non esplicitati, conclusioni prive di premesse, ecc.) di difficile — se non impossibile — ricostruzione, e quindi *opachi* rispetto ai percorsi mentali dei loro autori.
Le attività che presenteremo possiedono, invece, il carattere della *trasparenza*, in quanto permettono di cogliere negli alunni la costruzione di un ragionamento *nel suo farsi*.

Alcune considerazioni a chiusura di queste note. Terminiamo questa introduzione proponendo alcune considerazioni sulle risposte date da alunni di terza media in un questionario sui numeri relativi. La consegna era: "Scrivi se le seguenti frasi sono vere o false. Riscrivi le false in modo che diventino 'vere' (in tutti e tre i casi che riportiamo gli alunni avevano barrato sia 'V' che 'F')":

• Per ottenere una potenza negativa opero a partire da una base negativa. Alice: *"Questa domanda può essere vera e falsa: 'Vera' perché una potenza negativa si ottiene solamente da base negativa. 'Falsa' (e incompleta) perché una potenza negativa si ottiene da una base negativa ad esponente dispari".*	V	F
• La differenza fra due numeri negativi è sempre negativa. Francesca: *"La differenza può essere positiva e/o negativa.* Ad *es. (−6)−(−5)= −1; (−7)−(−8) = +1".*	V	F
• La somma di due numeri concordi è concorde con essi. Serena: *"Questa frase non è tanto falsa perché...* [il ragionamento continua]".	V	F

Gli esempi dimostrano lo sforzo di questi alunni (che non avevano studiato logica ma erano abituati ad argomentare le loro risposte) di misurarsi in modo non superficiale con i concetti di "vero" e "falso" e le evidenti difficoltà derivanti dal fatto di non poter ricorrere ad altro che alla "logica del buon senso".
Esempi come questi mostrano inoltre come, nella normale attività didattica, siano molto più frequenti di quanto non si pensi le occasioni nelle quali si possono affrontare situazioni significative dal punto di vista logico e di come esse si moltiplichino se gli alunni acquisiscono l'abitudine di parlare — e di scrivere — anche *di* matematica, come parlano *di* storia o *di* sport.
In questo senso la capacità di favorire un incontro degli alunni con la logica che non sia limitato a pochi momenti isolati comporta una modifica nell'abito mentale degli insegnanti, in particolare di quelli dell'area scientifica, affinché si producano cambiamenti realmente significativi nel loro modo di porsi nei confronti della matematica e della sua didattica.

L'impostazione di questo inserto. L'illustrazione delle nostre proposte contiene poche indicazioni sulla loro collocazione nel triennio; questo perché riteniamo che esse abbiano più lo scopo di fornire delle tracce per una riflessione sulle potenzialità didattiche della logica che di precostituire una scaletta da attuare con scansioni rigidamente definite.
Naturalmente l'inserto non tratta della Logica, ma della didattica della Logica; si dà quindi per scontato che il lettore o conosca già gli argomenti — almeno nelle loro linee essenziali — o li affronti e li approfondisca man mano che procede nella lettura utilizzando un testo che faccia da "supporto tecnico" (in bibliografia ne indichiamo tre: [Carruccio 1971, Hodges 1986, Varga 1984]). Riteniamo che sia su queste *condizioni al contorno* che si gioca la leggibilità di quanto scriveremo, che consiste proprio nel sollecitare l'interesse pur con una trattazione necessariamente sintetica, ricca probabilmente più di messaggi impliciti che di informazioni esplicite.

Alcune note. I testi dei "racconti logici" che fanno da perno a molte delle attività che presenteremo nell'inserto sono inventati, salvo pochi e indicati casi, da Buzzatti e Navarra.
Di base, descriveremo con il carattere tipografico normale le unità e il modo in cui esse si sono sviluppate in classe e riporteremo *in corsivo* le parti introduttive dei capitoli, gli appunti, le riflessioni, i commenti, le note a margine che riteniamo possano aiutare il lettore a collocarsi nei confronti del nostro lavoro. I testi degli insegnanti saranno riquadrati con linea doppia, i protocolli degli alunni con linea singola.

[3] M.G. Bartolini Bussi, "La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica", in «*L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*», vol. 12, n. 1, 1989, 5-49.

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

Nelle rappresentazioni insiemistiche opteremo per un diverso uso del colore: il grigio pieno per indicare le parti dotate di elementi e il tratteggio per indicare le parti vuote.

1. Un primo incontro con la Logica: storie di Cavalieri e di Furfanti

Le storie sono impostate su giochi logici del tipo vero/falso. Gli alunni devono risolvere delle situazioni motivando chiaramente le risposte. L'analisi dei loro protocolli consente di individuare diverse tipologie di soluzione e di costruire attorno ad esse delle discussioni collettive. L'obiettivo principale di questa analisi è di valutare quanto la comprensione di un contenuto di logica da parte degli allievi riesca a sovrapporsi a schemi mentali legati alla logica comune inducendo modifiche sufficientemente stabili nel loro modo di pensare.

Incominciamo leggendo la storia, ispirata ad alcuni dei problemi logici di Raymond Smullyan [Smullyan 1981]. I protagonisti sono un naufrago e gli abitanti di un'isola: i "Cavalieri" (che dicono sempre la verità) e i "Furfanti" (che dicono sempre il falso). L'alunno deve mettersi nei panni del naufrago e accompagnarlo nelle sue avventure; avrà degli incontri e — poiché non sa a priori chi sia "Cavaliere" e chi no — dovrà scoprire l'identità dei vari personaggi ponendo loro delle domande e ragionando sulle relative risposte.
Ecco quindi il primo incontro:

> Si avvicina il primo abitante dell'isola. Tu lo guardi con attenzione, ma non capisci chi sia. Allora gli chiedi: «Chi sei tu, un Furfante o un Cavaliere?».
>
> Come ti ha risposto l'abitante dell'isola?

Gli alunni si sforzano di calarsi nella parte ed elaborano le loro risposte, che vengono successivamente poste in discussione e confrontate fra loro.
L'esperienza indica che le risposte variano fra queste due tipologie:

> Rosella: *"Esso mi ha risposto: io sono un cavaliere, ma lui sapeva di non esserlo. Lui ha detto così, perché voleva che i furfanti diventassero più numerosi dei cavalieri, così sapeva o immaginava che i furfanti potessero divenire più forti dei cavalieri".*
>
> Elisa: *"Dice 'Sono un cavaliere'. Penso che dica questa cosa, perché se è un cavaliere dice la verità e si presenta come un cavaliere, se è un furfante dice una bugia e, invece, di presentarsi come un furfante, si presenta come un cavaliere".*

Le risposte appartenenti alla tipologia "Rosella" (inizialmente di gran lunga le più numerose) possono essere assimilate ad una argomentazione nel senso che sono personali, e s'indirizzano a degli individui dei quali si sforzano di guadagnare l'assenso. Quelle della tipologia "Elisa" invece (inizialmente il 10-15% della classe) hanno i caratteri di una dimostrazione, per quanto naïve, in quanto deducono delle conclusioni partendo da premesse date e concatenandole fra loro[4].
Nel corso della discussione quasi tutti gli alunni, ragionando attorno alle due tipologie e alle loro numerose varianti, capiscono che solo le soluzioni "Elisa" sono "logiche" ossia logicamente inattaccabili e convincenti; inoltre, notano che esse sono linguisticamente molto simili perché fanno riferimento ad una stessa struttura. Le soluzioni "Rosella", invece, sono tutte una diversa dall'altra e sono difficilmente confrontabili.
L'attività prosegue (*anche a distanza di tempo*) attraverso una sequenza di incontri del naufrago, di crescente complessità logica (*la qualità delle risposte migliora progressivamente e le soluzioni "Elisa" tendono ad aumentare di numero*). Diamo qui due esempi, lasciando al lettore di trovare e di argomentare la sua soluzione (per maggiori dettagli e approfondimenti rimandiamo a [Navarra 1992, Navarra 1993b]).

> Il naufrago incontra due persone. Una gli dice: «Siamo entrambi Furfanti». Cosa puoi dire di loro?

> Incontra altre due persone. Una dice: «Solo uno di noi è un Furfante». Cosa puoi dire di loro?

2. Riflettiamo sui connettivi e sulle loro parafrasi e affrontiamo intuitivamente le tavole di verità

Questo approccio riguarda le proposizioni composte con i connettivi "e", "o", "e/o". L'obiettivo è quello di favorire una riflessione sui connettivi ponendo ancora una volta a confronto le convinzioni dettate dal senso comune e i valori di verità della logica (spesso conflittuali fra loro). Agli alunni vengono presentati dei testi contenenti una proposizione composta e terminanti con una consegna che essi devono eseguire argomentandola. Le loro considerazioni vengono poi confrontate fra loro e commentate nel corso della discussione. La sequenza si conclude al momento di un soddisfacente raggiungimento dell'obiettivo. Illustreremo ora il diario di un frammento dell'attività sul connettivo "e"; l'obiettivo principale è la conquista del concetto che il valore di verità di una frase composta è "falso", se è "falso" quello anche di una sola delle proposizioni componenti (l'argomento è sviluppato in [Navarra 1992]).
Cominciamo proponendo un testo contenente un'informazione palesemente sbagliata:

> Una bambina chiede alla mamma di fare una torta come quella, buonissima, che una compagna ha portato in classe alcuni giorni prima. La mamma non conosce la ricetta e chiede chiarimenti alla figlia, che risponde: «Mi pare che Fiorella abbia detto che ci vanno tre uova e che bisogna mettere un etto di sale».
>
> Ti pare che l'informazione sia corretta? Cioè: che sia "vera"?

Le risposte hanno tutte, più o meno, questo tono:

> *"Io penso che sia vero e falso, perché la ricetta può essere vera e falsa, perché nelle torte non ci va il sale e quindi penso che sia vera al 50% e falsa al 50%".*

Esse esplicitano la convinzione che verità e falsità possano coesistere (si pensi agli esempi proposti nell'introduzione) e che sia di fatto impossibile una presa di posizione a favore dell'una o dell'altra.

[4] Per un approfondimento su questi temi rimandiamo a C. Perelman, voce Argomentazione in *Enciclopedia*, vol. 1, Einaudi, Torino, 791-823.

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

La discussione non porta alcun chiarimento; proseguiamo allora proponendo un'altra situazione, che questa volta scegliamo più vicina al quotidiano degli alunni:

> Una turista arriva alla periferia di S. Giustina e desidera andare al bar del sig. Quinto. Ferma una passante e glielo chiede. Riceve la seguente risposta: "Il bar è a Sospirolo ed è in via Scuole Nuove».
>
> La turista trova il bar di Quinto?
> *[Nota: Il bar non si trova a Sospirolo; è davvero a S. Giustina, in via Scuole Nuove]*

Anche in questo caso le risposte si assomigliano. Eccone una tipo:

> *"Io penso che sia vero e falso, perché il bar è in via Scuole Nuove ed è il 50% della proposizione vera e l'altro 50% è falso, perché quel bar non è a Sospirolo. Quindi la frase è sia vera che falsa".*

Dopo una nuova discussione proponiamo un paio di altri testi per rimuovere questo forte senso di "indecidibilità". Le risposte poco alla volta cominciano ad evidenziare delle incrinature nelle convinzioni di molti, anche se è ancora evidente la resistenza ad accettare la "prevalenza" del falso sul vero. Così diamo un'ultima consegna, contenente un enunciato volutamente sbagliato, che, per essere eseguita, richiede l'utilizzo di strumenti (squadrette, compasso):

> "Disegna un rombo. Ricordati che il rombo ha i lati uguali e ha gli angoli uguali".

Le richieste di spiegazione e le proteste sono numerose perché la maggior parte degli alunni capisce che c'è un errore nel testo e non sanno come comportarsi. Li invitiamo a concentrarsi sul perché non possono eseguire la consegna e a cercare di spiegarlo. Alla fine, per più di metà classe i nodi vengono al pettine con sufficiente chiarezza; ecco un testo tipo:

> *"Per me la consegna è sbagliata, perché il rombo non ha tutti gli angoli uguali ma a due a due come nel rombo che ho disegnato, anche se i lati sono uguali ed è vero, ma nel complesso penso sia falsa, perché c'è del falso nella frase".*

Concludiamo argomentando sull'attività svolta sinora e consolidando il concetto che una proposizione composta mediante il connettivo "e" è vera solo quando entrambe le componenti sono vere.
Nelle settimane successive affrontiamo con lo stesso metodo altri connettivi ("e/o", "o").
Diamo ora un esempio (relativo al connettivo "o") di come, proponendo dei testi appositamente costruiti e pilotando opportunamente la discussione, si possa pervenire a degli interessanti approcci intuitivi alle tavole di verità.
La classe esamina il seguente racconto:

> Alcuni ragazzi vogliono imparare a suonare uno strumento musicale, e chiedono informazioni al maestro sull'orario delle lezioni. Il maestro risponde: "Venite o di lunedì o di martedì".
> Ritornando a casa giocano, si fanno gli scherzi, incontrano altri amici: insomma ricordano le parole del maestro in modo confuso. In conclusione, il primo amico decide di andare a lezione tutti e due i giorni, il secondo solo il lunedì, il terzo solo il martedì, il quarto né lunedì né martedì.
>
> Chi si attiene all'indicazione del maestro? Chi sbaglia?

Man mano che la discussione procede costruiamo una tabella che illustra le scelte dei quattro ragazzi; alla fine ci troviamo di fronte ad un qualcosa che assomiglia molto ad una tavola di verità (*giungeremo realmente alle tavole di verità in un momento successivo, dopo aver introdotto le variabili proposizionali).*

AMICI	LUNEDÌ	MARTEDÌ	CONCLUSIONE
il primo	ci va	ci va	sbaglia
il secondo	ci va	non ci va	non sbaglia
il terzo	non ci va	ci va	non sbaglia
il quarto	non ci va	non ci va	sbaglia

All'interno di queste attività è utile proporre dei testi che consentano di riflettere sulla varietà delle sfumature del linguaggio naturale e sulla rigorosità del linguaggio logico [Bernardi C. 1990]. Per esempio, testi contenenti parafrasi di connettivi differenti sul piano del significato, equivalenti sul piano logico (nel caso di "e": "anche", "invece", "però", "ma", "mentre", ecc.).
Fra i molti tipi di attività sono interessanti quelle nelle quali gli alunni devono rientrodurre in un testo un connettivo che è stato tolto. Riportiamo la sintesi delle conclusioni alle quali è giunta la discussione relativa al seguente brano:

> Eloisa e Giovanna ammirano la vetrina della pasticceria "Supertorta". «Mmm, dai, entriamo!» dice Eloisa. «Per prima cosa mi mangio una pasta con le fragole e mi bevo un frullato al cioccolato!».
> «Non so come farai con i pochi soldi che abbiamo: di sicuro puoi mangiare la pasta ... bere il frullato!» considera Giovanna frugandosi le tasche.
>
> Inserisci al posto dei puntini il connettivo che secondo te ha usato Giovanna.

Le risposte sono: "ma non" (8 alunni); "o" (6); "e", "e poi", "forse", "oppure", "senza" (1 alunno ciascuna). Nel corso della discussione gli alunni osservano che: "e" ed "e poi" non vanno bene perché contraddicono il contesto; "forse" non va bene perché Giovanna è sicura di quello che dice; "ma non" e "senza" non vanno bene perché creano una gerarchia nelle preferenze di Eloisa (poiché non si conoscono i suoi gusti non è possibile stabilire se essa preferisca la pasta o il frullato).
Concludono che "o" e "oppure" vanno bene perché lasciano nell'indefinitezza la scelta di Eloisa (com'è nella "logica" del testo).
Le argomentazioni scritte sono quasi sempre molto ricche di informazioni perché obbligano gli alunni a prendere posizione su aspetti anche sottili del linguaggio. Proponiamo a questo proposito lo stralcio di un protocollo rivelatore del disagio interpretativo del suo autore di fronte ad un testo contenente un dialogo fra due ragazzi, Cosimo e Berto, incerti se il delfino sia un pesce o un mammifero. Il disagio si manifesta in particolare di fronte a due affermazioni: una di Cosimo, contenente un "però", e una di Berto, contenente un "invece":

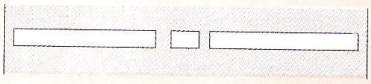
> *"La risposta di Berto è falsa perché la prima affermazione è vera, ma la seconda è falsa e rende falsa la frase. Può essere giusta anche la risposta di Cosimo, ma non posso dirlo, perché non capisco la differenza tra però e invece".*

Quante volte gli insegnanti danno per scontata l'acquisizione del significato di termini comunissimi?

L'abitudine ad attività metalinguistiche come prassi didattica costante può aiutare molto gli allievi in difficoltà ad esprimere i loro dubbi.

3. Impariamo a separare aspetti semantici e sintattici di un testo e ci prepariamo alle tavole di verità

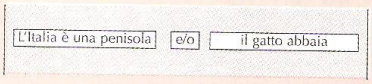
Questa unità ha l'obiettivo di far comprendere che i connettivi binari danno luogo ad una operazione tra proposizioni il cui risultato ha, al di là del significato di ciascuna di esse, un valore di verità dipendente unicamente dai loro valori di verità. In questo modo prepariamo il terreno per affrontare le tavole di verità. Proponiamo in sequenza degli enunciati composti mediante i connettivi "e", "e/o", "o" e invitiamo la classe ad esprimersi sul loro valore di verità complessivo.
Cominciamo appoggiando sulla lavagna luminosa un foglio di carta con una fila di "finestre" opportunamente tagliate:



Poi prepariamo su un trasparente (che taglieremo lungo l'asse verticale) due colonne di enunciati, alcuni aventi valore di verità "vero" e altri "falso"; durante l'attività facciamo scivolare le due metà in modo che gli enunciati appaiano all'interno delle finestre in modo indipendente e casuale. Nella finestrella centrale cambieremo il connettivo.
Per esempio, se negli elenchi abbiamo scritto queste frasi:

... Il pioppo è un albero La vipera non è un rettile L'Italia è una penisola ...	... il gatto abbaia il fiume Po sfocia nell'Adriatico il canguro vive in Africa ...

nelle finestre potrebbe comparire la seguente ("insensata") proposizione composta:



(in questo caso, gli enunciati hanno valore di verità rispettivamente "vero" e "falso", e il valore di verità della proposizione composta è quindi "vero").
Al termine di questa fase organizziamo alla lavagna luminosa una tabella come la seguente e chiediamo agli alunni di argomentare per iscritto attorno al rapporto fra i valori di verità dei singoli enunciati e quelli delle relative proposizioni composte e di riassumere le "regolarità di comportamento" che essi riescono ad osservare.

"Il canguro è un marsupiale e vive in Australia". "Il 4 è numero pari e Wendy è amica di Peter Pan".	VERO/VERO VERO/VERO
"Il Corriere della sera è un quotidiano e il dado ha otto facce". "5+2=7 e il Po è un torrente".	VERO/FALSO VERO/FALSO
"18 : 2=8 e l'inverno termina in marzo". "Il canarino non è un uccello e il rombo è un quadrilatero".	FALSO/VERO FALSO/VERO
"La chitarra è uno strumento a fiato e il femore non è un osso della gamba". "Il volley ha sette giocatori in campo e il sabato segue la domenica".	FALSO/FALSO FALSO/FALSO

Vediamo ad esempio la tabella relativa al connettivo "e" (*v. in alto*).
Il modo più diffuso nel quale gli alunni riassumono le quattro situazioni è quello analitico *(che può essere visto come una "parafrasi" della tavola di verità)*; ad esempio:

> *"Se i due enunciati hanno valore di verità 'vero' il valore di verità globale è 'vero'".*
> *"Se un enunciato ha valore 'vero' e l'altro 'falso' il valore globale è 'falso'".*
> *"Se un enunciato ha valore 'falso' e l'altro 'vero' il valore globale è 'falso'".*
> *"Se i due enunciati hanno valore 'falso', il valore di verità globale è 'falso'".*

Nel corso della discussione è molto interessante far riflettere la classe su queste frasi con l'obiettivo di far emergere anche formulazioni sintetiche del tipo:
- Il valore di verità globale è "vero" soltanto se entrambi gli enunciati sono "veri".
- Il valore di verità globale è "falso" se almeno uno degli enunciati è "falso".
- Il valore di verità globale è "falso" tranne che nel caso in cui entrambi gli enunciati abbiano valore di verità "vero".

In seguito proponiamo esercizi di consolidamento di vari tipi (gli alunni devono motivare in ogni caso le loro risposte):
(a) assegnato un enunciato e un valore di verità, chiedere agli alunni di scrivere un secondo enunciato in modo che la proposizione composta abbia come valore di verità quello dato. Ad es.:

> Parigi è la capitale della Francia o ..... [FALSO]

(b) assegnato un connettivo e attribuito un valore di verità alla proposizione composta, chiedere di scrivere i due enunciati. Ad es.:

> ..... e/o ..... [VERO]

(c) dati una proposizione composta e un valore di verità, motivare per iscritto se esso è corretto o meno come valore di verità della proposizione data. Ad es.:

> La vipera è un rettile e/o il triangolo rettangolo è equilatero [VERO]

4. Analizziamo testi più complessi contenenti dei connettivi

L'obiettivo è il riconoscimento di: connettivi, tavole di verità, equivalenze logiche, negazione, contrario in contesti linguistici più ricchi e complessi di quelli presentati sinora, contenenti al loro interno dei nodi logici che gli alunni debbono affrontare aiutando i protagonisti a sciogliere enigmi, svelare misteri, decifrare consegne, e così via[5]*. Per illustrare l'attività scegliamo tre sto-*

[5] Può succedere che degli alunni, stimolati dalle caratteristiche dell'attività (fare molta attenzione ai significati, cercare indizi, cogliere sfumature, ecc.) interpretino un racconto in modi diversi rispetto a quello immaginato dagli insegnanti. La discussione è in questi casi molto serrata e consente un confronto ricco e approfondito studente-studente e studente-insegnante. L'eventuale decisione di adottare conclusioni diverse da quelle previste — purché, naturalmente, siano dotate di una loro coerenza interna chiaramente argomentabile — diventa un arricchimento dell'attività.

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

rie variamente ambientate (che possono fornire lo spunto per inventarne altre).
La prima fa parte di una serie ispirata ai racconti di "Le mille e una notte" e si intitola "Le avventure di Rashid: storia del cavallo bianco".

> "... c'era poi quella faccenda del cavallo bianco. Il califfo glielo aveva promesso, ma ad una precisa condizione: 'Attento: dovrai portarmi o la perla azzurra o il pesce coi colori dell'iride'. Rashid si sentiva al sicuro: se li era procurati entrambi e glieli aveva già fatti consegnare. Era certo che il califfo avrebbe apprezzato il doppio regalo...".
>
> Rashid riceverà in premio il cavallo bianco?

Gli alunni elaborano le loro soluzioni che vengono poi opportunamente selezionate dagli insegnanti e poste in discussione (*è opportuno confrontare collettivamente quelle più rappresentative, o comunque le più significative*). La soluzione alla quale si perviene è: la frase del califfo contiene un "o esclusivo" e quindi Rashid ha sbagliato perché avrebbe dovuto portare o questo o quello, ma non tutte e due le cose; quindi non avrà il premio.
La seconda storia è intitolata "In attesa del torneo"; per risolvere i quesiti della successiva consegna bisogna tenere presente la tavola di verità del connettivo "o inclusivo".

> Ormai, la sfida era stata lanciata, i sette cavalieri più valorosi di Roccaquercia e i loro sette rivali, comandati dal cavaliere Gradasso da Zumelle, si preparavano per il grande torneo.
> Gradasso era furioso e sbraitava con tutte le sue forze: «Voglio strappare le trippe di quei vili! Aaah! Datemi la spada!!! La lancia!!!». Il suo scudiero cercava di calmarlo: «Mio coraggioso cavaliere, fra tutti, due soli sono stati scelti dalla sorte per misurarsi con voi. Con quale di essi preferireste combattere? Con Arzilletto da Bes o con Capitone degli Anguillotti?».
> «Aargh!!!» urlava Gradasso mentre indossava l'armatura. «Che quei due facciano come preferiscono! Ho sufficiente coraggio per affrontarli insieme, se essi lo desiderano!».
>
> A rigor di logica, quali di questi combattimenti potrebbe sostenere Gradasso?
> 1) Con i cavalieri di Roccaquercia, tranne Arzilletto.
> 2) Tranne Capitone, con gli altri cavalieri di Roccaquercia.
> 3) Solo con Arzilletto.
> 4) Con tutti e sette i cavalieri di Roccaquercia, senza esclusione.
> 5) Con Capitone e Arzilletto.
> 6) Soltanto con Capitone.
> 7) Con tutti i cavalieri di Roccaquercia, tranne Arzilletto e Capitone.

Alcune frasi dell'ultima sparata di Gradasso vogliono far capire che per lui è indifferente duellare solo con Arzilletto, solo con Capitone, o con tutti e due (in pratica, con Arzilletto e/o con Capitone). Sono valide quindi le risposte 3, 5 e 6.
L'ultimo esempio, "L'errore di Mokurai", ha fatto parte di una prova di verifica:

> «Mio signore» si giustificò il capo della guardia, «tu mi hai detto che non dovevo far entrare nella città un uomo guercio con una cicatrice sul viso. Io, per precauzione, non ho fatto entrare nessuno che avesse nel volto i segni di antiche ferite. Come potevo immaginare che fosse tuo cugino Nakakura quell'uomo con gli occhi perfetti ma con una cicatrice sulla guancia sinistra al quale ho impedito l'ingresso?».
> «Hai sbagliato, Mokurai, hai eseguito male i mie ordini. Mio cugino, il prode samurai Nakakura, ha fatto bene ad adirarsi con te, perché avresti dovuto lasciarlo varcare le porte della città».
>
> Ebbene, il povero Mokurai ha ragione o torto?

Ecco come lo ha risolto un alunno di terza media (*correttamente, a parte un disguido relativo alla parentela fra Nakakura e l'imperatore*):

> *"Mokurai ha torto perché il re gli aveva detto 'Non devi fare entrare nella città un uomo guercio con una cicatrice sul viso' che equivale a dire un uomo con una cicatrice e guercio.*
> *Questa consegna è valida solo nel caso che l'uomo sia contemporaneamente guercio e con la cicatrice.*
> *Quindi gli uomini con la cicatrice e non guerci e quelli guerci senza cicatrice erano da fare entrare, come Nakakura, zio dell'imperatore, che è con la cicatrice e non guercio".*

In pratica Mokurai si era comportato come se l'ordine del re contenesse un "o inclusivo".

5. Il Giardino della Regina di Cuori

Riassumiamo un itinerario[6] centrato su un racconto che, attraverso una successione di episodi, costituisce il filo conduttore per una serie di altrettante unità operative ognuna delle quali è orientata all'esplorazione di un particolare contenuto di logica (diagrammi di Venn, diagrammi ad albero, quadrati di Carroll, schede perforate[7]) e alla riflessione sul linguaggio naturale e su quello degli insiemi. Ogni episodio termina con una consegna che gli alunni devono eseguire calandosi nei panni dei personaggi (in questo caso il contesto è rappresentato dal regno di "Alice nel Paese delle Meraviglie" e i protagonisti sono Alice e il Coniglio Bianco).

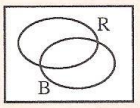
Incominciamo con il Primo Episodio:

> La nostra storia inizia nella Sala del Trono del Palazzo dei Cuori, affollata di un gran numero di persone.
> Ci sono la Regina, il Re e il Fante di Cuori (che porta la corona del re su un cuscino di velluto rosso), altri re e altre regine di minore importanza, i nobili, i principini, i cortigiani tutti abbelliti di diamanti, e infine i giardinieri che, come sapete, sono anch'essi a forma di carte da gioco, con braccia e gambe agli angoli...

La Regina ha deciso di dotare il Palazzo di un Parco e detta le Regole per la sua costruzione:

> 1) Il Parco sarà formato da giardini rettangolari, ognuno dei quali sarà circondato da una siepe di ligustro.
> 2) All'interno di ogni giardino verranno costruite due bordure ad anello che si incrociano: una sarà di pietra e l'altra di mattoni.
> 3) Le bordure delle aiuole non dovranno toccare la siepe di ligustro.

La consegna chiede agli alunni di diventare giardinieri e di disegnare un giardino sulla base delle Regole. Troveranno una forma esprimibile con i diagrammi di Venn.



Secondo Episodio: una volta approvato il disegno del giardino-tipo, la Regina stabilisce che in ognuna delle quattro aiuole in cui esso è diviso potranno essere piantati dei fiori oppure no, e pone ai giardinieri la seguente domanda:

[6] L'attività è stata sperimentata in numerose varianti sia nella scuola media che in quella elementare [Navarra 1991, Navarra 1993, Navarra, Simoncini 1997a e 1997b].
[7] Per le attività con le schede perforate si vedano [Colomb, Glaymann 1968] e [Caldelli, D'Amore 1987, cap. 17].

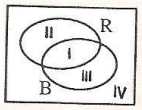
LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

Come appariranno i giardini a seconda che le aiuole abbiano o non abbiano i fiori?

Gli alunni, colorando le aiuole (se ci sono i fiori) e non colorandole (se non ce ne sono), devono individuare il maggior numero possibile di sottoinsiemi differenti fra loro. Ne trovano sedici (v. illustrazione del quinto episodio), e intuitivamente capiscono che non possono essercene di più (*nel quarto episodio faremo loro capire perché non ce ne possono essere altri*).

Terzo Episodio: il capogiardiniere avanza alcune proposte:

1) Diamo dei numeri d'ordine alle quattro aiuole: I, II, III, IV.
2) Usiamo 1 per indicare che un'aiuola ha i fiori e 0 per indicare che non ne ha.



Gli alunni devono applicare questi nuovi codici a quanto hanno fatto sinora (v. ancora illustrazione del quinto episodio).

Quarto Episodio: tutto sembra chiaro, ma il re si fa timidamente avanti e presenta i suoi dubbi:

1) Questi sono tutti i possibili parchi, o ce ne sono altri?
2) Come possiamo rispondere a questa domanda?

Nella costernazione generale il Gran Giardiniere Diagrammini Alberelli suggerisce una via d'uscita (che gli alunni devono scoprire). Attraverso la costruzione di un diagramma ad albero si troverà la conferma che i giardini possibili sono proprio sedici (*il numero delle colorazioni possibili di quattro caselle a due colori è 2^4*) (*fig. 1*).

Quinto Episodio: viene dato l'incarico ai giardinieri di rappresentare ordinatamente i sedici giardini, abbinando ad ognuno il relativo codice (*fig. 2*).

Sesto Episodio: quando il progetto del Parco sembra ormai terminato, interviene il Principe di Cuori:

«Cari sovrani, illustri cortigiani e sapienti giardinieri. È vero che ora sappiamo come saranno fatti i Sedici Giardini del Parco del Palazzo di Cuori, e quali aiuole avranno i fiori e quali no, ma io mi chiedo, e lo chiedo a voi: quali fiori saranno piantati in questi giardini?».

Ognuno si mette a strillare i suoi gusti, ma la Regina mette fine al pandemonio dettando una nuova serie di Regole:

1) Le rose verranno piantate solamente all'interno dell'aiuola con la bordura di pietra.
2) I fiori bianchi verranno piantati solamente all'interno dell'aiuola con la bordura di mattoni.

Gli alunni devono ora descrivere quali tipi di fiori si possono piantare in ognuna delle quattro aiuole (*si può favorire l'uso del linguaggio degli insiemi: invece che "zona I" scrivere "intersezione", e così via*). Diamo l'esempio di quattro descrizioni:

(a) "Nell'intersezione sono piantate rose bianche".
(b) "Nella zona II sono piantate rose non bianche".
(c) "Nella zona III sono piantati fiori bianchi purché non siano rose".
(d) "Nella zona IV sono piantati fiori che non sono né rose né fiori bianchi".

Settimo Episodio: la regina chiede agli Scrivani di Corte di redigere per ogni cartello il relativo Regolamento che dovrà chiarire cosa si può (o non si può) piantare in ogni giardino. Ecco alcuni testi scritti dagli alunni (i giardini relativi sono indicati mediante il codice):

1110: "Si possono piantare rose e/o fiori bianchi".
1011: "Si possono piantare tutti i fiori tranne le rose non bianche".
0101: "Si possono piantare fiori di qualunque tipo ma non quelli bianchi" oppure "Non si possono piantare fiori bianchi".

Questa fase è molto ricca sia a livello linguistico (produzione di testi) che metalinguistico (confronto collettivo dei testi, riconoscimento di quelli sbagliati o ambigui e delle parafrasi equivalenti) e verrà illustrata nei suoi sviluppi anche nel prossimo capitolo.

6. Itinerario logico-linguistico alla scoperta delle Leggi di de Morgan

La sequenza che sintetizziamo è stata attuata in una terza media [Navarra 1993]. Presenta il medesimo contesto di quello del capitolo precedente e si articola in questo modo: 1) si propongono dei cartelli contenenti dei testi che vengono analizzati, discussi, parafrasati e poi rappresentati con diagrammi di Venn; 2) si ricavano conclusioni logico-linguistiche generali. Le due ultime coppie di cartelli sono "ob-

Fig. 1

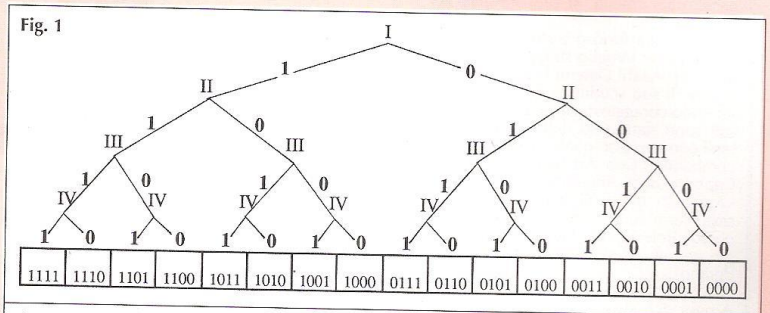
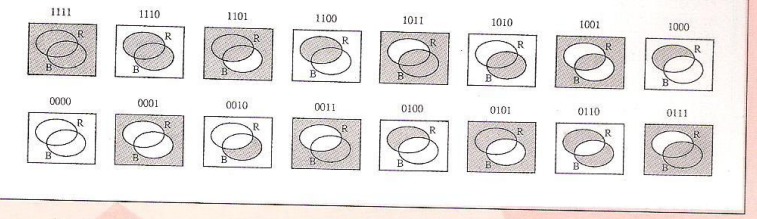


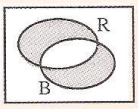
Fig. 2



LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

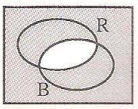
bligate" perché sono funzionali alla comprensione delle Leggi di de Morgan; i primi invece possono essere sostituiti o integrati da altri a scelta degli insegnanti.
La Regina di Cuori decide che i visitatori del parco potranno raccogliere fiori nel giardino contrassegnato con il codice 1111 ma poiché è molto lunatica e prepotente organizza le cose in modo da divertirsi alle loro spalle. Fa quindi predisporre ai giardinieri un cartello per indicare quali tipi di fiori si possono raccogliere, e ordina di cambiare ogni giorno la dicitura al suo interno. I giardinieri dovranno effettuare controlli severissimi e i visitatori che interpreteranno male i cartelli — e quindi raccoglieranno i fiori sbagliati — verranno decapitati. Gli alunni, nei panni di Alice e del Bianconiglio, dovranno colorare gli insiemi che rappresentano le aiuole nelle quali, di volta in volta, si possono raccogliere fiori (*per comodità del lettore poniamo le rappresentazioni con i diagrammi di Venn accanto ai relativi cartelli*).
Riassumiamo l'attività commentandola.
Il primo cartello dice:

> Oggi è permesso raccogliere solo rose non bianche o solo fiori bianchi purché non siano rose.



La discussione fa emergere le parti del testo che provocano le principali difficoltà interpretative: "solo" (comporta l'esclusività della scelta), "non" (nega i predicati "è bianco" ed "è rosa"), "o" (qui nel senso di "aut") e "purché non" (esplicita una condizione limitativa a ciò che è permesso raccogliere). Si deduce che: non possono essere raccolti i fiori che si trovano nell'intersezione fra R e B e nel complemento dell'unione fra R e B.
Proponiamo poi altri cartelli di crescente complessità linguistica, per esempio: fiori "di tutti i tipi", "di tutti i tipi tranne quelli bianchi", "di tutti i tipi tranne quelli bianchi a meno che non siano rose" e così via.
L'importante è che in un certo momento opportunamente scelto dall'insegnante Alice e il Coniglio incontrino due coppie di cartelli cruciali per i nostri scopi.
Il primo della prima coppia stabilisce:

> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono rose bianche.

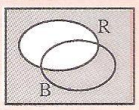


L'analisi porta alla conclusione che si possono raccogliere tutti i fiori tranne quelli che si trovano nell'intersezione (*si fa notare agli alunni che fra "rose" e "bianche" è "nascosto" il connettivo "e"*).
Il secondo cartello della prima coppia dice:

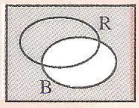
> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono rose oppure che non sono bianchi.

Non si tratta di un cartello semplice (*bisogna chiarire subito che l' "oppure" questa volta ha il valore di un "o inclusivo"*). Una strategia per aiutare gli alunni a capirlo è quella di scomporre il testo nei due enunciati che lo compongono e di rappresentarli separatamente con i rispettivi diagrammi di Venn:

> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono rose.

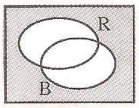


> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono bianchi.



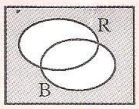
Poi sovrapponiamo i due diagrammi e otteniamo una rappresentazione del secondo cartello identica a quella del primo. In questo modo portiamo la classe dalla comprensione dell'uguaglianza insiemistica a quella dell'equivalenza logica:
"la negazione della congiunzione di due enunciati è equivalente alla disgiunzione delle negazioni dei due enunciati"). Abbiamo così ricostruito la prima delle due Leggi di de Morgan. Passiamo ora alla seconda.
Presentiamo separatamente i due cartelli della seconda coppia e cominciamo ad analizzarli esattamente come abbiamo fatto con i due precedenti. Il terzo cartello è (*per comprenderlo meglio suggeriamo di leggerlo come se "rose oppure bianchi" fosse scritto tra parentesi*):

> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono rose oppure bianchi.



Lo interpretiamo, lo rappresentiamo con gli insiemi e poi passiamo al quarto:

> Oggi è permesso raccogliere solo fiori che non sono rose e non sono bianchi.



È composto dai medesimi enunciati del secondo cartello della prima coppia (quindi possiamo ancora riferirci ai due diagrammi che lo rappresentavano) che ora sono uniti però da un connettivo diverso (e quindi, nel sovrapporli, bisogna interpretarli tenendo conto che si tratta della congiunzione). Troviamo così la conclusione logica "La negazione della disgiunzione di due enunciati è equivalente alla congiunzione delle negazioni dei due enunciati". È la seconda Legge di de Morgan.
È interessante proporre altre situazioni che permettono di generalizzare ciò che abbiamo scoperto. Diamo un esempio in cui si usano delle carte da gioco:
1) la classe viene divisa in gruppi ognuno dei quali ha un mazzo di carte;
2) una metà dei gruppi esegue la consegna A e l'altra metà la consegna B:

consegna A: "Separa dal resto del mazzo le carte che non sono picche e dispari".
consegna B: "Separa dal resto del mazzo le carte che sono non picche oppure non dispari".

3) si confrontano e si fissano le scelte effettuate dai gruppi;
4) una metà dei gruppi esegue la consegna C e l'altra metà la consegna D:

consegna C: "Separa dal resto del mazzo le carte che non sono picche oppure dispari".
consegna D: "Separa dal resto del mazzo le carte che sono non picche e non dispari".

5) confrontando le conclusioni attuali con quelle precedentemente raggiunte, si ritrovano sperimentalmente le Leggi di de Morgan.

7. Un modo di coordinare gli indizi: il "percorso del ragionamento"

Proporremo ora delle situazioni molto differenti sul piano logico da quelle analizzate sinora, che risolveremo con uno strumento che abbiamo battezzato percorso del ragionamento. L'ambiente è quello dei racconti gialli e gli indizi che aiutano a scoprire i colpevoli vengono esplicitati mediante enunciati logici distribuiti e "camuffati" all'interno dei testi. Gli alunni — partecipanti per l'occasione ad una "Scuola per detectives" — aiutano l'ispettore Clouseau a "risolvere il caso" e imparano così a collegare logicamente fra loro gli indizi (esercizi che perseguono il medesimo obiettivo si trovano in [Progetto Nuffield 1971] e [Giovannoni 1987]). Nel corso dell'unità affronteremo da un punto di vista inconsueto le variabili proposizionali attraverso le quali porteremo gli alunni a costruire a loro volta dei racconti gialli [Navarra 1997].

Cominciamo proponendo il racconto: "Morte sotto le piramidi":

Il battello sul quale l'ispettore Clouseau sta trascorrendo le sue vacanze scivola silenzioso sulle acque del Nilo. È notte fonda. All'improvviso un urlo scatena il panico fra i turisti addormentati: «Hanno ucciso l'avvocato Fitzgerald!».
L'ispettore è immediatamente sul posto. Interroga, osserva, prende appunti.

Terminate le indagini si chiude nella sua cabina, si siede al tavolino, apre il suo quaderno e si concentra sulle tre frasi che ha scritto:
(A) Il marinaio che afferma di aver visto fuggire una donna dai lineamenti asiatici è un gran bugiardo.
(B) Il primo testimone è incerto, dice che l'omicida forse è un collega di Fitzgerald o potrebbe anche essere un francese; io però sono sicuro che si sbaglia.
(C) Sono assolutamente convinto che il criminale o è di origine orientale o è un avvocato.

Ora sei tu l'ispettore. Risolvi il caso e descrivi le caratteristiche dell'assassino.

Gli alunni analizzano gli appunti di Clouseau e cercano di individuare le loro parti logiche, opportunamente camuffate:
(1) i valori di verità (*qui sono sottolineati per facilitare il lettore*);
(2) i connettivi parafrasati in ciascuna proposizione (A: "e"; B: "e/o", C: "o");
(3) i sei enunciati atomici (due per ogni fatto appuntato da Clouseau).
Fatto questo, trovano che due enunciati possono essere convenzionalmente accettati come "doppioni" di altri due e quindi eliminati:
l'assassino è un collega di lavoro di Fitzgerald ≈ l'assassino è un avvocato;
l'assassino ha i lineamenti asiatici ≈ l'assassino è di origine orientale.
Rimangono pertanto quattro enunciati: "l'assassino è una donna", "l'assassino è di origine orientale", "l'assassino è un avvocato", "l'assassino è un francese".
Ora procediamo in questo modo:
(a) per ognuna delle proposizioni composte che costituiscono gli appunti di Clouseau selezioniamo i casi possibili dalla relativa tavola di verità sulla base del valore di verità globale della proposizione;
(b) incolonniamo i casi possibili;
(c) rappresentiamo con numeri e frecce il percorso del ragionamento che, partendo dal dato certo (B), visualizza i collegamenti che permettono di costruire la soluzione del giallo (*fig. 3*).
La conclusione è quindi:
"L'assassino è maschio, di origine orientale, non è avvocato, non è francese".
A questo punto dell'attività possiamo affrontare un passaggio verso la generalizzazione, conducendo con gradualità gli alunni a "scoprire" le variabili proposizionali e a servirsene successivamente in un modo interessante e divertente. Proponiamo quindi una sequenza di passaggi che, dopo aver creato un iniziale disorientamento nella classe, convincono proprio per la chiarezza con cui, concatenandosi fra loro, conducono coerentemente ad una certa conclusione.
Iniziamo sostituendo i quattro enunciati con i quali abbiamo costruito il precedente percorso con altri quattro "che suggeriscono un'idea di giallo" anche se non è specificato alcun contesto che dia loro un senso "reale":
"L'assassino è una donna" con "La pistola non ha sparato"
"L'assassino è di origine orientale" con "Il cane è stato drogato"
"L'assassino è un avvocato" con "La finestra non è stata forzata"
"L'assassino è un francese" con "Il nipote ha un alibi".
Sostituendo questi quattro nuovi enunciati ai precedenti si ottiene un nuovo percorso strutturalmente identico al precedente (*fig. 4*).

Fig. 3

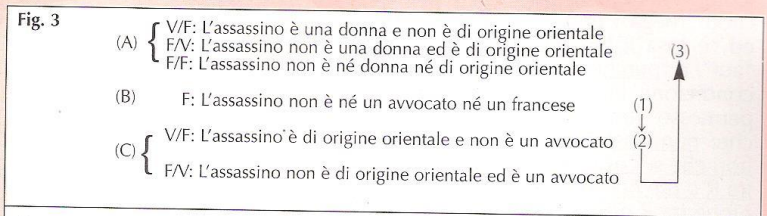
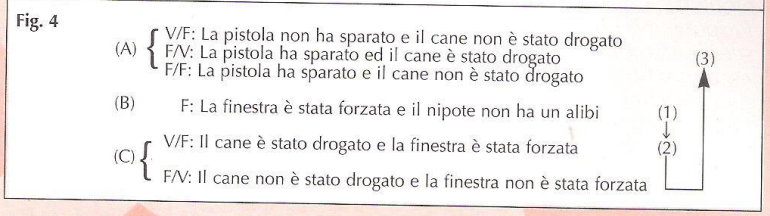


Fig. 4



LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

ENUNCIATI ATOMICI	PERCORSO DEL RAGIONAMENTO	CONCLUSIONE
p, q, r, s INDIZI (A) p e q (FALSO) (B) r e/o s (FALSO) (C) q o r (VERO)	(A) V/F: p e non q F/V: non p e q .....(3) F/F: non p e non q (B) V: non r e non s (1) (C) V/F: q e non r.....(2) F/V: non q e r	non p, q, non r, non s

Fig. 5

ENUNCIATI ATOMICI	PERCORSO DEL RAGIONAMENTO	CONCLUSIONE
p, q, r INDIZI (A) p e q (VERO) (B) r e/o non q (FALSO) (C) non p e non r (VERO)	(A) p e q..... (1) (B) non r e q..... (2) (C) non p e non r..... (3)	p, q, non r, non p

Fig. 6

La "soluzione" che si trova a questo giallo (per il momento virtuale) è: "La finestra è stata forzata e il nipote non ha un alibi; il cane è stato drogato e la pistola ha effettivamente sparato".
Appare evidente a questo punto che possiamo pensare a infiniti gruppi di quattro indizi (*che "stanno bene fra loro"*) con i quali costruire altrettanti percorsi e quindi altrettanti potenziali racconti gialli uno diverso dall'altro. Gli enunciati dei due casi di Fitzgerald e del nipote sono particolarizzazioni di uno schema generale per il quale proponiamo agli alunni la seguente scrittura simbolica (introducendo finalmente le variabili proposizionali) (*fig. 5*).
Come passo conclusivo gli alunni
(a) inventano delle sequenze di "indizi" scrivendole in linguaggio simbolico;
(b) le "collaudano" (*v. in seguito*);
(c) si inventano degli indizi "veri" diversi da alunno ad alunno (*che particolarizzano le variabili proposizionali*);
(d) scrivono i racconti all'interno dei quali ambientano gli indizi;
(e) si scambiano i gialli (anche con altre classi) e cercano di risolverli.
Abbiamo parlato di "collaudare le sequenze" perché è possibile che esse contengano informazioni contraddittorie, insufficienti, o mal combinate fra loro che rendono la soluzione impossibile. Ecco un percorso proposto da alcuni alunni che porta alla contraddizione che sono entrambe vere sia "p" che "non p". Risulta particolarmente interessante perché consente di distinguere tra correttezza del ragionamento e verità delle conclusioni (fig. 6).

8. L'implicazione semplice

L'implicazione semplice costituisce un argomento molto delicato, ed è opportuno affrontarlo da più punti di vista differenti, tenendo anche conto dei risultati di numerose ricerche che sottolineano come l'apprendimento dell'implicazione sia fortemente condizionato dal contesto nel quale essa è collocata. Presentiamo quattro strategie, integrabili fra loro: iconica, con utilizzo di materiale strutturato, ludica, testuale.
È comunque importante, indipendentemente dall'approccio scelto, svolgere delle attività preliminari che consentano di riflettere sull'implicazione sia dal punto di vista linguistico che da quello logico. Ne indichiamo alcune:
- *individuare e analizzare modi diversi per esprimere una implicazione nella lingua italiana ("Se si studia allora si è promossi", "Si ha la promozione nel caso in cui si studia", "Studiando si è promossi", "Basta studiare per essere promossi", "Per essere promossi è sufficiente studiare", "Quando si studia si è promossi", ecc.);*
- *esprimere nella forma "se... allora" proposizioni come "Quando Alice si mette a parlare non smette più", "Aiutato opportunamente riuscirà a superare l'ostacolo", "Vengo a mangiare con te a patto che paghi io", "Possiamo sentirci purché mi telefoni prima di mezzogiorno", "La somma di due numeri naturali dispari è pari", "Un triangolo con due angoli uguali è isoscele", ecc.;*
- *capire che non sempre il "se" indica un'implicazione ("Guarda in libreria se è arrivato qualche nuovo libro", "Non lo sapremo se non lunedì");*
- *far rilevare come spesso il "se" si usi nella lingua italiana al posto di "solamente se" ("Se sarai promosso ti compreremo il motorino").*

Concludiamo questa premessa ricordando che il lavoro sull'implicazione è molto importante anche perché questo connettivo interviene in modo determinante nella deduzione.

a. Una strategia iconica. *Un itinerario organizzato attorno a delle vignette mira a condurre gli allievi a stabilire il valore di verità di una implicazione in funzione di quello delle proposizioni componenti e a comprendere la differenza fra un'implicazione e la sua inversa.*
Scegliamo delle implicazioni e prepariamo per ognuna di esse quattro disegni che visualizzino i casi possibili in relazione ai diversi valori di verità della protasi e dell'apodosi. Organizziamo poi delle schede di lavoro da proporre alla classe in tempi successivi; ogni scheda pone delle questioni in riferimento ai quattro disegni [per approfondimenti si veda Malara 1989]. Ad esempio *v. fig. 7.*
Dopo aver fatto analizzare alcune schede contenenti dei disegni predisposti da noi, chiediamo agli allievi di disegnare quattro vignette da proporre ai compagni che dovranno interpretarle e individuare protasi, apodosi, implicazione, valori di verità.
Le interpretazioni portano talvolta ad implicazioni diverse da quelle previste dagli autori, che possono fornire numerosi e inaspettati spunti per la discussione (*è accaduto ad esempio che una interpretazione lontana sia dal senso comune che dalle intenzioni dell'autore come "Se c'è il sole esce un coniglio con le macchie nere" ci abbia offerto lo spunto per chiarire che si può trovare il valore di verità di una implicazione indipendentemente dalla*

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

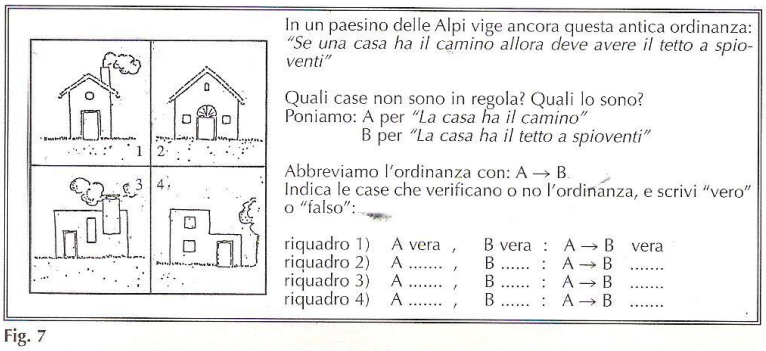
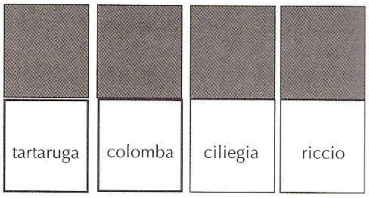


Fig. 7



"Se in una tessera nella parte contornata di blu è disegnato un rettile, allora in quella contornata di rosso è disegnata una ciliegia".

Fig. 8

presenza di un nesso causale fra protasi e apodosi).
Con l'aiuto delle vignette si può anche confrontare l'implicazione (A→B) con la sua inversa (B→A) per capire che esse non si equivalgono, come invece accade spesso di pensare nella realtà. Altrettanto importante è capire l'equiveridicità (ossia l'uguaglianza del valore di verità) fra l'implicazione (A→B) e l'alternativa (¬ A ∨ B) e ancor più fra l'implicazione e la sua contronominale (¬ B → ¬ A) (*avremo l'occasione di ritornare su entrambi questi aspetti nel paragrafo* **c.**).

b. Una strategia con utilizzo di materiale non strutturato (*carte da gioco, tessere del domino, ecc.*[8]).
L'unità si sviluppa attraverso le seguenti fasi:
(I) presentiamo una situazione concreta accompagnata da una frase contenente un'implicazione seguita da una consegna;
(II) gli alunni esplicitano collettivamente le loro risposte argomentandole;
(III) si analizzano le risposte confrontandole con l'implicazione di partenza e si costruisce man mano la relativa tavola di verità;
(IV) si fissano le "conquiste";
(V) si propone come verifica almeno un'altra situazione analoga.
(I) *Utilizziamo un gioco del domino in cui ogni tessera è formata da due quadrati, uno contornato di blu e l'altro di rosso (nella figura essi sono indicati rispettivamente con il tratto spesso e il tratto sottile). Presentiamo alla clase quattro tessere mostrandole solamente una metà e nascondendo l'altra. Diamo poi una frase che assumiamo come ipotesi di lavoro (fig. 8).*
Chiediamo quindi ad ogni alunno di riflettere su quale sia il minor numero di tessere (fra le quattro) che secondo lui bisogna "scoprire" per verificare l'ipotesi, ossia per provarla o confutarla.
(II) Si ottiene una varietà molto ampia di risposte accanitamente sostenute (*in media solo il 10% è corretto, e questa percentuale non cambia molto quando il gioco viene proposto a degli adulti*). Le più frequenti sono:
- "scoprire tutte le tessere" *(bisogno della sicurezza assoluta, dovuto all'incapacità di controllare la situazione);*
- "scoprire la prima e la terza" *(sulla base della convinzione (sbagliata) che in un enunciato si possano scambiare impunemente protasi e apodosi, ossia che la proposizione "Se nella parte contornata di rosso è disegnata una ciliegia, allora in quella contornata di blu è disegnato un rettile" sia equivalente a quella data);*
- "scoprire la prima, la terza e la quarta" [*è una variante della precedente con l'aggiunta (in sé corretta) che "Se nella parte contornata di rosso non è disegnata una ciliegia allora in quella contornata di blu non è disegnato un rettile"*];
- "non scoprire la seconda tessera" *(per il seguente ragionamento: dalla frase data deduco che "Se il disegno non rappresenta un rettile non posso sapere cosa c'è nell'altra metà, e quindi non la guardo").*

(III) L'insegnante comincia a ragionare metodicamente su ognuna delle quattro tessere. Man mano che procede riesamina le risposte e i ragionamenti degli alunni e imposta una tabella (*che presentiamo completa per la comodità del lettore ma che in realtà viene organizzata passo dopo passo, un po' alla volta*) (*fig. 9*).
Seguiamo il ragionamento.
Consideriamo la prima tessera. L'animale nella parte blu è una tartaruga quindi, perché l'ipotesi sia verificata, nella parte rossa deve esserci una ciliegia. Non può non esserci. Dovremmo quindi controllare la parte nascosta di questa tessera (*naturalmente non è necessario verificare realmente; il ragionamento deve "convincere" a livello teorico, e anche questo è un passaggio molto importante sul piano didattico*). Possiamo scrivere la prima e la seconda riga della tabella.

La parte visibile della seconda tessera è blu, ma l'animale in essa disegnato non è un rettile, quindi ciò che sta nella parte nascosta mi è indifferente. Sarebbe inutile controllare questa tessera. Possiamo allora costruire la terza e la quarta riga.
La parte visibile della terza tessera

[8] L'attività che presentiamo è un adattamento dell'esperimento pubblicato in P.N. Johnson-Laird, P.C. Wason ed., *Thinking: Readings in cognitive science*, 1977, 143-157.

Fig. 9

nella parte contornata di blu è disegnato un rettile	nella parte contornata di rosso è disegnata una ciliegia	**se... allora**
vero	vero	**vero**
vero	falso	**falso**
falso	vero	**vero**
falso	falso	**vero**

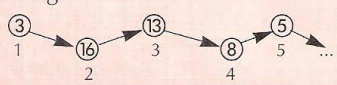
LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA

ha il bordo rosso e vi è rappresentata una ciliegia; anche in questo caso è indifferente ciò che è disegnato nella parte nascosta (infatti, il valore dell'implicazione che compare nella prima e nella terza riga è sempre "vero"). Perciò nemmeno in questo caso trarrei alcun vantaggio dal controllo.
Vediamo la quarta tessera. Il contorno è rosso e il disegno non è una ciliegia: nella parte blu non deve esserci un rettile. Dovremmo quindi verificare la parte nascosta di questa tessera.
In conclusione, il numero minimo di tessere da controllare è due: la prima e la quarta.
(IV) Fissiamo assieme agli alunni — anche in modi linguisticamente diversi — alcune delle considerazioni logicamente più significative svolte sinora. Ad esempio:
(a) "Se l'apodosi è vera, allora l'implicazione è sempre vera".
(b) "Solo se la protasi è vera e l'apodosi è falsa, allora l'implicazione è falsa".
(c) "In tutti i casi nei quali la protasi è falsa l'implicazione è vera".
(d) "Se la protasi è vera, la verità dell'implicazione comporta la verità dell'apodosi".

c. Un gioco aritmetico. Proponiamo una scheda che inizia con un testo che spiega un gioco di tipo aritmetico la cui unica regola è espressa mediante un'implicazione[9], seguito da una serie di esercizi che prevedono una costante argomentazione delle risposte, l'analisi e il confronto delle quali consente successivamente una riflessione articolata sull'implicazione (*l'attività può anche essere gestita dall'insegnante in modo svincolato dalla scheda e svilupparsi realmente sotto forma di gioco in classe*).

> Gli alunni di una classe fanno questo gioco con i numeri: ognuno di loro, uno dopo l'altro, deve dire un numero naturale rispettando questa regola:
> *Se un giocatore dice un numero minore di dieci allora quello successivo deve dire un numero pari.*
> Quando un giocatore sbaglia perde un punto.

Es. 1. Il disegno rappresenta l'inizio del gioco:



Se tu fossi il giudice a quale giocatore toglieresti un punto?
Scrivi *"toglierei"* oppure *"non toglierei"* e perché.
1a. Al secondo giocatore ... un punto perché ...
1b. Al terzo giocatore ... un punto perché ...
1c. Al quarto giocatore ... un punto perché ...
1d. Al quinto giocatore ... un punto perché ...

Es. 2. Continua tu il gioco. Metti una croce sui numeri che potresti dire e spiega la tua scelta.
Direi | 6 | 15 | 9 | 21 | perché ....

Es. 3. In un'altra partita il giocatore prima di te ha detto "17" e tu devi continuare il gioco. Metti una croce sui numeri che potresti dire e spiega la tua scelta.
Direi | 6 | 15 | 9 | 21 | perché ....

Es. 4. Un giocatore dice correttamente "4". Metti una croce sui numeri che potrebbe aver detto il giocatore precedente e spiega la tua scelta.
Il giocatore precedente potrebbe aver detto | 6 | 15 | 9 | 21 | perché ...

Es. 5. Un giocatore dice correttamente "23". Metti una croce sui numeri che potrebbe aver detto il giocatore precedente e spiega la tua scelta.
Il giocatore precedente potrebbe aver detto | 6 | 15 | 9 | 21 | perché ...

d. L'approccio testuale. *Proponiamo un'ultima strategia, richiamando ancora una volta l'opportunità della variazione dei contesti. Gli alunni esaminano dei brani contenenti situazioni problematiche molto diversificate che aprono lo spazio alla riflessione non solo sull'implicazione ma anche su certi luoghi comuni e sulla "logica del buon senso" che li accompagna. Portiamo due esempi: il primo riguarda le esperienze scolastiche di Harry Stottlemeier, un ragazzino di 13-14 anni [Borasi 1986]; il secondo un episodio di classe connesso con la soluzione di un problema di geometria*[10].

• Harry è stato disattento durante la lezione di astronomia. Elaborando in modo sbagliato un'affermazione dell'insegnante ("Tutti i pianeti ruotano attorno al sole") alla sua domanda ("Che cos'è che ha una lunga coda e ruota intorno al sole ogni 77 anni?") ha risposto "Un pianeta" e la classe è scoppiata in una gran risata (*è chiaro l'errore di Harry? Si pensi all'inversa dell'implicazione*). Harry esce da scuola molto abbattuto anche perché la ragazzina del cuore ha assistito alla figuraccia ma riesce, proprio col suo affettuoso aiuto, a capire l'errore di tipo logico che l'ha provocata. Ormai rinfrancato arriva in casa, trova sua madre e un'amica impegnate in una discussione e si mette ad ascoltarle.

> ... La signora Olson stava dicendo: «Lasciate che vi dica una cosa, signora Stottlemeier. Quella signora, la signora Bates, che è appena entrata a far parte del comitato di quartiere, parla solo di aiutare i poveri. Beh, a questo ci credo anch'io, naturalmente, ma poi continuo a pensare anche al fatto di tutti quei radicali che dicono che dovremmo aiutare i poveri, e questo mi fa pensare che la signora Bates sia, beh, voi capite...».
> «Che la signora Bates sia una radicale?» chiese educatamente la mamma di Harry.
> La signora Bates annuì. Improvvisamente, qualcosa nella mente di Harry fece CLICK.
> «Signora Olson» disse, «solo perché, secondo lei, tutti i radicali sono persone che dicono di voler aiutare i poveri, questo non significa che tutte le persone che dicono di voler aiutare i poveri siano dei radicali».
> «Harry!» lo sgridò sua madre «questo non ti riguarda e, inoltre ci stai interrompendo».
> Ma Harry poté capire dall'espressione della madre che ella aveva apprezzato ciò che lui aveva detto. Così prese in silenzio il suo bicchiere di latte e si sedette a berlo, sentendosi più felice di quanto non si fosse mai sentito da molti giorni.

• Il professore sta correggendo le soluzioni ad un problema di geometria che consiste nel determinare l'altezza di un trapezio isoscele conoscendo le basi (9 *cm* e 25 *cm*) e il lato obliquo (17 *cm*). Un alunno viene a lamentarsi con lui perché considera la valutazione della sua prova ingiustamente troppo bassa. Ha risolto il problema inscrivendo un cerchio nel trapezio sostenendo che è possibile fare questo con tutti i quadrilateri nei quali è uguale la somma dei lati opposti (si tratta — dice — di un teorema studiato in precedenza). La sua conclusione è che l'altezza sia uguale al diametro, in virtù di un altro teorema (il

[9] La scheda che presentiamo è un adattamento da E. Siwek, "Logique formelle et raisonnement naturel", *«Educational Studies in Mathematics»*, 5, 1973, 23-37.
[10] Tratto da A.I. Fetisov, *La dimostrazione in geometria*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano 1965.

diametro è medio proporzionale fra le due basi).

> ... La soluzione gli sembrava molto semplice e convincente. L'insegnante però non aveva accettato il suo riferimento al secondo teorema e lo aveva considerato inesatto. Il ragazzo questo non poteva accettarlo, e continuava ad insistere: «Ma non è vero che in un quadrilatero circoscritto ad un cerchio le somme dei lati opposti sono uguali? Bene: in questo trapezio la somma delle due basi è uguale a quella dei lati, il che significa che vi si può inscrivere un cerchio. Cosa c'è di sbagliato?».

Gli alunni devono scoprire l'errore del ragazzo (*la conclusione è che l'insegnante non ha accettato la sua soluzione perché ha capito che è basata sull'inversa dell'implicazione interna al primo teorema. In altre parole, il ragazzo ha commesso lo stesso errore della signora Bates*).

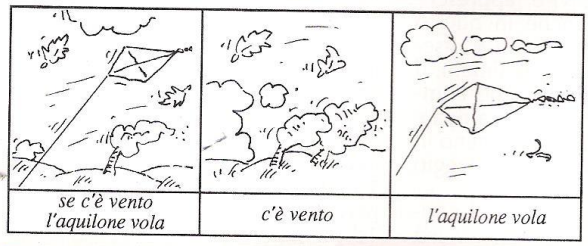
9. Le figure di ragionamento

Affrontiamo la didattica delle figure di ragionamento attraverso contesti diversi: iconico (vignette inventate dagli insegnanti, fumetti, pubblicità) oppure linguistico (racconti avventurosi e/o storici ambientati per esempio nel mondo dei pellegrini e dei mercanti medievali o in quello dei viaggi di esplorazione, episodi tratti dalla narrativa — ad es. "Alice nel Paese delle Meraviglie" —, frasi tratte da libri scolastici di matematica o di scienze, e così via). Gli alunni incontrano il modus ponens, il modus tollens e altre figure la cui validità viene verificata — almeno nelle fasi iniziali dell'attività — con il supporto delle tavole di verità. Una volta acquisita l'esperienza necessaria, gli alunni possono inventare a loro volta delle "storie logiche".

a. Alcuni esempi in contesti iconici

• *Presentiamo alla classe delle situazioni "in tre tempi" costituite da disegni "muti" posti in sequenza logica [Malara 1989]. Gli alunni le interpretano e trovano delle proposizioni che le "descrivano" e che riportano alla base dei disegni. La sequenza viene quindi riscritta mediante il linguaggio naturale e poi trascritta nel linguaggio formalizzato.*

Nell'esempio, vogliamo far capire come la verità di una implicazione e la verità della protasi comportino necessariamente la verità dell'apodosi (questa figura di ragionamento si chiama modus ponens ed è valida[11]) (*fig. 10*).



modus ponens

se
$p \rightarrow q$ (prima premessa)
e
p (seconda premessa)
allora
q conclusione

Fig. 10

Proponiamo poi (*presentando nuove vignette oppure variando alcuni dettagli di vignette già analizzate*) altre figure di ragionamento, sia valide che non valide. Ad esempio:

$p \rightarrow q$
$\neg q$
$\neg p$

Questa figura si chiama modus tollens ed è valida: la verità dell'implicazione e quella della negazione dell'apodosi consentono di affermare la verità della negazione della protasi[12].

$p \rightarrow q$
q
p

La figura non è valida: la verità dell'implicazione e quella dell'apodosi non consentono di dire nulla circa la verità della protasi.

• *È interessante analizzare con gli alunni figure di ragionamento nascoste nella frasi dei giornali, dei fumetti, della pubblicità.* Ecco un esempio tratto dal celebre "Topolino e il pianeta minorenne" (*fig. 11*). Il ragionamento di Eta Beta nella quarta vignetta è nella sostanza il seguente:
premesse "Se non ha il viso, allora non è brutta"; "Non ha il viso";
conclusione "Non è brutta".

p: "ha il viso"
q: "è brutta"

$\neg p \rightarrow \neg q$
$\neg p$
$\neg q$

La figura di ragionamento che essa descrive è riconducibile al modus ponens, anche se la scrittura è formalmente diversa. Le premesse "vere" conducono ad una sola conclusione, che è "vera": il ragionamento di Eta Beta è perfetto!

b. Alcuni esempi in contesti linguistici

• *È ricco di spunti l'abbinamento fra lo studio delle figure di ragionamento e l'analisi di frasi reperibili nei testi di matematica o di scienze o elaborate durante la normale attività di classe.*
Per esempio, supponiamo che si sia approfondito con gli alunni il confronto tra queste due figure di ragionamento

$p \rightarrow q$
p
q

e

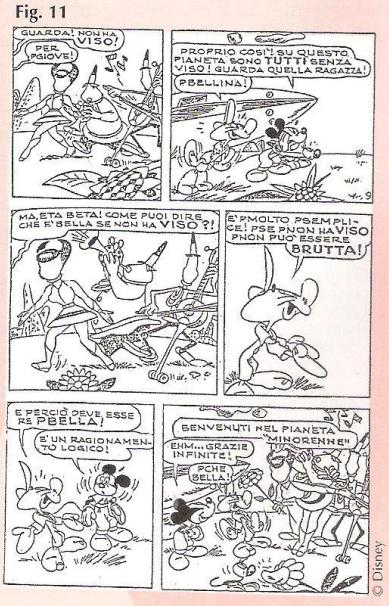
$\neg q \rightarrow \neg p$
p
q

e che si sia concluso che la seconda rappresenta una variante della

[11] Si può rilevare che il *modus ponens* può essere visto come una "metaimplicazione" nel senso che di fatto si compie una riflessione sulla tavola di verità di questo connettivo: la verità dell'implicazione e della protasi comportano la verità dell'apodosi.

[12] È interessante far capire che il *modus tolens* è riconducibile al *modus ponens*, mostrando mediante le tavole di verità l'equiveridicità fra $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$.

Fig. 11



© Disney

prima (e cioè del modus ponens) nella quale la prima premessa è stata sostituita con la sua contronominale (v. nota 12). Su questa base si può far comprendere l'equivalenza fra due ragionamenti che si sviluppino allo stesso modo ma che inizino con premesse apparentemente del tutto diverse fra loro come "Se un triangolo è equilatero allora ha tre assi di simmetria" e "Se un triangolo non ha tre assi di simmetria allora non è equilatero".

• Vediamo infine una figura di ragionamento nascosta in una storia: "Mattia e Gerolamo".

Gerolamo ha lasciato il suo vasto podere, accompagnato dal servo Mattia: sta percorrendo il lungo e pericoloso cammino verso Santiago de Compostela, dove ringrazierà Nostro Signore di averlo salvato da tremende pesti e carestie.
Le strade, si sa, sono terribilmente insicure: Gerolamo non è ancora uscito dalla terra dei Franchi quando, nella foresta, è assalito dai briganti.
Mattia riesce a nascondersi. Gerolamo viene malmenato e derubato di tutto. Il bottino, quel giorno, è stato abbondante; il capo dei briganti, ormai sazio e piuttosto ubriaco, decide di dare una possibilità al povero Gerolamo: una partita a dadi ne deciderà la sorte e il pellegrino, se vincerà, avrà salva la vita.
Mattia, nell'oscurità del suo nascondiglio, ha sentito tutto; si rende conto che l'attenzione dei briganti è concentrata sulla partita: è il momento di fuggire.
Dopo qualche tempo e altre avventure, Mattia è a Santiago. Ogni giorno cerca tra la folla un possibile nuovo padrone da servire. Ed ecco che, un pomeriggio, lo vede in lontananza: è proprio lui, il buon Gerolamo!
«Ma allora è riuscito a vincere la partita!» pensa felice Mattia.
È corretta la conclusione di Mattia?

Chiamiamo p = "Gerolamo vince la partita" e q = "Gerolamo ha salva la vita"; la figura di ragionamento non è valida. Non è detto che a Gerolamo sia andata come pensa Mattia.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q} \\ p \end{array}$$

10. I quantificatori

Gli itinerari che seguono hanno lo scopo di indicare alcune strategie che possono favorire l'approccio ad un aspetto della logica di grande importanza nello studio della matematica, dove incontriamo di continuo frasi del tipo "Tutti i rettangoli sono parallelogrammi", "Il trapezio è un quadrilatero con almeno una coppia di lati opposti paralleli", "Non tutti i numeri primi sono dispari". Essi rappresentano un invito all'approfondimento di un tema (quantificatori esistenziali ed universali e loro negazioni) che apre notevoli prospettive per quanto riguarda sia il potenziamento delle competenze linguistiche in generale sia un affinamento nell'uso del linguaggio simbolico (più interno allo studio della matematica e più marginale rispetto agli obiettivi educativi che si possono stabilire per alunni della scuola media inferiore).

a. Un approccio iconico: *proponiamo alla classe di analizzare delle situazioni ricche di dettagli (disegni, riproduzioni di quadri, diapositive) accompagnate da proposizioni contenenti dei quantificatori per ognuna delle quali bisogna stabilire il valore di verità. Vediamo alcuni esempi.*

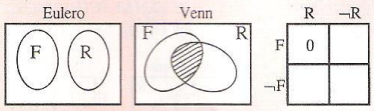
• Il disegno rappresenta la palestra di una scuola durante una partita di pallavolo (*fig. 12*).

• L'immagine rappresenta un disegno di M.C. Escher[13] (*fig. 13*).

b. La rappresentazione dei quantificatori mediante gli insiemi e i quadrati di Carroll: *per maggiore chiarezza nell'esempio che segue terremo separata la rappresentazione di Eulero (che possiamo definire descrittiva, in quanto è dipendente dagli insiemi in esame dei quali riflette la peculiarità) da quella di Venn (che possiamo definire operativa nel senso che, attraverso l'artificio del tratteggio delle parti vuote, essa illustra il risultato finale di un ragionamento)[14] [Johnson D.A., Glenn W.H. 1971]. Inoltre, useremo i quadrati di Carroll[15].*

Proponiamo agli alunni un universo composto dalle audiocassette possedute da una famiglia; chiamiamo F l'insieme di quelle contenenti un film e R l'insieme di quelle registrate direttamente dalla televisione. Presentiamo poi delle frasi contenenti dei quantificatori che descrivono alcune situazioni possibili. Ne prendiamo in esame tre:

1) Nessun film è registrato dalla televisione (*nella rappresentazione di Eulero gli insiemi sono disgiunti, in quello di Venn è tratteggiata l'intersezione vuota*).

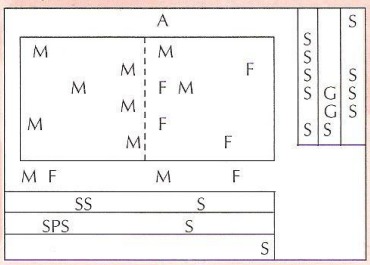


2) Alcuni film sono registrati dalla televisione (*la rappresentazione di sinistra fa capire che in questo caso*

[13] Questa attività è interessante da svolgere con l'insegnante di educazione artistica perché obbliga gli alunni ad analisi molto accurate per stabilire i valori di verità delle affermazioni e questo favorisce una conoscenza non superficiale delle opere proposte.
[14] Accenni a questo aspetto sono presenti in C. Bozzolo Colombo, "Leonardo Eulero: una delle più grandi figure nella storia del pensiero scientifico", *«L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate»*, n. 11-12, 1991, 1053-1088.
[15] Nei quadrati di Carroll '1' indica che in quel determinato settore ci sono degli elementi, '0' che non ve ne sono; se in un settore non compaiono né l'1 né lo 0 significa che non ci sono informazioni che consentano di capire se in esso vi siano o meno degli elementi.

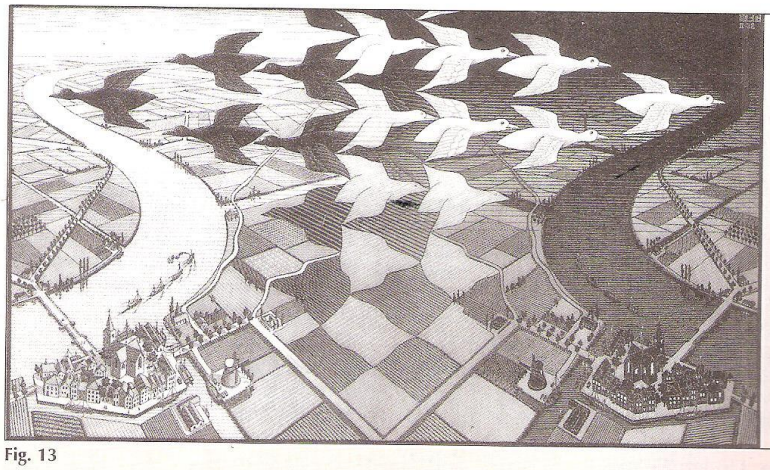
Fig. 12

(*Legenda:* M, F = giocatore maschio, femmina; S = studente spettatore; A = arbitro; P = professore; G = genitore)



1) Tutti i giocatori sono in campo.
2) C'è almeno un giocatore fuori dal campo.
3) C'è al massimo un genitore sulle tribune.
4) Qualche giocatore è nella metà campo di sinistra.
5) Ci sono almeno due professori che assistono all'allenamento.
6) Alcuni studenti sono seduti accanto ai genitori.
7) Non tutti gli alunni della scuola giocano.
8) Non è vero che qualche giocatore è femmina.
9) Solo una squadra è mista.
10) Ogni squadra è composta da maschi e/o femmine.

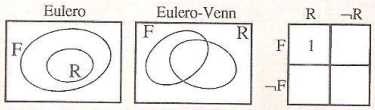
LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA



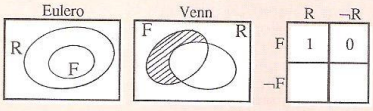
1) Alcune oche sono bianche.
2) Almeno un'oca non vola.
3) Tutti i fiumi hanno un ponte.
4) Come minimo un'oca si trasforma in un campo.
5) Non è vero che sul fiume bianco un camino fuma.
6) Qualche camino di nave fuma.
7) Tutti i mulini sono bianchi o neri.
8) C'è almeno un campanile nero.
9) C'è al massimo una strada alberata.
10) Delle chiese non sono illuminate.

Fig. 13

le cassette registrate dalla televisione contengono solo film).



3) Tutti i film sono registrati dalla televisione (*Venn aiuta a capire che equivale a:*
alcuni film sono registrati dalla televisione e non c'è alcun film che non sia registrato).



È importante sottolineare che l'enunciato "Tutti i film sono registrati dalla televisione" è equivalente a "Se è un film allora è registrato dalla televisione", introducendo così la possibilità di approfondire il rapporto fra l'implicazione e la quantificazione. Per evidenziare l'equivalenza è opportuno rappresentare anche l'implicazione con i diagrammi di Venn.

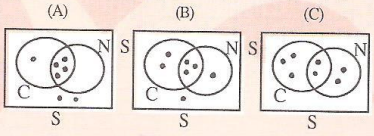
b. L'approccio testuale

Proponiamo alla classe dei testi nei quali compaiono dei quantificatori. Ogni volta gli alunni
(I) descrivono la situazione presentata nel testo con i diagrammi di Venn (il numero delle rappresentazioni dipende da quello delle varianti possibili della situazione);
(II) analizzano, sulla base di una determinata consegna, delle proposizioni contenenti a loro volta dei quantificatori.

Un esempio [elaborazione da Progetto Nuffield 1971]:

> Renato partecipa alle gare sportive della sua scuola assieme ad altri sei compagni della sua classe. Tutti fanno il salto in alto. Cinque corrono i 2000 metri. Quattro partecipano alle gare di nuoto.
> *Quali delle seguenti proposizioni (i) sono sempre vere, (ii) potrebbero essere vere, (iii) non sono mai vere?*
> 1. Renato fa il salto in alto.
> 2. Renato partecipa alle gare di nuoto.
> 3. Tutti i ragazzi che partecipano alle gare di nuoto corrono i 2000 metri.
> 4. Ogni ragazzo partecipa alle gare di nuoto, o corre i 2000 metri, o fa entrambe le cose.
> 5. Nessuno dei ragazzi che partecipa alle gare di nuoto corre i 2000 metri.
> 6. Alcuni dei ragazzi che corrono i 2000 metri partecipano anche alle gare di nuoto.
> 7. Non tutti quelli che fanno salto in alto partecipano alle gare di nuoto.
> 8. Come minimo due ragazzi che partecipano alle gare di nuoto corrono anche i 2000 metri.
> *In relazione alla stessa situazione scrivi, usando tre quantificatori diversi:*
> 9. una frase certamente vera;
> 10. una certamente falsa;
> 11. una che potrebbe essere sia vera che falsa.

Come primo passo gli alunni rappresentano con gli insiemi le situazioni possibili (S = insieme dei ragazzi che fanno il salto in alto, C = insieme di quelli che corrono i 2000 metri, N = insieme di quelli che partecipano alle gare di nuoto). In questo caso ce ne sono tre:



Successivamente analizzano le prime otto proposizioni e concludono che: 1. è sempre vera (tutti fanno il salto in alto); 2. potrebbe esserlo (c'è sempre qualcuno che fa nuoto); 3. potrebbe esserlo, ma solo nella situazione (A); 4. potrebbe esserlo, ma solo in (C); 5. non è mai vera; 6., 7., 8. sono sempre vere.

Diamo alcuni esempi di frasi relative alla seconda consegna: 9 (vera): "Qualche ragazzo che corre i 2000 metri non sa nuotare"; 10 (falsa): "Non c'è nessuno che sappia nuotare e anche correre i 2000 metri"; 11 (potrebbe essere sia vera che falsa): "Certi non sanno né correre i 2000 metri né nuotare".

Giancarlo Navarra

A completamento del percorso didattico triennale sulla logica, illustrato nel presente inserto, si propone l'articolo "I sillogismi" e si forniscono numerosi riferimenti bibliografici (ai quali viene fatto riferimento nell'inserto), utile sia per approfondire i presupposti teorici delle proposte avanzate sia per ricavare ulteriori suggerimenti didattici.

LA LOGICA NELLA SCUOLA MEDIA
I SILLOGISMI

Giancarlo Navarra

Si affronta un argomento non semplice ma proponibile, a conclusione di un itinerario didattico sulla logica, in una classe terza già abituata ad utilizzare i diagrammi di Venn ed i quadrati di Carroll.

Si analizzano e si risolvono dei sillogismi[1] *variamente collocati all'interno di situazioni matematiche, racconti fantastici, gialli, ecc. utilizzando come strumento di lavoro i diagrammi di Venn e i quadrati di Carroll*[2]*. L'argomento è stimolante ma non è dei più semplici; riteniamo che esso possa essere affrontato con alunni di terza media, possibilmente a due condizioni: che venga proposto a conclusione di un itinerario continuativo sulla logica (meglio se triennale) e che i diagrammi di Venn e i quadrati di Carroll siano strumenti abituali — seppur occasionali — per la classe.*

È importante sottolineare che l'ambiente dei sillogismi è molto ricco; in particolare, consente di applicare e di approfondire lo studio combinato di proposizioni quantificate, di esplorare argomenti tipici della matematica come quello della struttura logico-linguistica degli enunciati dei teoremi, di scoprire implicazioni "nascoste" all'interno di certe proposizioni[3]*.*

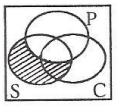
Un primo esempio di sillogismo, formato da un enunciato contenente un quantificatore universale e altri due con dei quantificatori esistenziali.

> Luigi afferma: «Se tutti i multipli di 6 sono numeri pari, e alcuni multipli di 5 sono multipli di 6, possiamo concludere che alcuni multipli di 5 sono numeri pari».

Riscriviamo gli enunciati e li rappresentiamo con i diagrammi di Venn:

Tutti i multipli di 6 sono numeri pari	*premessa maggiore*
Alcuni multipli di 5 sono multipli di 6	*premessa minore*
Alcuni multipli di 5 sono numeri pari	*conclusione*

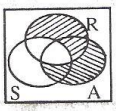
Chiamiamo: P l'insieme dei numeri pari, S quello dei multipli di 6; C quello dei multipli di 5. Il diagramma ci conferma che la conclusione è corretta (la parte tratteggiata è vuota, in tutti gli altri insiemi ci sono degli elementi, quindi anche i multipli pari di 5 (10, 20, ecc. che si trovano nell'intersezione fra P e C).



Un secondo esempio in cui viene presentata una affermazione (formata da tre enunciati universali):

> "Tutte le ragazze sono simpatiche. Tutti i miei amici sono ragazze, quindi tutti i miei amici sono simpatici".[4]
>
> Verifica la correttezza del ragionamento.

Rappresentiamo questi enunciati con R (insieme delle ragazze), S (quello delle persone simpatiche), A (quello degli amici). La conclusione è vera perché i tratteggi ci dicono che non ci sono amici (che poi sono amiche) non simpatici.



Nel terzo esempio il sillogismo è inserito in un racconto "Una questione di Sirene".

> Siamo in Germania, nell'incantevole città di Magonza, più o meno nell'anno milleduecento, nello studio di Syllogismus, celebre uomo di scienza, indagatore delle più disparate discipline.
> Lo troviamo immerso nei suoi studi mentre conversa, come al solito, con se stesso, privo com'è di amici all'altezza del suo ingegno. Sta ponzando intensamente sull'oggetto delle sue attuali ricerche, attorno al quale va componendo un ponderoso trattato: *Sirene, Tritoni E Consimili Creature Presenti Nelle Acque Del Fiume Reno.*
> Syllogismus si trova in una fase di congetture conclusive piuttosto complesse e sta riflettendo ad alta voce.
> «Ho sufficienti documentazioni per poter ritenere che le Donne Sirene (lui le classifica in questo modo) abitanti di codesto fiume son di sicuro esseri riservati quant'altri mai, su questo non v'è dubbio alcuno.

[1] Sono forme di argomentazione tipiche della logica aristotelica e sono costituite da tre proposizioni: due premesse (maggiore e minore) e una conclusione. Come si vedrà dall'esempio, in ogni proposizione compaiono
(a) un soggetto e un predicato;
(b) tre termini; 'A' (termine maggiore), 'B' (termine minore), 'M' (termine medio), ciascuno dei quali figura in due proposizioni secondo questo schema generale:
premessa maggiore: AM (o MA)
Tutti i pesci (A) hanno le branchie (M)
premessa minore: BM (o MB)
Nessun mammifero (B) ha le branchie (M).
conclusione AB (o BA)
Nessun mammifero (B) è pesce (A)
Nell'esempio è riportato un sillogismo della forma chiamata dai logici medievali '*camestres*'.

[2] Non vi è qui lo spazio per parlare dei Quadrati di Carroll così come li usa in modo originale il loro autore sotto forma di gioco per risolvere i sillogismi [Carroll 1969]; noi li abbiamo usati in due terze con risultati molto interessanti.

[3] A volte i sillogismi che si trovano sui pochissimi testi che affrontano la loro didattica possono apparire vagamente surreali; la ragione di questo è che l'obiettivo degli autori è di proporre un'analisi sintattica dei sillogismi indipendente dai loro aspetti semantici. Esempi deliziosi di quanto affermiamo è frequente, ad esempio, in Lewis Carroll, che propone premesse del tipo "Alcune ostriche sono taciturne; nessuna creatura taciturna è divertente".

[4] Generalmente gli insegnanti ritengono che frasi come "Mario è *simpatico*" o "Le ragazze della nostra classe sono *carine*" (o, come si leggerà nel prossimo racconto, "Le donne tedesche sono *riservate*") non possano essere considerate enunciati a causa dell'indefinitezza degli attributi usati. In realtà non è così, perché se la classe concorda all'unanimità sulla simpatia di Mario e sul fascino delle compagne, le due frasi non solo sono enunciati, ma sono enunciati veri. In altre parole, è il *contratto sociale* all'interno della classe che definisce la legittimità di

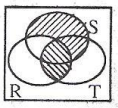
E d'altro canto, posso dichiarare con altrettanta assoluta certezza (quando dice così, c'è da star sicuri, perché l'uomo sa il fatto suo) che nessuna donna tedesca è riservata, lo affermo per diretta esperienza» (la "diretta esperienza" di Syllogismus è legata ad una corte del tutto sfacciata che una certa fantesca molto carina — e per niente riservata — gli ha inutilmente fatto tempo addietro, senza peraltro grandi esiti, scontroso com'è il nostro di carattere).
«Ma, allora: ho ragione se dico che non esistono donne tedesche che son Donne Sirene? Debbo assolutamente trovare la risposta a tale quesito, per poter porre fine in modo degno al mio grande lavoro».

A quale tipo di risposta giunge il nostro Syllogismus al termine delle sue riflessioni?

Le argomentazioni di Syllogismus si possono riscrivere in questo modo:

Tutte le sirene sono riservate	*premessa maggiore*
Nessuna tedesca è riservata	*premessa minore*
Nessuna tedesca è sirena	*conclusione*

Posti S l'insieme delle sirene, R quello degli esseri riservati, T quello dei tedeschi, il diagramma che rappresenta la situazione mostra che non esistono donne tedesche che siano sirene (l'intersezione fra S e T è vuota). Syllogismus ha ragione!



È possibile proporre delle varianti al testo originale e riflettere su come si modifichi la conclusione. Ad esempio, immaginare che Syllogismus scopra, con orrore, di essersi sbagliato e che, differentemente da quanto aveva ritenuto sino a quel momento, solo alcune donne tedesche non siano dei modelli di riservatezza. Avremmo quindi le premesse "Tutte le sirene sono riservate" e "Qualche tedesca non è riservata". Quale sarebbe in questo caso la conclusione?
Lasciamo al lettore la curiosità di trovarla.

Giancarlo Navarra

La logica nella scuola media: riferimenti bibliografici

Abbiamo ritenuto opportuno escludere dalla bibliografia tutte le pubblicazioni di difficile reperibilità per gli insegnanti (quelle non tradotte in italiano o presenti solamente all'interno di circuiti specialistici) anche se esse hanno rappresentato in questi anni dei punti di riferimento molto importanti nel nostro lavoro. Alcuni autori (Bernardi, D'Amore, Marchini, per esempio) hanno scritto molti articoli sull'introduzione della logica nella scuola dell'obbligo; quelli che citiamo sono indicativi di alcuni particolari aspetti fra i molti che essi hanno affrontato e vogliono rappresentare anche un gesto di affettuosa riconoscenza nei loro confronti.

M.L. Altieri Biagi, 1983, *La didattica dell'italiano,* Bruno Mondadori, Milano.
F. Arzarello, 1981, *Matematica e linguistica, idee per un loro sviluppo nelle scuole medie,* Didattica esperienze e proposte, Franco Angeli Editore, Milano.
G.T. Bagni, 1997, *Elementi di storia della Logica formale,* Pitagora Editrice, Bologna.
M. Barra - A. Zanardo (a cura di), 1989, *Atti degli Incontri di Logica Matematica,* Roma, 6-9 aprile 1988 sul tema «La Logica matematica nella didattica», Grafica GSE, Padova.
C. Bernardi, 1990, "Linguaggio naturale e linguaggio logico, parliamo della 'e'", «Epsilon» n. 8.
R. Borasi, 1986, *"Un'originale proposta per l'educazione al pensiero critico: «Harry Stottlemeier's Discovery»",* «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol. 9, n. 4, 85-92.
M.L. Caldelli, 1986, *La matematica del certo,* Cappelli editore, Bologna.
M.L. Caldelli - B. D'Amore, 1986, *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo,* La Nuova Italia, Firenze.
L. Carroll, 1969, *Il gioco della logica,* Astrolabio, Roma.
E. Carruccio, 1971, *Mondi della logica,* Zanichelli, Bologna.
J. Colomb - M. Glaymann, 1968, *Insiemi, Logica e schede perforate,* Edizioni OS, Firenze.
G. Crovetti, 1979, *Educazione logico-matematica 1,* Editrice Scuola Vita, Basiano (MI).
B. D'Amore - P. Plazzi, 1990, "La didattica dei connettivi logici: alcune considerazioni", «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol. 13, n. 6, 369-398.
B. D'Amore - P. Plazzi, 1992, "La didattica della logica dei predicati", «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol. 15, n. 10, 1019-1039.
Z. Dienes, 1979, *Matematica viva: gli insiemi e la loro logica,* OS Organizzazioni Speciali, Firenze.
L. Giovannoni, 1987, *Lingua e logica,* Franco Angeli Scuola, Milano.
W. Hodges, 1986, *Logica,* Garzanti, Milano.
D.A. Johnson - W.H. Glenn, 1971, *Insiemi e operazioni,* Zanichelli, Bologna.
D.A. Johnson - W.H. Glenn, 1978, *Logica e ragionamento,* Zanichelli, Bologna.
C.F. Manara, 1986, "La logica nella scuola dell'obbligo", «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», n. 10, 40-55.
C.F. Manara, 1989, *Il certo e il probabile,* Editrice La Scuola, Brescia.
C. Marchini, 1989, "Logica proposizionale nella scuola", «La matematica e la sua didattica», n. 2, 28-37.
C. Marchini, 1992a, "La logica matematica, strumento essenziale per l'insegnamento/I", «La matematica e la sua didattica», n. 3, 40-49.
C. Marchini, 1992b, "La logica matematica, strumento essenziale per l'insegnamento/II", «La matematica e la sua didattica», n. 4, 41-56.
M. Robert, 1973, *Esperimento di introduzione della logica nelle scuole elementari,* Boringhieri, Torino.
R. Smullyan, 1981, *Qual è il titolo di questo libro? L'enigma di Dracula e altri indovinelli logici,* Zanichelli, Bologna.
T. Varga, 1984, *Fondamenti di logica per insegnanti,* Boringhieri, Torino.
B. Young, 1971, *Progetto Nuffield per la matematica,* La Logica, Zanichelli, Bologna.

* * *

Pubblicazioni del GREM relative agli argomenti trattati:

N. Malara, 1989, "Implicazione e modus ponens: sintesi di una esperienza didattica realizzata in una seconda media", in Barra M. e Zanardo A. (a cura di) *Atti Conv. Naz. La Logica matematica nella didattica,* Roma (1988), stampato in Padova, 245-253.
G. Navarra, 1991, "Una storia di alberi e di case: proposta didattica per la quinta classe sulla classificazione, la rappresentazione e il potenziamento delle competenze logico-linguistiche", «L'Educatore» XXXVIII, 23, 16-21.
G. Navarra, 1992, "Il signor Kappa allo zoo, riflessioni su un'attività didattica sulla comprensione dei valori di verità dei connettivi 'E', 'E/O', 'O' ", «Scuola e Didattica» n. 13, 83-88.
G. Navarra, 1993a, "Un mazzo di fiori alquanto pericoloso, itinerari didattici attorno alle Leggi di de Morgan", «Scuola e Didattica», n. 9, 36-40.
G. Navarra, 1993b, "Itinerari attraverso la Logica per il potenziamento delle capacità linguistiche e argomentative", versione italiana del lavoro presentato all'ICME 7, Québec (1992), «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol. 16, n. 8, 731-756.
G. Navarra, 1997, "Le indagini dell'ispettore Clouseau. Il caso del miliardario assassinato e altri delitti ancora". Si parla da un punto di vista inconsueto di variabili e si ragiona su linguaggio e metaconoscenza, «Scuola e Didattica», n. 11, 90-96.
G. Navarra, M.R. Simoncini, 1997a, "L'isola del tesoro (parte prima)", «L'Educatore», n. 22, 32-38.
G. Navarra, M.R. Simoncini, 1997b, "L'isola del tesoro (parte seconda)", «L'Educatore», n. 23, 54-58.