Formazione degli insegnanti per un approccio socio-costruttivo all'early algebra: studio di un caso

Nicolina A. Malara(*)

1. Mutamenti nell'insegnamento dell'algebra

Tradizionalmente l'algebra viene introdotta nell'insegnamento come studio sintattico delle forme algebriche, senza alcuna attenzione ai processi di matematizzazione che le sottendono o ai mutamenti storico-epistemologici che hanno portato alla loro reificazione come oggetti matematici. La conseguenza di questo è che gli studenti non colgono il senso del linguaggio algebrico come linguaggio idoneo per la modellizzazione del reale e come potente strumento di ragionamento e di previsione.
Sin dagli anni '90 la ricerca ha mostrato come un insegnamento relazionale dell'aritmetica assieme ad un approccio anticipato alla modellizzazione algebrica consenta il superamento di classiche difficoltà nell'apprendimento dell'algebra e una più facile conquista dei significati di cui le forme algebriche sono portatrici (Chevallard 1989, 1990; Kieran 1989, 1992; Linchevski 1995). Classici sono gli studi rivolti allo sviluppo del 'symbol sense' (Arcavi 1994), inteso come traguardo meta, produttore di una concezione dell'algebra come 'strumento di pensiero' (Arzarello e altri 2003) e studi dove si indicano percorsi innovativi centrati sul cosidetto ciclo algebrico essenziale: *rappresentare, trasformare, interpretare* (si vedano ad esempio Bell e altri 1987, Harper, 1987). Tutti questi studi hanno dato luogo a svariate sperimentazioni il cui successo ha portato al consolidarsi di un corpus di risultati che sono venuti a determinare una specifica area di insegnamento, *l'early algebra*, intesa come area di collegamento ed intreccio tra aritmetica ed algebra, da affrontare sin dai primi anni di scolarità (sulla evoluzione dell'insegnamento dell'algebra si veda Malara (2012), per maggiori dettagli sull'early algebra si veda Malara (2007)).
L'early algebra si sviluppa attraverso l'esplorazione di situazioni di vario genere e punta alla individuazione di relazioni e di regolarità, al riconoscimento di analogie, alla generalizzazione di fatti osservati ed alla loro rappresentazione. Essa è presente da tempo in molti programmi dei

(*) Università di Modena e Reggio Emilia (e-mail: malara@unimore.it).

paesi più avanzati (basti considerare gli standard USA del 2000 o i programmi inglesi già dal 1991) e appare oggi nelle linee portanti delle nostre indicazioni nazionali.
Il modello di insegnamento soggiacente a queste innovazioni è quello socio-costruttivo. Esso si basa su una visione degli studenti come artefici della propria conoscenza e si articola attraverso l'argomentazione ed il confronto delle idee, fino alla sistemazione collettiva delle conquiste fatte ed alla riflessione sul significato e ruolo di esse. Tale modello prevede che l'azione dell'insegnante si sviluppi a partire dalla devoluzione agli studenti di situazioni problematiche opportunamente studiate per favorire l'emergere di concetti e proprietà matematiche particolari.
Questo modello di insegnamento richiede nell'insegnante conoscenze e abilità che non riguardano soltanto la conoscenza della disciplina. Egli deve essere abile nel *creare un buon contesto di interazione*, stimolando e regolando i processi argomentativi, facilitando la comunicazione, l'ascolto, la valutazione e la capacità di produrre contro-argomentazioni.
In tale modello la discussione matematica svolge un ruolo centrale. Nel condurre una discussione l'insegnante deve dirigere l'attenzione della classe verso l'obiettivo matematico da raggiungere e deve filtrare e far convergere le idee degli studenti verso contenuti rilevanti e significativi per il raggiungimento di esso. Molte sono le azioni che deve oculatamente compiere, quali: porre domande di rilancio circa le affermazioni degli studenti per far chiarire loro quanto affermato e far controllare lo sviluppo dei loro pensieri; ricostruire i discorsi degli studenti, per evidenziare e chiarire i processi argomentativi sviluppati; riesaminare elementi dell'attività che possano favorire la comprensione delle idee matematiche sottese; indurre riflessioni locali e globali, per incoraggiare gli studenti a ripensare su cosa hanno compreso in un dato momento e per permettere loro di interiorizzare i processi collettivi di argomentazione. Deve inoltre attivare e rendere esplicite norme socio-matematiche che portino gli studenti a vagliare l'accettabilità di una soluzione, a valutare soluzioni differenti, ad apprezzare la qualità di una soluzione.
Nello sviluppo di una discussione inoltre svariate sono le situazioni che si possono determinare, ciò comporta che l'insegnante debba prendere numerose decisioni nel vivo dell'azione. Questo richiede in lui la capacità di prefigurarsi i problemi che può incontrare sul campo, cosa che è strettamente correlata alla sua capacità di controllo della situazione.
Per l'acquisizione di tali competenze, la ricerca sulla formazione degli insegnanti ha evidenziato l'importanza dell'attuazione di pratiche

educative “sul campo”, che si basino sulle riflessioni critiche dell’insegnante circa i processi di classe e sulla condivisione di tali riflessioni in “comunità di indagine”, gruppi misti e paritetici costituiti da insegnanti, mentori e ricercatori (Jaworsky 1998 2003, 2006, Lerman 2001, Mason 1998, 2002, 2008, Shoenfeld 1998). Mason, in particolare, propone lo studio della *disciplina dell’osservare*. Egli afferma che l’abilità di intuire/afferrare le cose viene dalla costante pratica, andando oltre quello che accade nella classe, e raccomanda la creazione di opportune pratiche sociali in cui gli insegnanti possano condividere le loro esperienze e rifletterci su. Al riguardo Jaworski sottolinea l’efficacia delle comunità di indagine, enfatizzando come la partecipazione degli insegnanti a questi gruppi li porti, grazie alle pratiche di riflessione congiunta, a sviluppare una nuova identità.
Il nostro modello di formazione e sviluppo professionale degli insegnanti segue queste concezioni e modalità, ma rappresenta il risultato delle pratiche di educazione degli insegnanti sviluppate in Italia sin dai tardi anni ’70 ed attuate in intreccio con gli studi di innovazione didattica nelle classi (Malara & Zan 2002).

2. I nostri studi sul versante dell’early algebra e della formazione degli insegnanti

Sin dagli anni 90 ci siamo occupati di problemi di insegnamento-apprendimento dell’algebra ed abbiamo attuato sperimentazioni nelle classi in collaborazione con insegnanti-ricercatori con l’obiettivo di individuare le condizioni di applicabilità nella scuola reale di innovazioni didattiche portatrici di una visione dell’algebra aperta al problem solving, alla generalizzazione, alla modellizzazione ed alla dimostrazione, nell’ottica di un insegnamento di tipo socio-costruttivo.

I nostri numerosi studi hanno portato alla nascita del *Progetto ArAl: percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico*[1] (Malara & Navarra 2003), progetto che propone una rivisitazione dell’insegnamento dell’aritmetica in chiave relazionale ed un avvio all’algebra di tipo linguistico-costruttivo. Il progetto coinvolge studenti ed insegnanti dalla scuola dell’infanzia al primo biennio della scuola secondaria superiore ma è principalmente rivolto alla scuola primaria e secondaria inferiore in una prospettiva di continuità tra i due ordini scolastici.

[1] ArAl è un acronimo per « Aritmetica e Algebra ». Il progetto ArAl è condotto in collaborazione con Giancarlo Navarra, insegnante ricercatore, che ne coordina gli aspetti organizzativi e contribuisce al suo programma scientifico.

L'ipotesi su cui il progetto si basa è che l'apprendimento del linguaggio algebrico possa svilupparsi in analogia con le modalità d'apprendimento del linguaggio naturale. Come l'apprendimento del linguaggio naturale avviene attraverso un'ampia varietà di situazioni che il bambino vive sperimentalmente, attraverso le quali si appropria poco alla volta dei significati dei termini del linguaggio e delle regole morfologiche che lo supportano, così i modelli mentali propri del pensiero e del linguaggio algebrico vanno costruiti sin dai primi anni di scuola, portando gli allievi ad affrontare esperienze pre-algebriche lavorando in aritmetica (cogliere, generalizzare ed esprimere relazioni, effettuare e confrontare rappresentazioni, estendere regolarità per analogia, …) in modo che - attraverso una costante riflessione sui significati dei segni introdotti e dei processi attivati – essi possano sviluppare il pensiero algebrico progressivamente, in un fitto intreccio con l'aritmetica.

Come riportato in Cusi e altri (2011), la nostra prospettiva di lavoro nelle classi si poggia su alcuni principi base che qui riportiamo:

- L'*anticipazione di attività pre-algebriche di tipo generazionale* all'inizio della scuola primaria, e ancora prima alla scuola dell'infanzia, per favorire la genesi del linguaggio algebrico, visto come linguaggio generalizzatore, nel momento in cui l'alunno viene guidato verso la riflessione sul linguaggio naturale.
- La *costruzione sociale delle conoscenze*, ossia la costruzione condivisa di nuovi significati, negoziata sulla base degli strumenti culturali comuni posseduti in un determinato momento dagli alunni e dal docente.
- La *centralità del linguaggio naturale* come mediatore didattico principale per la lenta costruzione degli aspetti semantici e sintattici del linguaggio algebrico. Attraverso l'attivazione di processi di traduzione, il linguaggio naturale crea le basi per la produzione di rappresentazioni in linguaggio algebrico. Verbalizzazione, argomentazione, discussione, confronto favoriscono la comprensione e la revisione critica delle scritture e l'esplicitazione delle idee soggiacenti attivando processi di interpretazione
- *L'individuazione e l'esplicitazione del pensiero algebrico presente in modi spesso 'nascosti' nei concetti e nelle rappresentazioni dell'aritmetica*. La genesi del linguaggio generalizzatore si può collocare nel 'disvelamento' che avviene quando l'alunno comincia a descrivere una frase come $4\times2+1=9$ non più (non soltanto) come esito di una lettura procedurale 'Moltiplico 4 per 2, aggiungo 1 e ottengo 9'

ma come risultato di una lettura relazionale del tipo ‘La somma fra il prodotto di 4 con 2 e 1 è uguale a 9’; cioè quando parla, attraverso il linguaggio naturale, del linguaggio matematico, e non pone l’attenzione sui numeri ma sulle relazioni, cioè sulla *struttura* della frase.

In un approccio di questo tipo l’elemento chiave è l’insegnante, occorre che egli attui una didattica che consenta l’affermarsi di un’autentica attività matematica socialmente condivisa, in cui si dia grande spazio agli aspetti linguistici, di rappresentazione di informazioni e di processi, ed ad aspetti meta-cognitivi per il controllo della pertinenza ed adeguatezza delle rappresentazioni, per il riconoscimento e l’identificazione di quelle equivalenti e per la selezione di quelle ottimali. Questo richiede una profonda ristrutturazione delle concezioni degli insegnanti sia sul versante dei contenuti da insegnare sia su quello metodologico-didattico nella classe e comporta una vera e propria cultura del cambiamento.

Strumenti, metodi ed attività messi a punto in seno al progetto hanno la funzione di sostenere gli insegnanti nel proporre alle classi attività di early algebra con modalità socio costruttive, e di formarli come *insegnanti metacognitivi* attraverso la riflessione sulla loro azione di classe. Si punta ad obiettivi su due versanti:

- degli allievi: l’obiettivo è quello di analizzare le condizioni attraverso le quali questi ultimi, sin dai gradi 4-6 riescono, a un primo livello, a generalizzare, a formulare proprietà e produrre rappresentazioni formali, a risolvere problemi algebrici… e, ad un secondo livello, a conquistare il significato delle scritture algebriche e la consapevolezza della loro forza espressiva;
- degli insegnanti: anche su questo versante gli obiettivi sono a due livelli. Un primo obiettivo è quello di affinare la loro capacità nel condurre la classe nell’approccio all’early algebra secondo le modalità indicate, un secondo obiettivo è quello di favorire la loro crescita attraverso stimoli derivanti dalla partecipazione a progetti di collaborazione almeno biennali caratterizzati dall’immersione in una comunità di indagine sulla propria pratica, in un continuo gioco di *riflessione*, *confronto*, *condivisione*.

La nostra ipotesi di lavoro è quella di portare gli insegnanti ad essere immersi in un ‘ambiente’ nel quale loro stessi possano divenire artefici di un loro nuovo modo di operare, impegnandosi in modo attivo e (ri)costruendo la loro professionalità docente attraverso scambi di studi, esperienze e riflessioni a tutto campo. Le nostre modalità di lavoro sono

finalizzate ad indurre gli insegnanti ad oggettivare i loro processi didattici per poter meglio valutarne i risultati ed a *guidarli a riflettere* a vari livelli attorno a processi (propri o altrui) secondo tre punti di vista: *lo sviluppo della costruzione matematica degli allievi, l'azione dell'insegnante, la partecipazione dei singoli nelle costruzione collettiva delle conoscenze.*
Gli insegnanti che scelgono di partecipare alle asperimentazioni ArAl hanno alle spalle lo studio del progetto, in particolare delle sue unità,[2] e del glossario reperibile nel sito del progetto[3]. Nell'affrontare le sperimentazioni, tuttavia, accanto alla loro forte motivazione rivelano una altrettanto forte insicurezza verso le discussioni di classe, percepite come situazioni di difficile gestione, aperte ed imprevedibili.
I nostri studi ci hanno resi consapevoli delle difficoltà che essi incontrano sia nella progettazione che nella conduzione delle *discussioni di classe*. Hanno messo in evidenza come, nello sviluppo di una discussione, gli insegnanti spesso assumono atteggiamenti non adeguati, che ricalcano il modello trasmissivo, che li portano a: non rendere gli studenti partecipi delle finalità del problema o delle conclusioni da raggiungere; non dare spazio ad interventi potenzialmente produttivi, a ratificare immediatamente la validità di interventi significativi senza rilanciare alla classe la loro validazione. Un esempio di questo è riportato in appendice con un dettagliato commento sui limiti dell'azione dell'insegnante.
Per supportare gli insegnanti ed andare incontro ai loro bisogni, affidiamo a gruppi di insegnanti coinvolti su una stessa sperimentazione un mentore-ricercatore, con il quale oltre a momenti di lavoro *de visu* intessono un costante rapporto dialogico via mail. Periodicamente, presso le scuole o all'università, vi sono poi sessioni di lavoro dei piccoli gruppi con il mentore ed il ricercatore responsabile, ma anche sessioni collettive che riuniscono tutti i ricercatori e gli insegnanti sperimentatori.

2 Le unità possono vedersi come modelli di processi didattici in sequenza, aperti alle scelte dell'insegnante, su un filone specifico di attività. Essi danno indicazioni sul significato matematico e gli obiettivi delle singole attività esposte, riportano estratti 'esemplari' di discussioni di classe, commentate sia sul piano dei comportamenti degli allievi (costruzioni significative, atteggiamenti ricorrenti, difficoltà) sia su quello degli insegnanti (interventi oculati, modi di introdurre e gestire le questioni, atteggiamenti assunti ecc).

3 Alle unità fanno da supporto il quadro teorico e soprattutto il glossario, consultabile in rete nel sito del progetto <www.aralweb.unimore.it>, dove gli insegnanti possono trovare chiarimenti ed approfondimenti su questioni matematiche, linguistiche, psicologiche, sociopedagogiche e metodologico-didattiche ed anche trovare esempi di buone pratiche.

Convinti che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe favoriscano nell'insegnante lo sviluppo della consapevolezza delle dinamiche che si realizzano in ogni discussione e delle variabili che le determinano, il nostro obiettivo è quello di portare gli insegnanti coinvolti a: a) acquisire una crescente capacità di interpretare la complessità dei processi di classe attraverso l'analisi delle *micro-situazioni* che li compongono, di riflettere sulla efficacia del proprio ruolo ed acquisire consapevolezza sugli effetti delle proprie *micro-decisioni*; b) avere un maggiore e più fine controllo sui comportamenti e sugli stili comunicativi da loro adottati; c) osservare, nella prosecuzione dell'attività di classe, l'influenza sui comportamenti ed apprendimenti degli allievi dello studio critico-riflessivo via via svolto.

Per realizzare questo obiettivo, coinvolgiamo gli insegnanti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su si essi, mirata ad evidenziare le interrelazioni tra conoscenze costruite dagli studenti e comportamenti dell'insegnante nel guidare gli studenti in tali costruzioni. Tale analisi si sviluppa attraverso la costituzione di quelli che noi chiamiamo '*Trascrizioni multicommentate'* (TM), in gergo 'i diari'. Esse si realizzano sulla base dal trasferimento in versione testuale digitale delle audioregistrazioni di lezioni su temi concordati in precedenza con i ricercatori. Sono effettuate dagli insegnanti sperimentatori che le inviano, accompagnandole con commenti e riflessioni, ai mentori-ricercatori, i quali le commentano a loro volta e le rinviano quindi agli autori, ad altri docenti impegnati in attività analoghe e talvolta ad altri ricercatori. Spesso gli autori stessi reintervengono nel ciclo commentando i commenti o inserendone dei nuovi. Quello che caratterizza questa metodologia è la coralità di rete, per i fitti scambi via mail che determinano la costituzione delle TM, e la fertilità delle riflessioni che emergono dai vari commenti espressi.

Qui noi proponiamo solo un breve estratto di una TM, nell'intento di mostrare come questo strumento permette di evidenziare i comportamenti attuati dagli insegnanti, le difficoltà che essi incontrano, le consapevolezze che raggiungono dopo il lavoro di analisi e riflessione condotta sulla base dei commenti ricevuti. Siamo ben consapevoli che questo estratto non può pienamente esprimere la ricchezza e la varietà di questioni che emergono dalle trascrizioni di classe, il tipo di interazioni con gli insegnanti che i commenti consentono di attivare e come questi commenti possano aiutarli a raffinare le loro azioni nella classe, per questo ci riferiamo anche ad altri esempi che si possono trovare in Malara (2008), Malara & Navarra (2011), Cusi e altri (2011), Cusi &

Malara (2012). Per preservare il flusso della discussione, i commenti analitici sono riportati nello stesso ordine in cui essi sono stati fatti. Gli autori dei commenti così sono indicati: I: insegnante; M: mentore; R1-R2: recercatori del team.

3. Un breve esempio di TM

L'insegnante propone l'esplorazione di una successione numerica di cui sono dati i primi tre termini (si tratta di una progressione aritmetica di elemento iniziale 4 e ragione 7). L'attività è finalizzata a determinare una rappresentazione algebrica generale della sequenza. Nell'estratto riportato, la classe (I media) ha già identificato la legge di generazione ricorsiva della successione. L'insegnante scrive la seguente tabella alla lavagna ed apre una discussione per introdurre la classe allo studio di una rappresentazione per la legge generale di corrispondenza (I , come prima, sta per insegnante; S, J ed A rappresentano gli studenti coinvolti in questa parte di discussione).

Numero di posto	Numero della successione	Operazioni fatte saltando dal primo numero di posto	'Ricetta matematica[4]' per costruire il numero
1	4	4	
2	11	4 +…	
3	18	4 + … + …	
4	25		
5	32		

[4] L'espressione "ricetta matematica" è una metafora usata dall'insegnante per indurre l'idea che gli allievi dovrebbebro usare una rappresentazione di un numero della successione mediante il suo numero di posto.

1 I:	Come arriviamo a 11?
2 S:	+ 7.
3 I:	Facciamo 4 + 7. E cosa al terzo posto, S? Facciamo…?
4 S:	4 + 7 + 7.
5 J:	Non sarebbe meglio fare 4 × 2? (1)
6 I:	E al quarto cosa facciamo?
7 S:	4 + 7 + 7 + 7.
8 I:	E al quinto?
9 S:	4 + 7 + 7 + 7 + 7.
10 I:	Cosa facciamo se raggiungiamo il sesto posto?
11 S:	4 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7.
12 I:	Corretto. allora, noi troviamo …
13 A:	Io non ho capito. Cosa metto al primo posto?
14 I:	Ok, c'è 4 al primo posto.
15 A:	Io metto 4 × 1. (2)
16 I:	Si, ma lì non c'è il '×'. Il primo posto è 4 (3)

3.1 Commenti analitici dell'estratto

(1) M. Perché I non commenta l'intervento di J?

R2. Concordo con M. Probabilmente J intuisce una regolarità ma non la esprime correttamente, invece di dire 4 + 7 × 2 egli sintetizza tutto in 4 × 2. I avrebbe dovuto intervenire su questo.

(2) R1. Anche questo intervento avrebbe potuto essere indagato. Qual è il retropensiero di A? Perché pensa al prodotto fra 4 e 1?

R2. Ancora siamo di fronte ad una intuizione espressa malamente. Lo studente probabilmente vuole 'colmare il vuoto' che vede nella rappresentazione del primo termine a confronto delle altre. Qui I perde un'occasione di variare la rappresentazione del primo termine, 4, in modo funzionale alla situazione, ad esempio scrivendo 4 come 4+0 e rilanciando alla classe il problema di trovare per il primo termine una rappresentazione analoga a quella degli altri.

(3) R2. Questo intervento di I fa pensare che lei stessa escluda la rappresentazione di 4 in altro modo, mostrando poca lungimiranza da un punto di vista algebrico. Sarebbe bene invece incoraggiare queste intuizioni, anche se imprecise, ovviamente cercando di indirizzarle al meglio.

I. Tutte queste annotazioni mi fanno pensare ad una enorme chiusura mentale che ho e che credevo di non avere così tanto. Non so se sia questione di attenzione, di abitudine a vedere le cose anche in altro modo, di paura ad uscire da quello che è lo schema da seguire o che credevo di dover seguire.

3.2 Analisi dell'estratto

Questo estratto documenta alcuni rigidità nei comportamenti dell'insegnante. Questo non coglie la produttività delle intuizioni di alcuni allievi, bloccando possibili strade per la loro esplorazione matematica (linee 5, 13, 15) ed allontanandoli dalla rappresentazione relazionale della corrispondenza, che implica l'uso della rappresentazione moltiplicativa (linea 16). Notiamo che l'insegnante fa solo alcune commenti di riflessione sulla sua azione dopo la lettura dei commenti del mentore e di altri ricercatori. Il suo commento a posteriori rivela consapevolezza della sua rigidità ma anche esplicita le sue paure ad abbandonare gli schemi usuali per affrontare nuove attività e nuovi approcci (note 3-I).

In generale, i commenti associati a questo estratto reflettono alcune delle categorie da noi già evidenziate (Malara, 2008), che appaiono qui strettamente interconnesse: (1) questioni legate a concezioni culturali o educative generali (note 3-R2); (2) questioni metodologiche riguardanti aspetti matematici (note 1-R2; 2-R2; 3-R2); (3) questioni di gestione delle discussioni nella classe (note 1-M; 2-R1). Altre categorie emerse vistosamente dagli MT – qui non documentate per ragioni di spazio - riguardano la distanza tra teoria e pratica (per la difficoltà a riferirsi ad elementi del quadro teorico condiviso) e a questioni linguistiche di vario genere.

Il breve esempio presentato indica il ruolo che le TM svolgono nei nostri percorsi di formazione, va tenuto presente che questo lavoro analitico è condotto sulle trascrizioni di tutti gli episodi di classe che costituiscono l'esperimento d'insegnamento. E' attraverso la totalità dei commenti che gli insegnanti: (1) realizzano effettivamente come lo sviluppo delle costruzioni matematiche degli allievi è influenzato fortemente da linguaggio, scelte, atteggiamenti ed azioni dell'insegnante; (2) riflettono sulle loro difficoltà nel condurre una discussione e ricevono suggerimenti circa come affrontare micro-situazioni di interazione; (3) esprimono le loro difficoltà, dubbi e consapevolezze.

L'analisi critica collettiva è una modalità metodologica particolarmente importante per lo sviluppo della consapevolezza di un insegnante: commenti divergenti ad una stessa micro situazione conducono a considerare diverse interpretazioni possibili dei comportamenti assunti e degli interventi attuati; commenti convergenti permettono di amplificare i punti critici nella conduzione dell'attività, in relazione alla quale è necessario (ri)costruire competenze e raffinare le proprie sensibilità.

Desideriamo evidenziare le condizioni che determinano l'efficacia del nostro approccio via MT. Una prima condizione è la natura non episodica delle situazioni per la riflessione e di scambio: grazie al progressivo accumularsi di momenti riflessione autonoma e di riflessione interattiva, caratteristici della nostra metodologia, l'insegnante diviene più recettivo e, nel lungo termine, giunge a sviluppare nuove concezioni, atteggiamenti e modi di agire. Un'altra fondamentale condizione, cruciale per il processo di sviluppo dell'insegnante, è l'attuazione di una relazione tra membri del gruppo basata sulla fiducia reciproca e la costruzione di un senso di appartenenza e di condivisione di valori comuni.

L'analisi di diverse TM relative alla implementazione di un percorso progettato con gli insegnanti e finalizzato allo sviluppo delle abilità dimostrative via linguaggio algebrico degli studenti, ci ha permesso di identificare i caratteri specifici che costituiscono il profilo di un 'insegnante efficace', che si pone come modello di atteggiamenti e comportamenti consapevoli ed efficaci per gli studenti (Cusi & Malara 2009). Gli elementi che definiscono il modello richiedono che l'insegnante debba: (a) porsi come soggetto che indaga, stimolando un atteggiamento di ricerca in relazione al problema in studio e come elemento partecipante costitutivo e nella classe; (b) porsi come guida operativa/strategica, proponendosi mediante un atteggiamento di condivisione di situazioni (più che di trasmissione di saperi), e di guida riflessiva portando all'identificazione di modelli operativi/strategie efficaci che emegono nell'attivita di classe; (c) essere consapevole della propria responsabilità di mantenere un armonico equilibrio tra aspetti sintattici e aspetti semantici nello sviluppo del pensiero algebrico; (d) tentare di stimolare e provocare la costruzione di competenze chiave nella produzione di pensiero via liguaggio algebrico agendo come "attivatore" di processi algebrici (generalizzare, tradurre, manipolare, interpretare, anticipare); (e) stimolare e provocare atteggiamenti di tipo meta, agendo come "attivatore" di atteggiamenti riflessivi e "attivatore" di atti meta-cognitivi, con particolare referimento al controllo del senso globale dei processi.

Il lavoro sviluppato con futuri insegnanti (Cusi & Malara 2011), ci ha suggerito di concepire questo costrutto come una possibile lente teorica per l'analisi delle discussioni di classe da usarsi in specifici laboratori con/per insegnanti in servizio. In un prossimo futuro intendiamo verificare l'efficacia di questo costrutto anche come strumento per l'auto analisi dell'insegnante.

4 Brevi osservazioni conclusive

In questo lavoro abbiamo presentato i principali riferimenti sugli studi che stanno alla base delle ricerche da noi condotte per l'innovazione didattica in ambito aritmetico-algebrico e per una formazione degli insegnanti adeguata a gestire una tale innovazione. Ci siamo soffermati sulla questione del ruolo dell'insegnante nello sviluppo di una discussione matematica documentando attraverso estratti di trascrizioni di classe comportamenti inadeguati e incongruenze nelle azioni dell'insegnante. Abbiamo poi illustrato le modalità di formazione da noi attuate per rendere gli insegnanti consapevoli della stretta relazione tra le loro azioni e i comportamenti degli studenti al fine di affinare la loro professionalità nel gestire una discussione. Abbiamo inoltre evidenziato i caratteri di un profilo di insegnante che si pone in modo efficace per produrre negli studenti un approccio significativo e consapevole al pensiero algebrico.

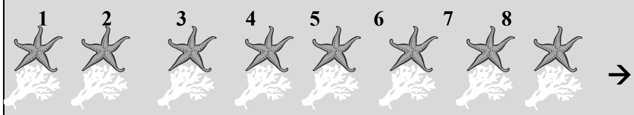
Nel concludere desideriamo sottolineare l'importanza delle pratiche come quelle descritte per la conquista nell'insegnante di concezioni e consapevolezze nuove circa i contenuti di insegnamento e i modi di porsi nella classe. Ribadiamo la necessità di una fine educazione degli insegnanti sul versante della conduzione delle discussioni matematiche, cosa che richiede un attento studio di episodi di classe e soprattutto una sistematica auto-analisi circa la propria pratica d'insegnamento.

Appendice

Situazione proposta in classe IV primaria

Nella Grande Barriera corallina la vita è molto intensa. Vi si incontra ogni tipo di animale: spugne, meduse, polipi, pesci multicolori. Nella parte più a est della barriera vive una famiglia numerosissima di stelle marine, ognuna delle quali si trova attaccata ad un corallo:

Alessia Angela Elena
Loretta Patrizia …



Quando c'è la luna nuova le stelle marine si spostano e cambiano corallo seguendo un'antichissima regola. Vediamo di scoprirla osservando come si spostano le stelle che stanno nelle prime posizioni: Alessia va al N° 3; Loretta va al N° 5; Angela va al N° 7; Patrizia va al N° 9 Elena va al N° 11

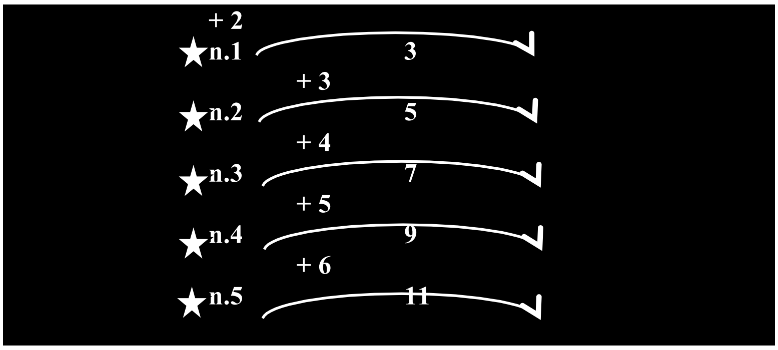
1) Sul corallo n° 78 si trova la stellina Valeria: che numero avrà il corallo sul quale si sposterà?
2) Quale sarà il numero del corallo sul quale si sposterà la stella che si trova al 459° posto?
Argomenta le risposte.

Estratto della discussione

(Evidenziati, in corsivo e contrassegnati con numero progressivo gli interventi dell'insegnante)

Inizialmente alcuni bambini danno risposte numeriche casuali o non argomentate

1. *T. «vi ho chiesto di argomentare»*
Alex «Le stelle vanno: da 1 a 3, da 3 va al 5 e allora più 2, dal 5 al 7 più 2…»
Alessia: «Ho sommato tutte le stelle di quanto si spostano: 2, 3, 4, 5… perché dall'1 al 3 è +2, dal 2 al 5 è +3, poi va dal 3 al 7, +4 e poi dal 4 al 9 ed è +5, dal 5 a 11 +6 e sommando 2+3+4+5 si ottiene 15»
Beatrice «Io ho fatto così». (Va alla lavagna e con molta calma e altrettanta chiarezza descrive il suo ragionamento rappresentando i vari casi con frecce)



«la stella Alessia deve andare dal posto n. 1 al posto n. 3 e allora fa +2; Loretta deve andare dal n. 2 al n. 5 e allora fa +3; Angelica va dal n. 3 al n. 7 e fa +4; Patrizia va dal n. 4 al n. 9 ed è +5; Elena va dal n. 5 al n. 11 e fa +6; io ho fatto così ed allora secondo me è 78+79 che fa 157, perché ho aggiunto al numero dove si trovava la stella marina il numero che viene dopo»

2. *T «Bravissima! Cosa ne pensate? Uno di voi ha detto che Valeria arriva al n. 80, un altro al n. 93, un altro all' 84, uno al 157»*
Nicola «Non ho ben capito quella di Beatrice»

3. *T «Beatrice, devi proprio aiutare Nicola (rivolta alla classe), se non capite chiedete*»
Beatrice «Sì. La stella Alessia che si trovava al n. 1 si è spostata nel n. 3… » *(parte dalla prima stella e ripercorre la freccia orientata da 1 a 3, continua analogamente con le altre stelle indicandole mentre parla).*

4. *T «Cosa ha fatto di diverso Beatrice rispetto ai compagni che l'hanno preceduta?»*
Alcuni: «Ha rappresentato… ». Altri: «Ha schematizzato… »
(L'insegnante suggerisce a Beatrice di scrivere in rosso gli operatori sopra le frecce. Mentre colora, Beatrice spiega)
Beatrice «… poi la 2 per arrivare a 5 fa +3, dopo da 3 per arrivare a 7 ho aggiunto 4, dal 4 per arrivare a 9 ho aggiunto 5, da 5 per arrivare a 11 ho aggiunto 6»
Nicola «Deve mettere 6 perché è 5+1; deve mettere l'indirizzo della stella più 1. Deve sempre aggiungere il numero dell'indirizzo più 1 al numero dell'indirizzo»

5.*T «Bravo! Traducilo in linguaggio matematico»*
Nicola «+5+5+1»
Nicola, Beatrice e alcuni altri arricchiscono la lavagna di una seconda rappresentazione sagittale
Nicola, Beatrice e alcuni altri arricchiscono la lavagna con una nuova

rappresentazione: ciascuna freccia della precedente rappresentazione è scomposta nel prodotto di due, la prima risulta un operatore dipendente dal numero di posto, la seconda freccia risulta l'operatore invariante '+1'.

6. *T «E allora se la stella parte da 78, cosa sarà?*
Beatrice: 78+78+1=157»

7. *T: (batte il cinque con Beatrice. Poi rivolta alla classe) : «Avete capito?»*
Giulio «Allora deve andare al 157… ho scritto solo il processo: 78+78+1»

8. *T «Si potrebbe scrivere la stessa cosa anche in modi diversi?»*
I contributi di Alex, Enrico, Nicola e Giulio portano a queste scritture.
78+78+1=157; 78+79=157; 78×2+1; 78+(78+1)

9. *T «Benissimo. C'è un'altra sfida per voi: la stellina Filippa è al posto n. 100; dove si sposta?»*
Alessia «100×2+1=201»

10. T «OK. La stella Maria è al n. 300; dove va?»
Alex «300+300 fa 600, più 1 è uguale a 601»
Beatrice «Oppure si può moltiplicare il suo valore per 2 e poi più 1»

11. T *«Siete stati bravissimi! Non siamo arrivati ancora alla generalizzazione, ma ci siamo vicini!»*

Qualche giorno dopo la stessa classe riprende l'attività. L'insegnante punta alla conquista della generalizzazione.

12. T «*Ritorniamo da dove eravamo partiti: che regola segue la stella Valeria per spostarsi*?»
Si riscrive alla lavagna: 78+78+1=157

13. T «*Qualcuno ha detto 78×2+1=157, vi ricordate? Adesso guardate: se una stellina parte dal numero 15 dove si trova quando arriva*?»
Molti «15×2+1!»

14. T «*Bene. E se parte da 103*?»
Coro «103×2+1!»
L'insegnante propone altri numeri di partenza: 598; 3654; 92045 e scrive una sotto l'altra le frasi degli alunni lasciando volutamente uno spazio tra il numero di casa e gli operatori che agiscono su di esso: 78 ×2+1; 15 ×2+1; 103 ×2+1; 598 ×2+1; 3674 ×2+1; 92045 ×2+1
La classe esplode in un coro «Per 2 più 1 resta lo stesso!!!

15. T «*Ottimo! Rimane costante '×2+1'. Adesso provate ad esprimere in lingua italiana la regola di questo spostamento. Dovete scrivere il Regolamento dei movimenti delle Stelle Marine. Immaginate che la stella Carlotta arrivi per la prima volta nella colonia. Quando c'è la luna nuova osserva che tutte le stelle marine si muovono e cambiano posizione, lei non ci capisce niente e chiede alla sua vicina cosa deve fare. Secondo voi quale aiuto può dare a Carlotta l'amica stella? Argomentate la rispost*a»
Alessandro «Deve fare il numero della casa per 2 più 1»

16. T «*Come potreste dirlo in un altro modo*?»
Costanza «dal numero della casa devi andare avanti per 2 più 1»
Piero «Io direi: se tu sei nella casetta numero 50, devi spostarti nella… devi andare… ancora 50 casette in là e più un'altra»

17. T «*Intanto la stellina è morta di fame… sentite, bisogna dare dei nomi; come chiamiamo questi numeri*? *(i primi di ogni calcolo)*»
Costanza «Numero della casa»

18.T «*Tutti e due sono numeri di casa*»
Lucia «Numero del corallo»
Coro «Numero iniziale»

19.T «*Come si dice nelle gare*?»
Coro «Partenza! Arrivo!»
L'insegnante scrive a sinistra ed a destra rispettivamente della lista delle espressioni numeriche sulla lavagna: "numero del corallo di partenza; numero del corallo di arrivo".

20 T «*Vi consiglio di cominciare dal numero che sta dopo l'uguale. Il numero del corallo di arrivo è uguale a…* »
Enrico «Al numero iniziale per 2 più 1»
Alessia «Il numero del corallo di arrivo è uguale al doppio del numero di partenza più 1»

21. T «*Possiamo anche togliere 'del corallo'. Dettatemela*»
Molti: Il numero di arrivo è uguale al doppio del numero di partenza più 1
L'insegnante scrive e rilegge la legge alla lavagna.

22. T «*Sapete come tradurre per Brioshi?* [5]»
Matteo «Per 2»

[5] Brioshi è uno studente giapponese virtuale che scambia messaggi in linguaggio matematico con altri ragazzi. La sua riconosciuta abilità in quest'area incoraggia gli allievi a verificare la correttezza delle espressioni matematiche che gli devono essere mandate.

23.T «*Solo così? E secondo te Brioshi capisce*?»
Mattia «78... »

24.T «*Allora vale solo per 78*?»
Enrico «Vale per qualsiasi numero di partenza»

25.T «*L'idea è ottima, ma in matematica, dopo molti studi, è stato deciso di chiamare 'qualsiasi numero' con una sola lettera*»
Mattia «Io l'avevo detto!»

26 T «*Cosa mettiamo per numero di partenza*?»
Coro «p»

27. T «*E come numero di arrivo*?»
Coro «a»
Anna dà la formalizzazione della legge: «p×2+1=a»
Si scrive la relazione da inviare a Brioshi: p×2+1=a

Commento

Ad una prima lettura della discussione riportata, il comportamento dell'insegnante nella discussione appare buono. Ma egli in realtà non agisce al meglio. Dialoga con pochi non promuove l'interazione e soprattutto non rilancia alla classe la validazione di quando alcuni propongono. Lascia cadere ragionamenti che offrono elementi di discussione e di confronto (es. quelli iniziali di Alex e di Alessia). Esprime giudizi attraverso espressioni o gesti enfatici (es. 'bravissima' in intervento 2 o il gesto di 'battere in cinque' con Beatrice nell'intervento 7). Orienta la classe verso la soluzione da lei attesa non appena appare, come si evince dal suo comportamento dopo l'intervento di Beatrice[6]. Trascura di valorizzare interventi chiave, di carattere generale, come quello di Nicola, che rende trasparente il legame tra numero di casa finale e quello iniziale di una stella. Ancora, non riesamina con la classe i ragionamenti fatti per condividerli, puntualizzarli e consolidarli, si limita invece ad un semplice "avete capito". Non si pone in modo riflessivo con gli allievi, per aiutarli ad andare oltre la visione procedurale indotta dalla

[6] Una azione adeguata sarebbe stata quella di rilanciare alla classe la validazione del ragionamento fatto da Beatrice, o quanto meno quella di chiedere a quest'ultima di spiegare meglio ai compagni perché secondo lei a 78 andava aggiunto 79, indirizzando l'attenzione della classe e forzando in lei l'esplicitazione del fatto che il numero da aggiungere per arrivare alla nuova casa di una stella è il successivo del numero della sua casa iniziale, cosa funzionale all'individuazione della relazione in studio, tra i numeri delle case iniziale e finale di una stella.

rappresentazione sagittale, discutendo con loro di quale casa debba parlare il regolamento da redigere in modo che questi possano comprendere che occorra esprimere il numero di casa di arrivo di una stella mediante quello di partenza. Lascia cadere l'opportunità offerta dall'intervento di Alex per chiarire che un regolamento non può essere un 'comando' ma deve essere una frase di senso compiuto, in modo da forzare la rappresentazione verbale della legge in termini generali; per cercare di risolvere questo problema pone una domanda poco mirata e vaga (intervento 16) che non contribuisce a guidare gli studenti in questo delicato passaggio che richiede lo scambio tra la variabile indipendente (numero di casa di partenza) a quella dipendente (numero di casa d'arrivo), passaggio molto difficile per gli allievi se non è mediato dall'insegnante. Ancora, non porta gli allievi ad esplicitare cosa rappresentino i numeri di ingresso e di uscita nei vari casi, cosa che impedisce agli allievi di formulare verbalmente la legge dalla interpretazione delle scritture aritmetiche espresse, formulazione che viene di fatto da lei suggerita agli allievi (intervento 20). Non si pone in maniera costruttiva di fronte al problema di introdurre le lettere per rappresentare le quantità variabili 'numero di casa' in ingresso ed in uscita rispettivamente ma semplicemente ne suggerisce l'uso. Così, anche se nella classe si giunge alla rappresentazione algebrica della legge, in questa discussione non vi realizza con gli allievi una rappresentazione algebrica consapevole, di controllo pieno del significato di cui è portatrice.

Globalmente traspare nell'insegnante una maggiore tensione verso il raggiungimento del suo obiettivo in tempi rapidi che non a dare spazio e coordinare le voci degli allievi nella discussione, tensione che lo porta ad assumere un atteggiamento procedurale e poco attento ai significati delle singole azioni.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 24–35.

Arzarello F., Bazzini L.e Chiappini, G. (1993). Cognitive Processes in Algebraic Thinking: Towards a Theoretical Framework? In Hirabayashi, J., Nohda, N. Shigematsu K. e Lin, F. L. (Eds.), *Proceedings of 17th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, (vol.1, pp. 138-145). Tokio (Japan).

Bell, A., Malone, J. e Taylor, P. (1987). *Algebra: An Exploratory Teaching Experiment*, Curtin University, Perth and Shell Centre, Nottingham

Bell, A. (1996). Problem solving approaches to algebra: two aspects. In Bednarz, N. & Al. (Eds), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp.167-187). Netherlands: Kluwer Publishers.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, deuxeme partie: perspectives curriculaires: la notion de modelization, Petit X, n. 19, 43-72

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, troisieme partie: voies d'attaque et problemes didactiques, Petit X, n. 23, 5-38.

Cusi, A. e Malara, N.A. (2008). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante,* vol. XVI, n.1, (pp. 57-80)

Cusi, A. e Malara, N.A. (2009). the role of the teacher in developing proof activities by means of algebraic language, In M. Tzekaki et Al. (a cura di), *Proc. PME 33*, vol. 2, (pp. 361-368), Thessaloniki.

Cusi, A. e Malara, N.A. (2011). analysis of the teacher's role in an approach to algebra as a tool for thinking: problems pointed out during laboratorial activities with perspective teachers, in Pytlak, M., Swoboda, E. (a cura di) *CERME 7 proceedings*, (pp. 2619-2629), Rzezsow: University of Rzezsow.

Cusi, A. e Malara, N.A. (2012). Educational processes to promote, among teachers and in the classes, a linguistic approach to algebra: behaviours, difficulties and awareness emerged in teachers, In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (a cura di) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.299-319). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cusi, A., Malara, N.A. e Navarra G. (2011). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics. In Cai, J. e Knuth, E. (a cura di), *Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 483-510). Advances in Mathematics Education: Springer.

Harper, E. (a cura di), (1987-88). *NMP Mathematics for Secondary School*, Essex, UK: Longman.

Kieran, K. (1989). The Early Learning of Algebra: a Sctructurale Perspective, in Wagner S. and Kieran K. (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, LEA, Reston Virginia, 33-56

Kieran, K. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, in Grouws D.A. (a cura di), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NY, 390-419

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 3-31.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187–211

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In Cooney, T. J. e Lin, F. L. (a cura di), *Making sense of mathematics teacher education* (pp.33-52). Dordrecht: Kluwer.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.

Malara, N.A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. In N.A. Pateman , B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (a cura di), *Proceedings of PME 27*, vol.1 (pp.33-48). Honululu, USA.

Malara, N.A. (2007). Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti, XVIII Convegno Nazionale della Unione Matematica Italiana, in Notiziario UMI, anno XXXV, n.1.2, inserto speciale.

Malara, N.A. (2012). Il caso dell'algebra. Consolidamenti nella ricerca e mutamenti di prospettiva nell'insegnamento, in Arzarello, F. (a cura di), *Insegnare matematica, oggi. Ricerca didattica, rilevamento degli apprendimenti, pratiche di classe*. *Dossier Insegnare*, (pp. 52-61).

Malara, N.A. e Navarra, G. (2001). "Brioshi" and other mediation tools employed in a teaching of arithmetic with the aim of approaching algebra as a language. In Chick, H., Stacey, K., Vincent Jl. and Vincent, Jn. (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra*', vol. 2 (pp.412-419). Melbourne: university of Melbourne

Malara, N.A. e Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Favouring Pre-Algebraic Thinking*. Bologna: Pitagora.

Malara, N.A. e Navarra G. (2009). Approaching the distributive law with young pupils, *PNA Revista de Investigacíon en Didáctica de la Matematica*, 2009*,* vol. 3, n. 2, (pp. 73-85)

Malara, N.A. e Navarra G. (2011). Multicommented transcripts methodology as an educational tool for teachers involved in early algebra, in Pytlak, M., Swoboda, E. (a cura di) *CERME 7 proceedings*, Università di Rzezsow, Polonia, (pp. 2737-45)

Malara N.A., Zan, R. (2002). The Problematic Relationship between Theory and Practice, in English, L. (ed*) Handbook of International Research in Mathematics Education,* LEA, Mahwah, NJ, 553-580

Mason, J. (1998). Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, (pp. 243-267).

Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.

Mason, J. (2008). Being Mathematical with and in front of learners. In Jaworski, B. Wood, T. (a cura di), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (pp. 31-55). Sense Publishers.

Shoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, 4(1), (pp. 1-94).