

Processi educativi per promuovere nelle classi un approccio costruttivo all'early algebra. Consapevolezze emerse negli insegnanti

Nicolina A. Malara

Dipartimento di Matematica - Università di Modena & Reggio E.

Abstract

Si inizia con il considerare il ruolo dell'insegnante nell'insegnamento socio-costruttivo. Ci si sofferma sul problema della didattica dell'algebra e sulle principali questioni connesse all'early algebra. Si presenta il progetto ArAl come corpus di studi per l'approccio all'early algebra e come sistema integrato di formazione insegnanti. Si descrivono metodi e strumenti elaborati per affinare negli insegnanti la capacità di orchestrare discussioni matematiche di approccio all'early algebra e di esercitare il controllo di sé stessi nell'azione. Si riportano riflessioni degli insegnanti sulla valenza degli strumenti considerati e si conclude con brevi considerazioni generali sui bisogni sociali sul versante della formazione.

Parole Chiave: Insegnamento socio-costruttivo. Early algebra. Formazione Insegnanti. Progetto ArAl. Riflessione critica. Analisi previsionale di scene di classe. Trascrizioni multicommentate.

1. Introduzione

Sin dalla seconda metà degli anni '80, a livello internazionale, viene indicato per la matematica un modello di insegnamento/apprendimento di tipo socio-costruttivo, anche perché considerato idoneo ad educare gli studenti a lavorare collettivamente ed ad affrontare questioni complesse, oltre che ad acquisire flessibilità di pensiero.

Tale modello prevede che l'azione dell'insegnante si sviluppi a partire dalla devoluzione agli studenti di situazioni problematiche opportunamente studiate per favorire l'emergere di concetti e proprietà matematiche particolari. Esso si basa su una visione degli allievi come artefici della propria conoscenza e si articola attraverso l'argomentazione degli studenti ed il confronto delle loro

idee sotto la guida attenta dall'insegnante, fino a giungere alla sistemazione collettiva delle conquiste fatte ed alla riflessione sul significato e ruolo di esse.

In tale modello d'insegnamento il compito dell'insegnante diviene più complesso ed articolato. Egli deve avere cura di pianificare percorsi di insegnamento idonei a promuovere le costruzioni matematiche degli studenti, deve creare un ambiente che favorisca l'esplorazione matematica e la formulazione di congetture, deve adottare strategie comunicative, che facilitino l'interazione e la condivisione delle idee. Nella azione di classe egli deve assumere un'ampia varietà di ruoli: provocatore, maieuta, ascoltatore, guida, modello, orchestratore di discussioni, mediatore, attivatore di atti ed atteggiamenti metacognitivi, etc.. Inoltre, in base alle questioni matematiche in gioco, deve prevedere possibili processi di pensiero degli studenti, ipotizzare lo sviluppo del discorso matematico in relazione a certe domande chiave e soprattutto deve fronteggiare sul nascere sviluppi di esso che possono divergere significativamente da quello previsto.

Per la varietà e delicatezza dei ruoli da assumere in tale insegnamento, già dagli anni '90 la ricerca si indirizza verso lo studio del ruolo dell'insegnante (Sfard 2005). Essa mette in luce come conoscenze, convinzioni, emozioni, atteggiamenti dell'insegnante siano componenti intrecciate e determinanti nell'attuazione di processi di insegnamento/apprendimento ed evidenzia la necessità di studiare le loro interrelazioni ai fini di offrire agli insegnanti risultati fruibili per il loro sviluppo professionale.

Fondamentali per la costruzione di una professionalità insegnante flessibile e poliedrica vengono considerati: la conoscenza di modelli di pratiche interattive e discorsive (Wood 1999); lo sviluppo della consapevolezza delle proprie conoscenze, convinzioni, emozioni e del controllo di sé nell'azione (Malara & Zan 2002, 2008). Per la conquista ed il potenziamento di tali abilità viene ampiamente riconosciuta la valenza della *riflessione critica* dell'insegnante.

Già dai primi anni '80 Schön (1983, 1987) teorizza sull'importanza della riflessione dell'insegnante a vari livelli: sull'azione, per l'azione, nell'azione, sostenendo che:

la riflessione su e per l'azione di un insegnante, che guarda criticamente a quello che è accaduto nella pratica e che progetta attività future lo porta ad una crescente consapevolezza di questioni e una teorizzazione di fatti in modo che nel momento di scegliere e di decidere in classe egli è capace di assumere nel vivo della azione decisioni 'colte' (frutto di educazione, ragionate, motivate).

Nel seguito altri studiosi sostengono la valenza della riflessione critica degli insegnanti sulla propria pratica (Mason 1990, 1994, 1998; Jaworski 1998, 2003, 2004, Lerman 2001, Shoenfeld 1998) ma soprattutto delle pratiche di condivisione di tali riflessioni tra insegnanti ed ancor più tra ricercatori ed insegnanti (si vedano ad esempio Borasi & Al. 1999, Ponte 2004, Potari & Jaworski 2003).

In particolare Mason sostiene che la formazione di un insegnante ‘reale’ richiede in lui lo sviluppo di una consapevolezza a vari livelli: dell’azione; della disciplina; del progetto educativo (Mason 1998). Per educare a questa consapevolezza egli indica la pratica della *discipline of noticing*, poiché consente di affinare la capacità della osservazione di sé nel vivo dell’azione, e raccomanda di attuare costantemente tra colleghi condivisioni di validazione delle osservazioni (Mason 2002).

Ancora, Jaworski sostiene l’importanza della “*pratica riflessiva*” la cui essenza è da lei vista come ‘*il rendere espliciti approcci e processi di insegnamento in modo che possano divenire oggetto di minuzioso esame critico*’ (Jaworski 1998). La studiosa definisce la riflessione stessa come “*azione socialmente e politicamente orientata*”, il cui prodotto è la pratica, intesa come “*azione impegnata, frutto di educazione*” (Jaworski 2003). Sostiene l’efficacia delle “*comunità di indagine nell’insegnamento*”, gruppi misti costituiti da insegnanti e da ricercatori, ed enfatizza come la partecipazione al gruppo sia un “*processo del diventare*” che porta l’insegnante *all’assunzione di una identità* (Jaworski 2004)¹.

Il modello da noi attuato per la formazione degli insegnanti ricalca queste concezioni e modalità. Esso tuttavia trae origine dalla tradizione italiana, che affonda le sue radici nei movimenti culturali e nelle pratiche di formazione degli insegnanti sviluppatasi in Italia già dalla fine dell’ottocento, e può dirsi frutto della evoluzione degli studi attuati nelle nostre università nell’ambito dei nuclei di ricerca didattici a partire dagli anni ’70. Le tematiche di tali studi si sono modificate nel tempo passando dai contenuti di insegnamento (anni 70-80) all’apprendimento e alle difficoltà degli allievi (anni 80-90) e attraverso questi allo studio dei processi di insegnamento-apprendimento (per approfondimenti si vedano Arzarello & Bartolini Bussi 1998 o Malara 2002).

Da un punto di vista matematico i nostri studi (su cui torneremo nel §3) sono rivolti all’area aritmetico-algebrica e finalizzati ad una rifondazione del suo insegnamento in chiave relazionale e linguistica nel quadro dell’early algebra. Riguardano la sperimentazione e messa a punto di prototipi di processi di insegnamento-apprendimento su specifiche tematiche, realizzati con modalità costruttive, che mettono a fuoco l’azione dell’insegnante e i comportamenti degli allievi (Fiorini & Al. 2006, Navarra & Al. 2003-2009, Navarra & Al. 2007), ma anche percorsi di formazione di insegnanti

¹ Jaworski afferma anche che attraverso pratiche di indagine e di riflessione congiunte, per il mutuo sostegno che si attua tra insegnanti e ricercatori, si ha un co-apprendimento che contribuisce allo sviluppo sia della pratica che della ricerca. Questo è in sintonia con quanto è avvenuto negli ambienti della ricerca italiana in educazione matematica già dagli anni ’70. Alla Jaworski va riconosciuto il merito di avere oggettivato - attraverso l’introduzione dei costrutti teorici “co-apprendimento” e “comunità di indagine nell’insegnamento”, i processi di interazione tra insegnanti e ricercatori, processi su cui storicamente si è sviluppata la ricerca italiana.

attraverso pratiche di condivisione e di riflessione (Malara & Al. 2004, Malara 2005, Cusi & Malara 2008, Malara & Navarra 2009, Navarra & Al. 2009).

Sulla base dei nostri studi ed anche dell'esperienza maturata nelle scuole di specializzazione per l'insegnamento, in sintonia con risultati della ricerca internazionale, ci siamo convinti che - per promuovere una effettiva riconversione delle usuale modo di concepire ed affrontare l'insegnamento matematico - nelle attività di formazione degli insegnanti, non solo novizi, sia necessario dare spazio all'*analisi fine di processi di classe* (propri o altrui) centrando l'attenzione sull'azione dell'insegnante e sugli effetti delle interazioni con e tra gli allievi, al fine di portare loro a toccare con mano come lo sviluppo della costruzione matematica degli allievi sia fortemente condizionata da linguaggio, atteggiamenti ed azioni dell'insegnante ed a riconoscere e controllare le micro-decisioni che determinano lo sviluppo dell'interazione.

Nel seguito ci soffermeremo su modalità ed esempi di pratiche riflessive da noi attuate in riferimento ad attività di classe in early algebra riportando considerazioni degli insegnanti coinvolti che documentano l'incidenza dell'approccio da noi proposto e la sua significatività ai fini della maturazione di loro nuove consapevolezze. Prima però ci soffermiamo a tracciare un quadro sulle dinamiche culturali che hanno portato alla costituzione dell'early algebra.

2. Sull'early algebra

L'Early algebra è una branca della matematica scolastica, di intersezione tra aritmetica ed algebra, che si è venuta a determinare sulla base degli studi degli ultimi trent'anni rivolti al superamento delle difficoltà di insegnamento-apprendimento dell'algebra. Essa comprende tutte quelle attività di tipo generazionale (Kieran 1996, 2004), necessarie per poter comprendere il senso del formalismo algebrico e degli stessi oggetti dell'algebra.

L'espressione inglese 'Early algebra' non va intesa nel significato letterale di 'algebra precoce', poiché non contempla l'anticipazione a livelli scolari più bassi di attività sintattiche, tipiche della scuola secondaria, ma va piuttosto intesa come 'algebra degli inizi' o 'prima algebra', in quanto punta ad un ridimensionamento dell'insegnamento algoritmico dell'aritmetica per dare spazio ad attività in ambito numerico, di tipo rappresentativo o relazionale, che portino gli allievi a riconoscere analogie, a vedere il generale nel particolare, a costruire schemi unificanti. In altre parole contempla una rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva pre-algebrica.

Nei paesi occidentali ed in quelli di influenza nord americana si va sempre più consolidando nella scuola dell'obbligo - in associazione ad una pratica socio-costruttiva dell'insegnamento - lo spazio da dare all'early algebra. Svaretiati paesi hanno nei loro curricula questo tema, in modo più o meno

esplicito, al punto che di recente sono anche stati svolti studi comparativi delle varie impostazioni (Kieran 2004, Cai & Schmittau 2005, Cai & Al. 2005).

Importanti, circa l'affermarsi dell'early algebra nelle politiche educative dei vari paesi, possono ritenersi le indicazioni dei curricula inglesi (DFE 1995) e soprattutto le proposte del *National Council of Teachers of Mathematics* (NTCM) presenti negli standard 2000 (NTCM 1998, 2000) nonché gli studi esplorativi di implementazione didattica svolti in ambiente USA (si vedano ad esempio Carpenter & Franke 2001, Carpenter & Al. 2003, Carraher & Al. 2000, Carraher 2001, Kaput & Blanton, 2001, 2003).

L'obiettivo è di costruire negli studenti un bagaglio esperienziale che renda sensato e giustificabile ai loro occhi lo studio dell'algebra nei suoi aspetti più formali, facilitandone l'approccio e minimizzando le tipiche e diffuse difficoltà che si incontrano all'ingresso della scuola secondaria superiore.

In Europa, le prime, embrionali, proposte didattiche nello spirito dell'early algebra possono farsi risalire addirittura agli anni '60-'70, quando il movimento strutturalista impone una rifondazione dell'insegnamento sulla base della teoria ingenua degli insiemi, ponendo a fondamento dell'area aritmetico-algebrica il concetto di operazione binaria (basata a sua volta su quello di relazione binaria) e delle sue proprietà, aprendo alla visione degli ambiti numerici, relativizzando a questi il concetto di equazione (forma predicativa da interpretare in un dato ambiente numerico), dando centralità al concetto di funzione tra gli oggetti dell'algebra. Per questo, già dalla scuola elementare, viene dato spazio agli aspetti relazionali del numero, alla valorizzazione delle proprietà aritmetiche per il confronto di rappresentazioni numeriche diverse, allo studio di relazioni in contesti realistici ed in riferimento ad ambiti numerici diversi, con la rilevazione congiunta di dati variabili per coppie di grandezze².

Negli anni '70-'80, anche grazie ai movimenti di democratizzazione degli studi, l'educazione scientifica riceve un forte impulso e viene estesamente promossa una visione della matematica radicata nel reale, più ampia e composita. Questo porta alla valorizzazione dei processi di modellizzazione e ad una maggiore attenzione al linguaggio algebrico come strumento di rappresentazione. Pionieristici al riguardo sono gli studi di scuola inglese, che offrono proposte ed esperienze didattiche in cui si espande l'insegnamento dell'algebra mettendo in campo quello che Bell chiama il ciclo algebrico essenziale '*rappresentare, manipolare, interpretare*', attraverso l'esplorazione di situazioni realistiche in svariati contesti, ma anche interne alla matematica, spesso ludiche, e proiettate verso la giustificazione e la dimostrazione (si vedano ad esempio Bell, 1976, Bell & Al. 1985, Harper 1987).

² Nei primi anni '70 si distingue in Europa il progetto ungherese per la scuola elementare diretto da T. Varga, che prevede attività di questo genere sin dal primo ciclo della scuola elementare. Una versione semplificata di tale progetto, denominata *Progetto Ricme*, viene realizzata in lingua italiana su iniziativa del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR, a cura di, 1979-1981, *Progetto Ricme*, ed. Armando, Roma).

Questa nuova visione tuttavia si viene a scontrare nella pratica con quella dell'algebra tradizionale, dominata dalle attività di manipolazione sintattica, cosa che porta gli studiosi ad affrontare la questione di come superare la divaricazione tra le due visioni. Al riguardo, un importante momento di dibattito si ha all'ICME 7 (Quebec 1992), al working group sull'algebra, nel sottogruppo per la scuola primaria (Linchevski 1995). Partendo dai risultati di studi diagnostici sulle difficoltà nell'apprendimento in algebra (si vedano i survey di Kieran 1989, 1992) si riflette su blocchi ed ostacoli che l'insegnamento dell'aritmetica nella scuola elementare determina e si ribadisce come proprio a quel livello scolare vi sia un'ampia gamma di attività aritmetiche da promuovere ai fini dello sviluppo del pensiero algebrico. In quella sede si oggettiva un nuovo spazio di insegnamento, la *pre-algebra*, finalizzato allo sviluppo di concetti aritmetici evoluti, di tipo strutturale, basilari per l'innesto dei concetti algebrici, più astratti e formali³.

In quegli anni diversi studiosi sottolineano l'importanza che gli studenti vengano portati ad acquistare quello che Arcavi (1994, 2005) chiama '*senso del simbolo*' ossia la maturazione - attraverso svariate tipologie di attività - di abilità, comprensioni, e modi di sentire che inducano gli studenti ad agire con flessibilità ed istintivamente in un dato sistema di simboli, a muoversi attraverso sistemi più ampi o diversi di simboli ed a coordinare interpretazioni di formule in vari mondi risolutivi (Arzarello 1991, Arzarello & Al. 1994, Gray e Tall 1993, Filloy 1990, 1991, Kaput 1991, Lins 1990). In USA si aprono i dibattiti circa '*l'algebrizzazione del curriculum*' a partire dalla scuola materna (Kaput 1995).

La seconda metà degli anni novanta vede un fiorire di studi su questi aspetti sia teorici che sperimentali, rivolti per la maggior parte ad allievi di 11-13 anni (si vedano ad esempio Ainley 1999, Brito Lima & Da Rocha Falcao 1997, Da Rocha Falcão & Al. 2000, Boulton Lewis & Al. 1998, Charraher & Al. 2000, Sadovsky 1999). Alcuni studi si distinguono per la teorizzazione di modelli di sviluppo concettuale in algebra di tipo socio-costruttivo, in cui è enfatizzata l'influenza dell'ambiente classe sull'apprendimento e promosso l'uso di mezzi fisici come strumenti di mediazione semeiotica, il tutto nel quadro di una visione dell'algebra come linguaggio (si vedano ad esempio Da Rocha Falcão 1995, Meira 1990, 1996, Radford & Grenier 1996).

³ Le attività di tipo pre-algebrico indicate si riferiscono allo sviluppo delle capacità di: vedere il generale nel particolare ed a promuovere processi di generalizzazione; rilevare analogie o differenze nella struttura di espressioni aritmetiche attraverso l'analisi dei processi di calcolo rappresentati, considerando l'ordine delle operazioni ed evidenziando il ruolo delle parentesi; risolvere con procedimenti ingenui equazioni, dando spazio a strategie di sostituzione numerica ed a tentativi ragionati e puntando, attraverso la riflessione sulle strategie attivate, alla costruzione di opportuni schemi cognitivi; avviare alla risoluzione di problemi verbali algebrici attraverso procedimenti esplorativi ponte tra metodi aritmetici ed algebrici.

Più tardi Radford (2000), unificando in un ampio quadro teorico studi storico-epistemologici, psicologici, semeiotici e didattici, giunge a caratterizzare l'apprendimento dell'algebra come "l'appropriazione di un nuovo e specifico modo matematico di agire e pensare che è dialetticamente intrecciato con una produzione e un uso nuovo di segni il cui significato è acquisito dagli studenti come risultato della loro immersione sociale in attività di matematica". Lo studioso concepisce i segni "come strumenti o protesi della mente per portare a termine azioni come richiesto dalle attività contestuali in cui gli individui sono impegnati", spostando l'attenzione "da quello che i segni rappresentano a quello che ci "permettono" di fare.

Le problematiche dell'early algebra acquisiscono un interesse via via crescente come testimoniato dal corpo di studi dedicati all'early algebra al 12° Studio ICMI *'The future of the teaching and learning of algebra'* (Cick & Al. 2001), da studi collettivi, quali il forum sull'early algebra al PME 2001 (Ainley & Al. 2001) ed il numero monografico della rivista ZDM *'The development of students' algebraic thinking in earlier grades: Curricular, instructional and learning perspectives'* (ZDM, 2005, 37(1)). Tali studi non affrontano solo questioni di implementazione di attività innovative nella scuola primaria ma affrontano anche il problema della formazione degli insegnanti, (si vedano ad esempio Carpenter & Al. 2001, 2003; Blanton & Kaput 2001, 2003, Dougherty 2001). In questo quadro si collocano i nostri studi su cui qui ci soffermiamo.

3. I nostri studi

I nostri primi studi sul versante dell'early algebra risalgono agli anni '90, e si concretizzano inizialmente in progetti di innovazione nella scuola media, a partire dalla classe prima. I progetti sono realizzati con la collaborazione paritetica di piccoli gruppi di insegnanti e vengono attuati attraverso un'attenta costruzione delle attività di classe e delle prove per gli allievi. I loro risultati si basano principalmente sulla analisi nelle produzioni degli allievi e sulle indicazioni degli insegnanti circa le discussioni matematiche che si sviluppano nella classe⁴ (Malara & Gherpelli, 1997, Malara 1999, Malara & Iaderosa 1999).

I risultati ottenuti rendono evidente, in sintonia a quanto documentato da ricercatori in altri paesi, come la radice di molte difficoltà sia in gran parte dovuta ad una mancata esperienza degli allievi di esplorazioni in ambito numerico, e ci inducono a progettare ed affrontare sperimentazioni con/per

⁴ In questi primi studi il processo di classe viene osservato in modo episodico e limitato, si guarda più agli apprendimenti degli allievi attraverso un'analisi fine dei protocolli; in caso di risultati che si discostano da quanto ipotizzato si discute con gli insegnanti circa le possibili ragioni. Con il procedere degli studi, come sarà reso evidente nel seguito, la nostra attenzione via via si sposta dai risultati degli allievi all'analisi dei processi che li hanno determinati.

allievi della scuola elementare, per costruire in loro un substrato conoscitivo di tipo pre-algebrico.

Questo ci porta alla costituzione del *Progetto ArAl: percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico* (Malara & Navarra, 2003), progetto che propone una rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in chiave relazionale ed un avvio all'algebra di tipo linguistico-costruttivo.

3.1 Il progetto ArAl

L'ipotesi su cui fonda il progetto ArAl è che l'apprendimento del linguaggio algebrico possa svilupparsi in analogia con le modalità d'apprendimento del linguaggio naturale. Quest'ultimo apprendimento è contestualizzato e sperimentale, avviene attraverso una miriade di situazioni che il bambino vive, attraverso le quali si appropria poco alla volta dei significati dei termini del linguaggio e delle regole morfologiche che lo supportano; conoscenze che approfondirà in età scolare attraverso l'apprendimento della lettura e la riflessione sugli aspetti grammaticali e sintattici della lingua. In modi simili, il linguaggio algebrico dovrebbe essere costruito sin dai primi anni della scuola elementare, attraverso esperienze pre-algebriche di tipo aritmetico (come: cogliere, generalizzare ed esprimere relazioni, effettuare e confrontare rappresentazioni, estendere regolarità per analogia, ...). Attraverso una costante riflessione sui processi attivati e sui significati dei segni introdotti gli allievi vengono a sviluppare progressivamente, in un fitto intreccio con l'aritmetica, i modelli mentali propri del pensiero algebrico. Una tale base esperienziale, nel prosieguo, consentirà loro di affrontare e controllare nei significati lo studio astratto delle forme algebriche.

La nostra prospettiva di un approccio all'algebra come linguaggio, con un continuo andirivieni tra aritmetica ed algebra, si basa sulla negoziazione di un contratto didattico basato sul principio *"prima rappresenta, poi risolvi"*. Tale prospettiva sembra molto promettente per affrontare uno dei nodi più importanti nel campo concettuale dell'algebra: la trasposizione in termini di rappresentazione dal linguaggio naturale nel quale sono formulati o descritti i problemi a quello algebrico-formale in cui si traducono le relazioni che essi contengono e successivamente la loro soluzione. Da questo punto di vista, tradurre delle frasi dal linguaggio naturale (o grafico, o iconico) a quello matematico e viceversa rappresenta uno dei territori più fertili all'interno dei quali si possono sviluppare le riflessioni sul linguaggio matematico.

Elementi matematici di base in questo approccio sono: la simmetria del segno 'uguale'; la pluralità di rappresentazioni di un numero; l'oggettivazione delle proprietà delle operazioni aritmetiche dall'analisi delle modalità di risoluzione di problemi, il confronto del valore di espressioni numeriche senza fare calcoli. Attività centrali sono l'individuazione e la rappresentazione algebrica di regolarità e leggi di corrispondenza e la loro composizione in termini formali.

Tutto questo richiede però la ridefinizione di una nuova cultura di classe attraverso la costruzione di un ambiente che stimoli in modo informale l'elaborazione autonoma di quello che noi chiamiamo '*balbettio algebrico*', ossia l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio nel quale le regole vengono a trovare la loro collocazione gradualmente, all'interno di un contratto didattico tollerante verso momenti iniziali sintatticamente promiscui ed aperto alla riflessione su ed al confronto delle rappresentazioni attivate.

Un esempio.

In una quarta elementare (9 anni) si stanno esplorando situazioni problematiche nelle quali si tratta di *individuare relazioni esistenti fra due quantità*. Per contratto, inizialmente gli alunni esprimono verbalmente le relazioni individuate, confrontano collettivamente le varie formulazioni e ne scelgono una, poi affrontano la codifica algebrica di essa. In una di queste situazioni, coinvolgenti quantità variabili di due diversi tipi di biscotti: savoiardi e pan di stelle, gli allievi giungono a questa legge di corrispondenza: '*Il numero dei savoiardi è 1 in più del doppio del numero dei pan di stelle*'. Il lavoro individuale di traduzione della frase in linguaggio algebrico conduce a queste proposte:

- | | | |
|------------------------|--|--------------------------|
| (a) 1×2 ; | (b) $a+1 \times 2$ (a = n. dei savoiardi); | (c) $sv+1 \times 2$; |
| (d) $ax+2+1$; | (e) $sv+1 \times 2=a$; | (f) $sv=st+1 \times 2$; |
| (g) $a=b \times 2+1$; | (h) $ax+2+1=b$ (a = n. dei pan di stelle); | (i) $(a-1) \times 2$ |

Nel pieno dell'attività, l'insegnante deve interpretare ciascuna scrittura, captando l'idea seguita da ogni allievo, orchestrare la discussione sull'interpretazione delle scritture riflettendo con gli allievi sulla loro correttezza, sulle eventuali equivalenze, sull'individuazione delle traduzioni più appropriate.

In questo approccio l'elemento chiave è l'insegnante, occorre infatti che egli attui una didattica che consenta l'affermarsi di un'autentica attività matematica socialmente condivisa, in cui si dia grande spazio agli aspetti linguistici, di rappresentazione di dati e processi, ed a quelli meta-cognitivi per il controllo della pertinenza ed adeguatezza delle rappresentazioni, per il riconoscimento e l'identificazione di quelle equivalenti e per la selezione di quelle ottimali.

Tutto questo richiede una profonda ristrutturazione delle concezioni degli insegnanti sia sul versante dei contenuti da insegnare sia su quello metodologico-didattico nella classe e comporta una vera e propria cultura del cambiamento.

Per promuovere un tale cambiamento la nostra ipotesi di lavoro è quella di portare a loro volta gli insegnanti ad essere immersi in un 'ambiente' nel quale loro stessi possano divenire artefici di un loro nuovo modo di operare, impegnandosi in modo attivo e (ri)costruendo la loro professionalità docente attraverso scambi di studi, esperienze e riflessioni a tutto campo.

3.2. Corpus teorico del progetto

Il corpus teorico del progetto ArAl è oggi costituito da un volumetto che raccoglie il quadro di riferimento ed il glossario e da una serie di volumetti, *le unità* (Navarra & Al., 2003-2009, Fiorni & Al. 2006, Navarra & Al 2007), che raccolgono il distillato di studi sperimentali su percorsi didattici innovativi in

early algebra. Nel quadro teorico si affrontano ed amplificano questioni, sia di tipo matematico che metodologiche didattiche, come quelle sopra indicate, il cui studio è supportato dal glossario, sui cui brevemente ci soffermiamo.

3.2.1. Il ruolo del glossario ArAl nella formazione dell'insegnante

Il Glossario - costituito attualmente da circa un centinaio di termini - rappresenta un sistema di riferimento che consente all'insegnante di pervenire gradualmente ad una visione d'insieme dell'early algebra, che coniughi fra loro teoria e prassi, accostandosi ad una concezione linguistica dell'algebra all'interno della quale costruire assieme agli allievi un convincente controllo dei suoi significati.

Il Glossario è strutturato in modo da non prefigurare approcci pre-definiti ai termini che lo compongono. L'insegnante ha di fronte a sé una pluralità di percorsi che è libero di esplorare autonomamente, in base alla sua formazione, ai temi che intende affrontare, alla sua curiosità, e così via. Ogni termine del Glossario è descritto da un testo che contiene altri termini chiave, il cui insieme viene a costituire una Rete più o meno estesa di termini in connessione tra loro.

Un termine del glossario può godere di una Rete molto numerosa ma può essere citato in poche Reti. Viceversa un altro termine può possedere una Rete poco numerosa ma essere presente in molte altre Reti. Ogni termine, quindi, a seconda della numerosità della sua Rete e a quella delle sue occorrenze, pone il docente all'interno di un doppio processo di approfondimento e di estensione concettuale: approfondimento del termine, attraverso le relazioni fra i termini-chiave che compaiono nella sua definizione; estensione, in quanto ognuno di essi è un potenziale stimolo alla lettura della chiarificazione del suo significato.

I termini del Glossario sono riconducibili a cinque aree:

- **GENERALE:** mediatore didattico, Opaco/trasparente (rispetto al significato), Pensiero relazionale, Processo/Prodotto, Rappresentare/Risolvere, ...
- **LINGUISTICA:** Argomentare, Balbettio algebrico, Linguaggio, Lettera, Metafora, Parafrasi, Semantica/Sintassi, Tradurre. ...
- **MATEMATICA:** Codifica formale, Forma additiva, Forma canonica/Non canonica, Forma moltiplicativa, Frase Matematica, Funzione, Incognita, Pseudo equazione, Relazione, Segno uguale, Struttura, Variabile, ...
- **SOCIO-DIDATTICA:** Condivisione, Confronto collettivo, Contratto didattico, Discussione, mediazione sociale, Negoziazione, ...
- **PSICOLOGICA:** Interferenza affettivo-emotiva, Percezione, ...

L'insegnante deve imparare a promuovere e a gestire le cinque aree acquisendo la consapevolezza che:

(a) la costruzione delle conoscenze avviene attraverso la promozione nella classe di *dinamiche sociali* che favoriscano il *confronto* e la *verbalizzazione*;

(b) l'individuazione di opportuni *mediatori didattici* è determinante per una conquista stabile di *significati*;

(c) è necessario promuovere attività che esaltino gli aspetti *metacognitivi* e *metalinguistici*.

Alcuni termini del Glossario, che l'insegnante incontra in ogni caso, indipendentemente da come organizzi la sua esplorazione, possiedono Reti e Occorrenze più numerosi degli altri. Ciò attribuisce loro uno *status di forte rappresentatività nella definizione dell'early algebra come disciplina*. e permette di comporre, attraverso di essi (in grassetto nel testo) una sorta di manifesto:

Il quadro teorico dell'*early algebra* supporta l'ipotesi che il controllo debole da parte degli studenti sui significati dell'algebra abbia la sua origine nei modi nei quali si cominciano a costruire le conoscenze aritmetiche nella scuola elementare.

L'algebra dovrebbe essere insegnata come un nuovo **linguaggio** di cui ci si impadronisce – attraverso un insieme di pratiche **sociali** condivise (la **discussione collettiva**, la **verbalizzazione**, l'**argomentazione**) - con modalità analoghe a quelle dell'apprendimento del linguaggio naturale: iniziando dai suoi significati (aspetti **semantici**) e collocandoli gradualmente nella loro impalcatura **sintattica** (processo che abbiamo chiamato **balbettio algebrico**).

Elementi determinanti a questo scopo sono le **metafore**, **mediatori** didattici nella conquista dei significati nel corso della progressione concettuale verso la generalizzazione e la modellizzazione.

In questa prospettiva, il linguaggio naturale costituisce il più importante mediatore dell'esperienza dello studente e il suo principale strumento di **rappresentazione** attraverso il quale illustrare il sistema delle **relazioni** (tra le prime le **additive** e le **moltiplicative**) fra gli elementi di una situazione problematica, spostando l'attenzione dal **prodotto** al **processo** e inducendo la sua **traduzione** in una **frase** matematica.

In questo modo, l'attenzione viene spostata dall'obiettivo *aritmetico* del **risolvere** a quello *algebrico* del **rappresentare**. I mediatori favoriscono allo stesso tempo la conquista dell'uso della **lettera**, vista nelle sue accezioni di **incognita**, più facilmente conquistabile, di **indeterminata** e di **variabile**.

Per approfondimenti sulla struttura e potenzialità del glossario rinviamo a Malara & Navarra (2008); ci soffermiamo adesso ad illustrare quello che possiamo considerare lo strumento base del progetto educativo sia per l'attività di classe che per la formazione degli insegnanti: le Unità ArAl.

3.2.2. Le unità ArAl

Le Unità, booklet monotematici su esperienze di early algebra, costituiscono dei modelli di processi di insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica, da svolgersi nel lungo termine. La loro messa a punto per la pubblicazione avviene attraverso un processo che dura circa tre anni e costituisce il frutto del raffinamento progressivo di sperimentazioni nelle classi, di analisi delle loro audioregistrazioni, di confronti di riflessione tra ricercatori universitari ed insegnanti.

Le unità sono strutturate in modo da descrivere - nella colonna di sinistra di ogni pagina - una successione ragionata di sintesi di percorsi didattici e da rendere trasparenti - in quella di destra - gli aspetti, desunti dallo studio analitico dei processi sperimentali, che possono aiutare gli insegnanti nella sua applicazione (scelte metodologiche, dinamiche di classe attivate, elementi chiave dei processi, estensioni, comportamenti potenziali degli alunni, difficoltà che si possono incontrare, e così via).

L'obiettivo di fondo delle unità è quello di offrire agli insegnanti - prima che dei percorsi didattici - spazi per la riflessione sulle loro conoscenze e sul loro *modus operandi* nelle classi.

Le situazioni riguardano esplorazioni su: griglie di numeri, torri di mattoni numerici, collane a più colori con vari moduli di perle, situazioni di equilibrio sulla bilancia a due piatti, giochi da tavolo di traduzione tra linguaggio naturale o formale, ecc. Grazie a tali esplorazioni gli allievi si avvicinano all'uso delle lettere, attivano la costruzione e l'elaborazione di prime espressioni algebriche, costruiscono e risolvono equazioni riflettendo sui processi soggiacenti, interpretano il significato di scritture formali in relazione a specifiche questioni. Acquisiscono così un modo algebrico di guardare all'aritmetica.

Le situazioni si sviluppano in ambienti didattici stimolanti ma spesso non facili da gestire, e comportano per gli insegnanti numerosi aspetti delicati che coinvolgono altrettante competenze. Essi si trovano così in primo luogo a fare i conti con le loro conoscenze e le loro convinzioni, e allo stesso tempo con un contorno di aspetti metodologici e organizzativi tutt'altro che secondari.

3.3. Il progetto ArAl e gli insegnanti

Il progetto ArAl si articola e sviluppa come *sistema formativo integrato*: gli insegnanti, attraverso seminari e incontri di approfondimento, partecipano alla progettazione delle attività da sperimentare nelle classi, alla redazione dei verbali relativi alla sperimentazione e alla periodica valutazione delle attività.

Strumenti, metodi ed attività messi a punto in seno al progetto hanno la funzione di sostenere gli insegnanti nel proporre alle classi attività di early algebra con modalità socio costruttive, e di formarli come *insegnanti metacognitivi* attraverso la riflessione sulla loro azione di classe. Si punta ad obiettivi su due versanti:

- degli allievi: l'obiettivo è quello di analizzare le condizioni attraverso le quali questi ultimi, sin dalla 4-5 elementare riescono, a un primo livello a generalizzare, a formulare proprietà e produrre rappresentazioni formali, a risolvere problemi algebrici... e, ad un secondo livello, a conquistare il significato delle scritture algebriche e la consapevolezza della loro forza espressiva;
- degli insegnanti: un primo obiettivo è quello di affinare la loro capacità nel condurre la classe nell'approccio all'early algebra secondo queste modalità, un secondo obiettivo è quello di favorire la loro crescita attraverso stimoli

derivanti dalla partecipazione a progetti di collaborazione, almeno biennali, caratterizzati dall'immersione in una comunità di indagine sulla propria pratica, in un continuo gioco di *riflessione, confronto, condivisione*.

Nella rete di istituti afferenti al progetto⁵ si configurano, a seconda del ruolo svolto, quattro tipologie di insegnante: insegnante ricercatore (IR); insegnante ricercatore in formazione (IRF); insegnante sperimentatore (IS); insegnante utilizzatore (IU).

Gli insegnanti ricercatori sono docenti di scuola secondaria, membri storici del gruppo di ricerca (GREM), che hanno raggiunto l'effettivo status di ricercatori (pubblicano in proprio articoli, relazionano a convegni e vengono assegnati loro anche ruoli di coordinamento e/o di revisione scientifica). La loro figura è peculiare della ricerca italiana, non esistendo – o essendo debole - in altre realtà europee e rappresenta una importante cerniera fra il mondo della ricerca e quello della scuola (Malara & Zan 2002). Su specifiche tematiche in studio essi concorrono alla definizione del quadro teorico, alla progettazione di materiali e attività, alla loro verifica, all'analisi dei processi, agiscono da modello nelle attività di compresenza nella scuola primaria.

Gli insegnanti ricercatori in formazione sono insegnanti in servizio, prevalentemente di scuola secondaria di primo grado, venuti in contatto con il GREM o perché vincitori di stage di formazione alla ricerca nell'ambito di convenzioni tra MIUR e Dipartimenti di Matematica Italiani o mediante la scuola di specializzazione all'insegnamento. Tra questi vi sono diversi giovani desiderosi di approfondire la loro preparazione sul versante teorico e dell'osservazione di classe. Negli ultimi anni il loro numero ed il loro ruolo è venuto via via a consolidarsi tanto da configurarsi oggi come una importante componente del progetto, per il modo nuovo e vitale con cui si muovono a livello sia teorico (redazione di survey, conduzione di seminari, etc) sia pratico (orchestrazione delle discussioni, controllo e riflessione sul processo attuato). Documentazioni al riguardo si trovano in Malara & Al. (2004), Czarnocha (2008), Turnau (2008).

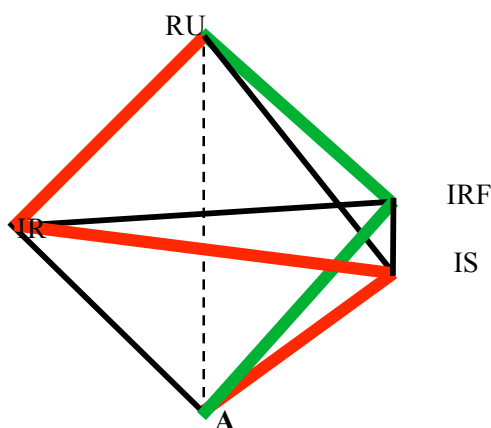
Gli insegnanti sperimentatori appartengono in prevalenza alla scuola primaria e rappresentano la componente più numerosa. Questi lavorano in stretto rapporto con gli insegnanti ricercatori osservano la classe, collaborano alla stesura di diari, alla analisi di protocolli degli allievi, etc, contribuiscono alla chiarificazione e messa a punto dei percorsi didattici anche grazie alle loro riluttanze, dubbi o difficoltà.

Gli insegnanti utilizzatori rappresentano una componente relativamente recente e sono una conseguenza della diffusione del progetto su scala nazionale.

⁵ Il progetto è supportato sul versante delle sperimentazioni da una rete di scuole, presenti in 11 regioni su 19. Nel triennio 2006-2009 ha coinvolto 429 insegnanti, e 8116 allievi, di cui 309 insegnanti e 5600 allievi di scuola primaria, e 120 insegnanti e 2516 allievi di scuola secondaria di primo grado.

Sono docenti di scuole che utilizzano Unità ArAl e richiedono un rapporto di collaborazione con il GREM. Costituiscono una componente per la quale si sono avviate modalità di utilizzo delle nuove tecnologie per l'interazione a distanza.

Per l'apporto di queste diverse componenti, la struttura metodologica del progetto ArAl è variegata e complessa. Questo il suo modello attuale, a cui fanno da sfondo le nuove tecnologie, che significativamente supportano la fitta rete di scambi, proiettano il progetto al mondo esterno e aprono nuovi scenari ad esso.



I tratti in grassetto del modello evidenziano i rapporti privilegiati: quello IR-IS, quello RU-IR e quello RU-IRF, che sono dialogici e fiduciosi.

3.4. La metodologia ArAl

Con il maturare dei nostri studi l'attenzione si viene sempre più a rivolgere verso i processi di classe e verso l'azione dell'insegnante.

Le modalità di lavoro che si attuano, via via più evolute, sono finalizzate ad indurre gli insegnanti ad oggettivare i loro processi didattici per poter meglio valutarne i risultati ed a riflettere attorno a processi (propri o altrui) secondo tre punti di vista: *lo sviluppo della costruzione matematica degli allievi, l'azione dell'insegnante, la partecipazione dei singoli nelle costruzione collettiva delle conoscenze*. Si opera in modo che essi stessi divengano consapevoli della valenza della registrazione delle discussioni di classe per l'analisi delle dinamiche di costruzione collettiva dei saperi in gioco.

Attualmente nel condurre una sperimentazione si chiede agli insegnanti di trascrivere le discussioni, focalizzando l'attenzione sui momenti decisionali, di snodo della loro azione, commentandone gli esiti. Si invogliano scambi in autonomia tra insegnanti (di solito tre o quattro) coinvolti nelle stesse sperimentazioni. Ciascuna discussione di classe viene prima analizzata congiuntamente dall'insegnante e dal mentore che lo affianca (di solito un insegnante ricercatore) - cosa che dà luogo ad un fitto ed ampio scambio di

commenti e riflessioni sulla evoluzione del processo. Le analisi vengono svolte guardando alle interrelazioni tra comportamenti dell'insegnante e conoscenze costruite dagli allievi. Attraverso tale analisi vengono individuate modalità ottimali per la costruzione dei concetti o, più frequentemente, la genesi di ostacoli o di deviazioni rispetto alle previsioni dei docenti, e vengono evidenziati aspetti critici circa decisioni e comportamenti dell'insegnante nello sviluppo del processo.

Si svolgono inoltre sessioni comuni di analisi comparativa dei percorsi individuali dove gli elementi salienti di ciascuno vengono globalmente discussi.

Questa metodologia permette di condurre l'attività su tre livelli distinti ma concomitanti (*ricerca – sperimentazione – formazione*), affrontando questioni fortemente intrecciate fra concezioni e atteggiamenti personali da un lato e metodologie didattiche dall'altro. In particolare permette all'insegnante di collegare criticamente tre nodi: la propria concezione dell'argomento matematico in gioco (e della stessa matematica); il conflitto indotto dall'incontro-scontro con le modalità didattiche attuate dai colleghi e dai risultati da loro raggiunti; la mediazione fra questi due nodi prodotti dal confronto collettivo e dalla relazione dialogica con i ricercatori.

4. Strumenti e processi per la formazione degli insegnanti in early algebra

La nostra ricerca, condotta *con/per* gli insegnanti e mirata ad un approccio socio costruttivo dell'insegnamento dell'algebra, ci ha resi consapevoli delle difficoltà che essi incontrano sia nella progettazione che nella conduzione delle *discussioni di classe*. I nostri studi hanno inoltre messo in evidenza come, nello sviluppo di una discussione, gli insegnanti spesso assumono atteggiamenti non adeguati, che ricalcano il modello trasmissivo, che li portano a: non rendere gli studenti partecipi delle finalità del problema o delle conclusioni da raggiungere; non dare spazio ad interventi potenzialmente produttivi da loro non previsti, ratificare immediatamente la validità di interventi significativi senza rilanciare alla classe la loro validazione.

Per queste ragioni abbiamo concepito alcune modalità di intervento che hanno dato luogo a strumenti per formazione degli insegnanti in early algebra. Si tratta dei '*diari dell'insegnante multicommentati*' e delle '*analisi critico-previsionali di scene di classe*'. Nei prossimi paragrafi ci soffermeremo su di essi riportando anche riflessioni e idee espresse dagli insegnanti sulla loro valenza formativa.

4.1. I diari dell'insegnante multi-commentati

In occasione di esperimenti realizzati nell'ambito di recenti progetti, come il progetto europeo PDTR⁶, si è scelto di *oggettivare lo studio del processo*

⁶ Il progetto PDTR (*Transforming Mathematics Education through Teaching-Research Methodology*) si è svolto negli anni 2005-2008 sotto il coordinamento di S. Turnau

attraverso la redazione di commenti incrociati plurimi (di insegnante, mentori, e responsabile) delle trascrizioni di classe. Tali oggetti, detti da noi ‘diari dell’insegnante multi-commentati’ o più brevemente ‘diari’, costituiscono degli strumenti ricchissimi per la formazione che consentono di raggiungere vari obiettivi.

Un primo obiettivo è lo sviluppo di una maggiore competenza degli insegnanti sul piano della azione di classe. Il portarli ad osservare l’influenza sulle interazioni di classe di importanti micro-variabili (modo di porre domande, interventi cruciali e di indirizzo in una discussione, (mis)interpretazioni degli allievi, atteggiamenti individuali o di gruppo...). li induce ad esercitare un maggior controllo sui propri comportamenti e stili comunicativi ed ad affrontare con maggior consapevolezza situazioni impreviste.

Un secondo obiettivo è la selezione di documenti di processo significativi rispetto a:

- la *costruzione matematica* (visioni del problema da parte degli allievi, interventi chiave, incidenza delle conoscenze, ...);
- i *comportamenti dell’insegnante nel processo di costruzione* (coordinamento e ascolto degli allievi, vie comunicative, capacità di ‘improvvisazione’ ...);
- *il controllo della classe come sistema sociale* (partecipazione, sviluppo di una ‘intelligenza collettiva’, reti di interazione, dinamiche affettivo-relazionali, ...)

Un terzo obiettivo riguarda la *messa a punto di strumenti per la formazione* - da utilizzarsi in attività di tirocinio, dirette o a distanza, in special modo con insegnanti novizi – in riferimento alla gestione delle discussioni matematiche di classe.

I commenti di analisi che corredano (quasi riga per riga) una trascrizione rendono il processo trasparente a tutto campo. Questi evidenziano nel loro intreccio: aspetti di contenuto (l’impostazione data all’esplorazione del problema, gli aspetti matematici sviluppati, gli obiettivi perseguiti o disattesi, ...); aspetti riguardanti la comunicazione ed il linguaggio utilizzati (formulazione delle domande poste, espressioni interlocutorie usate, indirizzi operativi espressi, ...); questioni relative al controllo della partecipazione degli allievi (numerosità e tipologia degli interventi) e del contratto didattico attuato (atteggiamenti indotti negli allievi, e norme socio-matematiche nella classe).

Come riportato in Malara (2008), cui rinviamo per approfondimenti, i caratteri dei commenti che emergono dai diari portano alla individuazione di cinque aree chiave, interconnesse, precisamente:

(Università di Rzeszów, Polonia) con il supporto di B. Czarnocha e l’expertise di H. Broekman, J. Mason, N.A. Malara. Ha coinvolto sette team di insegnanti di matematica, apprendisti in “teaching-research”, di Polonia, Portogallo, Spagna, Ungheria, Italia.

1. *Questioni culturali e/o didattiche generali* (es. concezione dell'aritmetica e dell'algebra, concezione dell'insegnamento e degli allievi, concezioni sulla significatività o centralità di certi argomenti).
2. *Questioni matematiche e matematico - didattiche* (es. le successioni: cosa sono, come insegnarle, come rappresentarle, quali nodi didattici pongono?).
3. *La divaricazione tra teoria e pratica* (es. la difficoltà di mettere in opera quanto progettato e di lavorare in termini costruttivi in un'ottica relazionale).
4. *Questioni linguistiche* (il prevalere di espressioni linguistiche operative frutto del modello di insegnamento ricevuto, il difficile conflittuale equilibrio tra linguaggio colloquiale e linguaggio dell'insegnamento scientifico; lo scarsa attenzione alle parafrasi verbali ai fini della traduzione algebrica).
5. *La gestione delle discussioni di classe* (il prevalere di dialoghi insegnante-allievo; le diffuse imbeccate; le domande di conferma (si/no); la mancanza di attenzione per lo sviluppo di una 'intelligenza sociale' nella classe).

Cruciali e drammatiche appaiono due questioni che riguardano: *il linguaggio dell'insegnante* nella comunicazione, spesso gergale, approssimato e poco corretto, ricco di metafore non sempre pertinenti; *la concezione della matematica*, troppo spesso operativa per il prevalere del 'calcolare' sul 'rappresentare', il 'fare' sul 'ragionare' o 'riflettere'.

I diari commentati si configurano come una vera e propria 'radiografia' dell'insegnante, di fronte alla quale si possono manifestare salutari momenti di crisi, seguiti quasi sempre da positive reazioni di sfida verso se stesso, che lo portano ad agire per una riconversione della sua professionalità. Riportiamo qui un brano tratto da Fantini & Lugli (2008) che testimonia dell'impatto sugli insegnanti della metodologia dei diari pluri-commentati

La rilettura delle trascrizioni arricchite di commenti e suggerimenti ha, infine, permesso una seria e autentica autovalutazione sulla propria professionalità, una metariflessione critica sul proprio modo di condurre la discussione collettiva, sul proprio modo di rilanciare i suggerimenti dei ragazzi, di intervenire o di indirizzare, a volte anche in modo categorico, la discussione. Riflessione che ha portato successivamente ad una maggior consapevolezza professionale: in particolare è emersa la necessità di affinare la capacità di cogliere significativamente il feed-back immediato dei ragazzi senza perdere di vista lo scopo del percorso intrapreso. Maggior consapevolezza è stata poi raggiunta circa la propria mediazione didattica e soprattutto sull'importanza che riveste il linguaggio specifico e la mediazione tra linguaggio specifico e linguaggio naturale. E' emerso come particolarmente significativo sia il ruolo dell'insegnante che in una discussione collettiva deve saper rilanciare e valorizzare gli interventi dei ragazzi, non deve lasciar trasparire giudizi di valore cercando di mantenere coerenza tra linguaggio verbale e non verbale, deve saper lasciar spazio alla dialettica del gruppo pur continuando a orientare la lezione, deve saper offrire ai ragazzi occasione

per riflettere continuamente sulle idee, sulle opinioni, sugli errori e sui successi conseguiti insieme.

Passiamo adesso ad un secondo strumento, specificamente adottato nella formazione iniziale degli insegnanti per la scuola secondaria inferiore.

4.2. 2. L'analisi critico-previsionale di scene di classe

Si tratta di un *modello di compito* per attività laboratoriali che dà agli insegnanti la possibilità di confrontarsi anche in una prospettiva teorica con la pratica dell'insegnamento costruttivo e li guida a concentrarsi sugli aspetti *previsionali* e su quelli collegati alla *riflessione sui processi di classe*.

Il compito si sviluppa solitamente in cinque o sei *scene strutturate come un insieme connesso di prove* e in una *riflessione finale*. Le scene si basano su estratti di trascrizioni di classe tratti dalle nostre sperimentazioni. Ogni scena si riferisce ad un'attività parzialmente autonoma rispetto alle altre e colloca l'insegnante in formazione in modo 'realistico' in una situazione di classe. Si compone di due sezioni: (I) la prima presenta una sintesi della trascrizione; (II) la seconda pone delle questioni, relative alla sintesi, nelle quali si chiede agli insegnanti di esprimere la loro opinione sulla significatività del compito proposto alla classe, di formulare ipotesi sulle produzioni, sulle affermazioni, sulle difficoltà degli alunni, di produrre esempi di discussioni 'immaginate' attorno al confronto collettivo dei protocolli. Nel loro insieme le Scene pongono quindi l'insegnante in formazione di fronte a un *processo di classe simulato*.

Gli insegnanti ricevono le scene in sequenza, ad intervalli regolari di tempo (in media 20-30 minuti). Quando lavorano attorno alla prima scena non conoscono ancora la seconda; quando elaborano la seconda non conoscono la terza e così via sino alla conclusione della prova. Dopo aver analizzato l'input proposto nella prima parte di ogni scena, l'insegnante formula delle ipotesi sulle reazioni della classe; nella scena seguente confronta le sue ipotesi con ciò che è davvero accaduto nel prosieguo dell'attività e così via fino all'ultima scena. Alla fine del percorso viene chiesta una riflessione a due diversi livelli: sull'attività didattica in sé e sulla significatività del compito in relazione allo sviluppo professionale di un docente.

Questo genere di compito si è sviluppato nel tempo e può essere visto come il *risultato di un processo di ricerca*: da una prima idea di produrre materiali di lavoro interconnessi e da utilizzare anche nella formazione a distanza alla loro successiva trasposizione in veste di *compito* per i laboratori metodologico-disciplinari per insegnanti in formazione.

Riportiamo in Tavola 1 un esempio di compito relativo ad una situazione problematica riguardante la modellizzazione di informazioni di tipo funzionale espresse verbalmente e l'attivazione ed interpretazione di loro composizioni per dedurre altre informazioni. Un altro esempio di compito, riguardante l'individuazione di regolarità e leggi di corrispondenza, corredato dai risultati

della sua proposizione ad insegnanti in formazione, è riportato in Malara & Navarra (2009).

Tavola 1

Un esempio di compito di analisi critico-previsionale

I Scena di classe

L'insegnante presenta agli allievi una vignetta dove cinque ragazzi danno informazioni di tipo relazionale sul numero dei loro pacchetti di figurine.

Queste le espressioni:

Alessandro: *io ho alcuni pacchetti di carte Magic.*

Luca: *i miei pacchetti sono il doppio di quelli di Alessandro.*

Giovanni: *io ho due pacchetti più di Marco.*

Marco: *io ho otto pacchetti più di Luca e due meno di Giovanni.*

Federica: *io ne ho la metà di Giovanni cioè cinque più di Alessandro.*

Il compito degli allievi è di tradurre le informazioni in linguaggio algebrico.

Consegna ai docenti per l'analisi: Ipotizzate possibili traduzioni dei ragazzi e loro difficoltà.

II Scena di classe

L'insegnante trascrive alla lavagna vari gruppi di traduzioni degli allievi e apre la discussione. Queste le traduzioni riportate:

Alessandro = $Fe - 5$	$Pm_l = PmA \cdot 2$	$A = p?$	$L = A + A$ (*)
Luca = $Al \times 2$	$PmM = 8 Pm + L2Pm$	$GL = pA \times 2$	$G = M - 2$
Marco = $Lu + 2$	$PmF = 1/2G + 5A$	$F = pG/2 + pA + 5$	$M = L + 8$ e $G + 2$
Giovanni = $Ma + 2$		$G = pM + 2$	$F = G : 2$ e $F = 5 + A$
Federica = $Gio 2$			

(*) L'autore scrive "le lettere sono i pacchetti dei bambini che hanno quei nomi"

Consegna ai docenti per l'analisi: 1. Commentate ciascun gruppo di frasi in relazione alla loro correttezza ed esprimete i processi di pensiero che secondo voi le hanno ispirate. 2. Ipotizzate un canovaccio di discussione per il loro studio (apertura, passi chiave, fine)

III Scena di classe

Nella discussione si cancellano le codifiche imprecise, si decide di usare le lettere minuscole e di introdurre la legenda. Questo è quello che appare sulla lavagna:

$a = n^\circ$ pacchetti di Alessandro; $l = n^\circ$ pacchetti di Luca; $g = n^\circ$ pacchetti di Giovanni; $f = n^\circ$ pacchetti di Federica.

Traduzioni: $l = 2a$; $g = m + 2$; $m = l + 8$ e $m = g - 2$; $f = g : 2$ e $f = 5 + a$

L'insegnante propone: «Confrontate tra loro le informazioni. Quali altre informazioni potete ricavare». E per chiarire la consegna aggiunge «Cosa vuol dire "Ricavare altre informazioni?"»

Intervengono gli allievi

Matteo: trovare il risultato, cioè il numero di pacchetti per ogni bambino
 Francesca: Secondo me bisognerebbe avere il numero totale di pacchetti
 Stefania: forse basterebbe sapere il numero di pacchetti di Alessandro per trovare tutti
 Rita: sono d'accordo con Stefania, se ho i pacchetti di Alessandro moltiplico per due e ho quelli di Luca, se ho i pacchetti di Luca aggiungiamo 8 e troviamo quelli di Marco
 Simone: Adesso che abbiamo il numero dei pacchetti di Marco aggiungiamo 2 e troviamo quelli di Giovanni, poi facciamo il numero di pacchetti di Giovanni diviso 2 e troviamo quelli di Federica
 Insegnante: per trovare il numero di pacchetti di Federica è necessario trovare quello dei pacchetti di Giovanni?
 Stefania: per trovare il numero di pacchetti di Federica potrei anche scrivere una specie di espressione: $f = (m+2) : 2$ perché può anche essere scritto così
 Insegnante: siete d'accordo?
 Stefania: E' giusto perché se $g = m + 2$ e $f = g : 2$ è anche $f = (m+2) : 2$
 Rita: Stefania ha trovato un altro modo per dire quanti pacchetti ha Federica, è un'informazione nuova, che ha trovato mettendo insieme due vecchie
 L'Insegnante rilancia : «Possiamo trovare altre informazioni nuove? »

Consegna ai docenti per l'analisi: Esaminate il brano di discussione e fate i vostri commenti. In risposta all'ultima proposta dell'insegnante ipotizzate comportamenti e difficoltà degli allievi.

IV Scena di classe

Queste sono le nuove informazioni trovate dagli allievi

$f = (m + 2) : 2$; $l = (f - 5) \times 2$; $f = (a \times 2 + 10) : 2$; $a = (g : 2) - 5$; $a = (m - 8) : 2$
 $f = l : 2 + 5$; $l = (g : 2 + 5) \times 2$; $m = (f \times 2) - 2$.

Consegna ai docenti per l'analisi: Studiate le uguaglianze ed esplicitate il concatenamento di informazioni da cui derivano mettendo in luce eventuali relazioni tra di esse. Ipotizzate un canovaccio di discussione per enucleare le formule che permettono di trovare il numero di pacchetti di tutti gli altri in funzione del numero di pacchetti di uno degli amici. Come continuereste il lavoro attorno a questa situazione?

Riflessioni conclusive

Scrivete una breve riflessione sulla situazione didattica che vi è stato chiesto di analizzare anche in base alla sua eventuale riproducibilità in una vostra classe. Scrivete una breve riflessione conclusiva sulla struttura di questa prova in relazione soprattutto alla sua significatività come modello di compito che aiuti dei docenti in formazione ad esplorare ciò che hanno appreso sia a livello matematico che pedagogico

4.2.1 Visioni degli insegnanti sull'attività di analisi critico-previsionale

La struttura del compito in 'scene' viene considerata dagli insegnanti una simulazione efficace del contesto classe che - grazie ad un confronto *passo passo*

con quanto effettivamente avvenuto - consente di riconsiderare la propria azione pedagogica adattandola via via alla situazione ed anche a concepire eventuali 'cambi di rotta'.

Le ipotesi sull'azione di classe sono vissute dagli insegnanti come compiti molto impegnativi, ma i meccanismi concettuali che esse attivano e le riflessioni alle quali conducono sono potenti.

Viene riconosciuta la sua validità come mezzo per affinare la loro consapevolezza verso la necessità costante di una *rilettura critica delle loro conoscenze* e la comprensione dell'importanza di un'educazione anticipata al pensiero algebrico impostata sulla costruzione di *significati*. Questo è ben evidenziato dalle seguenti dichiarazioni di specializzandi per l'insegnamento di matematica e scienze nella scuola secondaria inferiore (classe A059):

La tipologia di prova è molto positiva. Non saper cosa mi aspettava dopo mi ha costretto a ragionare maggiormente e a vagliare tutte le possibilità che mi venivano in mente. Le scene successive invece si possono utilizzare come conferma o meno del ragionamento fatto e permettono di analizzare a livello meta ciò che abbiamo sviluppato e acquisito come nostro nella scena precedente. (E M)

Credo sia molto utile abituarsi a riflettere (livello metacognitivo) sulla situazione didattica concreta cercando di pianificare l'azione pedagogica in funzione delle possibili risposte della classe, sfruttando ogni intuizione/errore degli alunni per arrivare ad una costruzione della conoscenza il più possibile condivisa. (DG)

Ragionare sulle varie possibilità che si possono verificare durante una lezione permette innanzi tutto di essere pronti ad ogni 'cambio di rotta' e, inoltre, di capire che i ragazzi hanno diversi stili cognitivi e che non sempre la nostra risposta sia l'unica possibile. In questo modo si è anche più disposti a mettersi in discussione e a criticare il proprio operato in prospettiva di un miglioramento. Nella classica lezione frontale non si ha mai un ritorno in questi termini. (L O)

Viene evidenziato come la prova forzi l'insegnante a prevedere i comportamenti degli allievi:

Questa prova può aiutare ad immedesimarsi nel modo di pensare degli allievi, a tenere in considerazione aspetti che spesso si danno per scontati ed a prevedere sviluppi 'insoliti' (spesso le reazioni degli studenti non sono quelle che noi ci aspettiamo). (S A)

La prova è sicuramente significativa perchè aiuta i docenti a comprendere i meccanismi messi in atto dagli allievi e le situazioni cognitive individuali. (A B)

Le difficoltà indicate riguardano principalmente l'impostazione di canovacci di discussione, l'interpretazione ed il commento di scritture formali, la gestione dell'attività di classe e più in generale l'attuazione di un insegnamento costruttivo

La difficoltà maggiore si ha quando i ragazzi propongono le loro situazioni in termini simbolici. Se in parte le loro risposte sono prevedibili a volte è difficile entrare nei loro ragionamenti e capire quale pensiero li ha spinti ad elaborare certe pseudo-equazioni (G B)

Se devo essere sincera ho trovato particolarmente complesse due tipologie di richieste: impostare un canovaccio di discussione nelle scene e commentare le scritture formali proposte (S L)

Dai protocolli emerge chiaramente la preoccupazione degli insegnanti circa la valorizzazione dei contributi offerti dagli allievi nella costruzione delle conoscenze ed il controllo della partecipazione della classe.

L'aspetto che mi preoccupa maggiormente (e che ho scarsamente analizzato in questa prova) è la gestione della discussione collettiva e la possibilità di condurre la classe ad una condivisione di significati corretti. Ho la sensazione di avere abbastanza chiaro l'obiettivo di ogni fase proposta, più difficile è riuscire in pratica a condurre la classe a quell'obiettivo, guidando la discussione in modo costruttivo senza stroncature o forzature di vario tipo.(D G)

La partecipazione potrebbe permettere una maggiore comprensione da parte di tutti. Certo l'esperienza del docente -nel gestire le varie fasi, l'irruenza dei ragazzi, le loro risposte e domande- deve essere grande e non so se sarei in grado. (F M)

La difficoltà che mi spaventa maggiormente è non riuscire a trovare una spiegazione/giustificazione ad una proposta fatta, sia per mancanza di esperienza e di preparazione sia perchè non sempre si riesce a intuire cosa il ragazzino voglia indicare. (MC M)

Appare inoltre chiara la frattura tra la precedente concezione dell'algebra e del suo insegnamento e quella maturata in sede di formazione, accompagnata da considerazioni sulla necessità di dover svolgere un grosso lavoro su sé stessi per effettivamente liberarsi di modelli di insegnamento trasmissivo

La struttura della prova mi ha posto di fronte a un grande problema: spesso non sono stata in grado di prevedere gli atteggiamenti e le difficoltà che ragazzi possono incontrare nell'avvicinarsi all'algebra. La mia formazione di tipo matematico ha condizionato il mio modo di analizzare un problema tanto da non riuscire spesso a trovare possibili analisi alternative. Leggere i diari ArAl mi ha arricchito di un'esperienza che non ho (quella della discussione collettiva) ma che, sono ormai convinta, è molto utile per l'avvio dei ragazzi allo studio dell'algebra, e non solo. (A B)

Nella mia esperienza non ho mai incontrato docenti che adottassero questi tipi di approcci (mi riferisco in modo particolare alla scuola media) e questo ha fatto sì che tutti i concetti presenti in questa situazione fossero dilazionati nel tempo, noi studenti ci siamo imbattuti per caso in essi, con il rischio, a volte, di possedere questi concetti ma scollegati fra loro, quasi che non fossero proprio la stessa cosa. Per questo io stessa sono molto stupita di quante siano le esplorazioni

possibili e di quanto lavoro sia necessario fare su se stessi per superare concezioni di algebra così statiche e meccaniche a cui sono abituata. (V U)

In relazione alla significatività di questa prova mi sento in effetti chiamata in causa in prima persona. La mia formazione scolastica mi ha portato, lo riconosco, ad una visione dell'algebra, e della matematica in generale, di tipo decisamente "operazionale", cioè legata alla risoluzione di problemi e finalizzata ad ottenere un risultato. L'aspetto metacognitivo non è mai stato fra le priorità di studio e di analisi. Davvero ho vissuto l'algebra (quasi sempre) come un insieme di regole indirizzate al prodotto, senza nulla chiedermi sul processo... Quanto ci è stato detto a lezione mi ha quindi decisamente colpito, e credo che molti degli insegnanti della mia generazione siano nella stessa situazione. Un approccio come quello proposto da questa prova credo sia utile, se non indispensabile, per insegnarci ad affrontare l'algebra in modo diverso, sia come docenti che come persone. (T B)

5. Conclusioni

L'approccio all'early algebra ed in particolare l'attenzione agli aspetti relazionali dell'aritmetica non sono semplici da attuare e richiedono una buona conoscenza matematica di base e nuove convinzioni circa l'aritmetica e l'algebra da insegnare.

L'approccio costruttivo all'insegnamento richiede sensibilità didattica, capacità di ascolto e di coordinamento delle voci nella classe e un grande controllo delle dinamiche e dei tempi didattici. Quanto abbiamo presentato si ripropone di guidare gli insegnanti ad una riconversione di conoscenze e convinzioni circa l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra, e punta ad una ricostruzione dei personali atteggiamenti nella classe, affinando la capacità di gestione dell'attività di classe attraverso l'auto-osservazione ed il rispecchiamento.

Come conseguenza di tale rinnovamento, gli alunni dovrebbero essere guidati, attraverso la fase del balbettio algebrico verso la progressiva conquista della capacità di rappresentare algebricamente proposizioni, relazioni e proprietà, e viceversa di interpretare formule in riferimento ad un dato contesto facendo loro assumere una visione dell'algebra come linguaggio di descrizione e di esplorazione del reale. L'ambiente educativo socio-costruttivista dovrebbe favorire, soprattutto attraverso l'affinamento delle competenze linguistiche e argomentative, la capacità di lavorare e di confrontarsi in gruppo, contribuendo ad una costruzione socialmente condivisa delle conoscenze.

Strumenti come i diari degli insegnanti multicommentati o i compiti di analisi critico-previsionale di processi di classe hanno permesso di ottenere riscontri interessanti sul campo nei vari ambienti e situazioni nei quali essi hanno trovato applicazione: collaborazioni, corsi di formazione, e-tutoring, corsi SSIS. Le osservazioni emerse dal loro uso riflettono molto chiaramente gli obiettivi della loro proposizione: porre l'insegnante in situazione in modo da permettergli di collegare criticamente fra loro tre nodi: la propria concezione

dell'algebra, il conflitto indotto dall'incontro con l'early algebra, la mediazione fra questi due nodi imposta dall'osservazione di una micro-realtà di classe.

Da tutti i nostri studi emerge profonda la convinzione che occorra investire nella ricerca per la costituzione di un patrimonio di studi inerenti i processi costruttivi di insegnamento-apprendimento della matematica, che mettano in luce l'incidenza della 'variabile insegnante' sui comportamenti e apprendimenti degli allievi. Tali studi sono indispensabili se si vuole puntare ad una formazione ad ampio raggio, effettiva ed efficace, degli insegnanti sul versante della azione di classe. Crediamo che, da un punto di vista sociale, sia urgente investire risorse per una qualificazione professionale in tal senso degli insegnanti e, cosa più importante, di coloro che sono chiamati a svolgere ruoli di cerniera tra scuola e università, come accade in paesi culturalmente e socialmente avanzati (si veda ad esempio Even 2008).

Riferimenti Bibliografici

- Ainley J. (1999). Doing algebra type stuff: emergent algebra in the primary school, in O. Zaslavsky (a cura di), *Proceedings of the 23th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 9-16): Haifa (Israele)
- Ainley, J. (coord.). (2001). Research Forum on Early Algebra. In M. van den Heuvel-Panhuizen (a cura di), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 128-159). Utrecht (Olanda).
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 25(2), 42-47.
- Arzarello, F. (1991). Procedural and relational aspects of algebraic thinking. In F. Furinghetti (a cura di), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 80-87). Assisi (Italia).
- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. (1998). Italian Trends of Research in Mathematics Education: a National Case Study in the International Perspective, in Kilpatrick, J., Sierpinska, A. (a cura di), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*, (pp. 243-262), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto strategico TID, Quaderno 6.
- Borasi, R., Fonzi, J., Smith, C., Rose, B. (1999). Beginning the Process of Rethinking Mathematics Instruction: a Professional Development Program, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(1), 49-78.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., Purdy, D. (1985). *Diagnostic Teaching for Long Term Learning. Report of ESRC Project HR8491/1*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Blanton, M., Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience: transforming task structures: transforming practice on a district-wide scale. In E. Chick, K. Stacey, JI. Vincent, Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th*

- ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra'* (vol. 1, 87-95). Melbourne (Australia).
- Blanton, M., Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77
- Brito Lima A.P., Da Rocha Falcão J.T. (1997), Early development of algebraic representation among 6-13 year-old children: the importance of didactic contract, in E. Pehkonen (a cura di), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 201-208). Lahti, (Finlandia)
- Boulton Lewis, G.M., Cooper, T, Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L. (1998). Pre-algebra: a cognitive perspective, in A. Olivier, K. Newstead (a cura di), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 144-151). Stellenbosch (Sud Africa)
- Cai, J., Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Curricular, Instructional and Learning Perspectives, *ZDM*, 37(1), 1-4.
- Cai, J., Lew, H. C., Morris, A. , Moyer, J. C., Ng, S. F., Schmittau, J. (2005). The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective, *ZDM*, 37(1), 5-15.
- Carpenter, T., Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In E. Chick, K. Stacey, JI. Vincent, Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'* (vol. 1, pp. 155-162). Melbourne (Australia).
- Carpenter, T.P., Franke, M.L., Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating arithmetic and algebra in the elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carraher, D., Brizuela, B., Schliemann, A. (2000). Bringing out the algebraic character of Arithmetic: instantiating variables in addition and subtraction. In T. Nakahara, M. Koyama (a cura di), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 145-152). Hiroshima (Giappone).
- Carraher, D. (2001). Can young students operate on unknowns? In In M. van den Heuvel-Panhuizen (a cura di), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 1, 130-140, Utrecht (Olanda)
- Chick, E., Stacey, K, Vincent, JI. and Vincent, Jn. (a cura di). (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of Algebra'*, Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Cusi, A. and Malara, N. A. (2008). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16(1), 57-80.
- Czarnocha, B. (a cura di), (2008). *Handbook of Mathematics Teaching Research*, Rzeszów: University Press.
- Dougherty, B (2001). Access to algebra: a process approach. In In E. Chick, K. Stacey, JI. Vincent, Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'* (vol. 1, pp. 207-212). Melbourne (Australia).
- Da Roca Falcão, J.T., (1995), A case study of Algebraic Scaffolding: from Balance to algebraic notation. In L. Meira, D. Carraher (a cura di), *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, 66-73). Recife (Brazil).

- Da Rocha Falcão, J.T., Brito Lima, A.P., De Araújo, C. R., Lins Lessa, M.M., Osório, M.O. (2000), A didactic sequence for the introduction of algebraic activity in early elementary school, in T. Nakahara, M, Koyama (a cura di), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, 209-217), Hiroshima, Giappone.
- DFE (Department for Education) (1995). *Mathematics in the National Curriculum*, HMSO, London.
- Even, R (2008). Learning to connect professional development for teachers and change initiatives in school mathematics, in M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (a cura di), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (WG2 - The professional formation of mathematics teachers)*. Roma, 5-8/03/2008 <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008>
- Fantini, R., Lugli, C. (2008). Ragionando: a teaching experiment on the search for regularities through a collective construction of knowledge, in Turnau, S. (a cura di), *Handbook of Mathematics Teaching Improvement* (pp. 131-139), Rzeszów: University Press.
- Filloy E. (1990). PME algebra research. A working perspective. In G. Booker, P. Cobb and T. N. Mendicuti (a cura di), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 1-33). Oaxtepec (Mexico).
- Filloy E. (1991) Cognitive tendencies and abstraction processes in algebra learning, In F. Furinghetti (a cura di), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp. 48-55). Assisi (Italy).
- Fiorini, R., Marchi, S., Nasi, R., Stefani, P., Malara N.A. (2006). *Progetto ArAl: Unità 9 – Verso le funzioni*, Bologna: Pitagora
- Gray, E., Tall, D. (1993). Success and failure in Mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
- Harper, E. (a cura di) (1987-88). *NMP Mathematics for Secondary School*, Essex, UK: Longman.
- Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. von Glasersfeld (a cura di), *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp. 53-74). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? In D. T. Owens, M. K. Reed , G. M. Millsaps (a cura di), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME-NA* (Vol.1, pp. 71-94). Columbus (OH): ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Kaput J., Blanton M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience: transforming task structures. In E. Chick, K., Stacey, JI, Vincent, Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'* (vol. 1, 344-353). Melbourne (Australia).
- Jaworski, B. (1998). Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 3-31.
- Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.
- Jaworski, B. (2004). Grappling with Complexity: Co-learning in Inquiry Communities in Mathematics Teaching Development. In M.J. Hoines and A.B. Fuglestad (a cura

- di), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 17-36). Bergen (Norway).
- Kieran, C. (1996), The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, A. Perez (a cura di), *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures* (pp. 271-290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: a Structural Perspective. In S. Wagner, C. Kieran (a cura di), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston (Virginia): LEA.
- Kieran C. (1992), The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (2004): Algebraic thinking in the early grades: What is it?, *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8 (1), 139-151.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education, in F.L. Lin, J. Cooney (a cura di), *Making sense of mathematics teacher education*, (pp. 33-52)
- Lincevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.
- Lins, R. C. (1990). A framework for understanding what Algebraic Thinking is. In G. Booker, P. Cobb, T.N. Mendicuti (a cura di), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp. 93-100). Oaxtepec (Mexico).
- Malara, N.A. (1999). Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi, *Rivista di Matematica dell' Università di Parma* (6), 3*, 153-181
- Malara, N.A. (2002) Il modello italiano di ricerca per l'innovazione in didattica della matematica e la ricaduta nel mondo della scuola, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 25A, n. 5, 427-458
- Malara, N.A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. In N.A. Pateman, B. J. Dougherty, J. Zilliox (A cura di), *Proceedings of the Joint Meeting of PME and PME-NA*, (Vol. 1, pp. 33-48). Honolulu: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.
- Malara, N.A. (2005). Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra. In L. Santos et Al. (A cura di), *Mathematics Education: Paths and Crossroads*, (pp. 285-304). Lisbona: Etigraf.
- Malara, N.A. (2008). Methods and tools to promote a socio-constructive approach to mathematics teaching in teachers. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research* (pp. 89-102). Rzeszów: University Press.
- Malara N.A., Gherpelli L. (1997). Argomentazione e dimostrazione in aritmetica: risultati da una ricerca nel lungo termine, *L'Educazione Matematica*, anno XVIII, serie V, vol. 2, n. 2, 82-102
- Malara, N.A, Iaderosa, R (1999). Theory and practice: a case of fruitful relationship for the renewal of the teaching and learning of algebra. In F. Jaquet (a cura di), *Proceedings of CIEAEM 50* (pp. 38-54). Neuchatel: Neuchatel University press
- Malara, N.A., Navarra, G. (2001). "Brioshi" and other mediation tools employed in a teaching of arithmetic with the aim of approaching algebra as a language. In E. Chick, K., Stacey, JI. Vincent, Jn. Vincent (a cura di), *Proceedings of the 12th ICMI Study 'The future of the teaching and learning of algebra'* (vol. 2, pp. 412-419). Melbourne (Australia).

- Malara, N.A. Navarra G. (2003). *ArAl project: Quadro teorico e glossario*. Bologna: Pitagora
- Malara, N.A. Navarra, G. (2008). An Early Algebra Glossary and its role in teacher education. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research* (pp. 193-207). Rzeszów: University Press.
- Malara, N.A. Navarra, G. (2009). The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra. In B. Clarke, B. Grevholm, and R. Millman (a cura di), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 235-262). Berlin: Springer.
- Malara, N.A., Zan, R. (2002). The Problematic Relationship between Theory and Practice. In L. English (a cura di), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 553-580). Mahwah (NJ): LEA.
- Malara, N.A., Zan, R. (2008). The Complex Interplay between Theory and Practice: Reflections and Examples. In L. English (a cura di), *Handbook of International Research in Mathematics Education- II Edition* (pp. 539-564). New York: Routledge.
- Malara N.A., Incerti, V., Fiorini, R., Nasi, R. (2004). *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebraica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Bologna: Pitagora
- Mason, J.: 1990, Reflection on Dialogue between Theory and Practice, Reconciled by Awareness. In Seeger, F., Steinbring, H. (a cura di), *The Dialogue Between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor* (pp. 177-192). Bielefeld: Materialien und Studien, Band 38, IDM.
- Mason, J. (1994), Researching from Inside in Mathematics Education - Locating an I-You Relationship. In J. Ponte, J.F. Matos (a cura di), *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 176-194). Lisbona (Portogallo).
- Mason, J. (1998). Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243-267.
- Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.
- Meira, L. (1990). Developing knowledge of functions through manipulation of a physical device. In G. Booker, P. Cobb, T. N. Mendicuti (a cura di), *Proceedings of the 14th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp. 101-108). Oaxtepec (Mexico).
- Meira, L.: 1996, Students'early algebraic activity: sense making and production of meanings in mathematics, In L. Puig, A. Gutierrez (a cura di), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp. 377-384). Valencia (Spain)
- Navarra, G., Giacomini, A., Malara N.A. (2003-2009), Unità Progetto ArAl. Bologna: Pitagora
 Unità 2 - Rappresentazioni del numero: le mascherine e il domino
 Unità 3 - Verso il numero sconosciuto: il gioco della matematica.
 Unità 4 - Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri
 Unità 5 - Le piramidi di numeri
 Unità 6 - Dalla bilancia a piatti all'equazione
 Unità 7 - Studio di regolarità: dai fregi alle successioni aritmetiche
 Unità 8 - Esplorazioni alla ricerca di leggi di corrispondenza

Unità 11 - Viaggio alla conquista della proprietà distributiva

- Navarra, G., Malara, N.A., Ambrus, A. (2009), A problem posed by John Mason as a starting point for a Hungarian-Italian bilateral teaching experiment within the European Project PDTR, *proceedings WG 13-CERME 6*, Lione, <http://cerme6.univ-lyon1.fr/documents/wg13.pdf>.
- Navarra, G., Zamboni M. T., Malara N.A. (2007). *Progetto ArAl: Unità 10 - Qual è il colore della sedia? Successioni modulari e forme embrionali di generalizzazione*, Bologna: Pitagora
- NTCM (National Council of Teacher of Mathematics) (1998). *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum*. Washington:DC: National Academy Press.
- NCTM (National Council of Teacher of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston (VA): NCTM. <http://standars.ntcm.org>.
- Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção de conhecimento profissional. In E. Castro and E. De la Torre (A cura di), *Investigación en educación matemática* (pp. 61-84). University of Coruña (Spagna).
- Potari, D., Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the teaching triad as a tool for reflection analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5 (4), 351-380.
- Radford L., Grenier M. (1996). On dialectical relationship between signs and algebraic ideas, In L. Puig, A. Gutierrez (a cura di), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol.4, 179-186). Valencia (Spagna)
- Sadovsky, P. (1999). Arithmetic and algebraic practises: possible bridge between them. In O. Zaslavsky (a cura di), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 145-152). Haifa (Israele)
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 393 – 413.
- Shoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, 4(1), 1-94.
- Schön, D. A. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. New York: Basic Books.
- Schön, D. A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner: Toward a New Design for Teaching and Learning in the Professions*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Turnau, S. (a cura di), (2008). *Handbook of Mathematics Teaching Improvement*, Rzeszów: University Press.
- Wood, T. (1999). Approaching Teacher Development: Practice into Theory. In B. Jaworski, T. Wood, S. Dawson (a cura di), *Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives* (pp. 163-179). London: The Falmer Press.