METODI E STRUMENTI PER PROMUOVERE NEGLI INSEGNANTI UN APPROCCIO SOCIO-COSTRUTTIVO ALL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Nicolina A. Malara
Dipartimento di Matematica, Università of Modena & Reggio Emilia

In questo lavoro, dopo una introduzione circa il ruolo dell'insegnante nell'insegnamento socio-costruttivo e una sintesi delle indicazioni fornite dalla ricerca al riguardo, si espone la metodologia di lavoro condotta con/per insegnanti in servizio coinvolti in progetti di formazione per l'affinamento delle loro capacità di conduzione delle discussioni matematiche. In particolare ci si sofferma a descrivere un particolare strumento di formazione costruito a partire dalle loro trascrizioni di processi di classe attraverso commenti analitici plurimi. Lo strumento evidenzia ed amplifica atteggiamenti, concezioni e conoscenze dell'insegnante emergenti dal processo, e lo inducono ad una riflessione critica sulla propria azione nella classe favorendone l'aggiustamento. Nel lavoro si discutono i principali problemi della formazione degli insegnanti che l'uso di tale strumento mette in luce e si conclude con alcune riflessioni circa la sua efficacia formativa.

PAROLE CHIAVE: INSEGNAMENTO SOCIO-COSTRUTTIVO, RUOLO DELL' INSEGNANTE, ANALISI DI PROCESSI DIDATTICI, RIFLESSIONI IN CO-PARTNERSHIP, RISTRUTTURAZIONE DELLE CONOSCENZE, STRUMENTI PER LA FORMAZIONE.

INTRODUZIONE

Il vertiginoso incremento della ricerca scientifica e tecnologica ha prodotto il bisogno di una educazione matematica diversa, più proiettata verso la modellizzazione ed il problem solving che non verso l'apprendimento di fatti matematici, aperta all'argomentazione ed al lavoro cooperativo in classe. Ciò ha determinato un mutamento nelle concezioni circa la matematica da insegnare e le modalità del suo insegnamento, come appare dagli Standard USA (2000), dal test internazionale di valutazione PISA (OCSE 2002, 2003) ed anche dalle recenti proposte MIUR-UMI per l'insegnamento della matematica (Anichini & Al., 2001-2004).

La ricerca in educazione matematica indica l'insegnamento *socio-costruttivo* come più idoneo per far avvicinare gli studenti alla matematica e a far maturare in loro una concezione di essa più aderente al reale ed adeguata ai bisogni educativi attuali. Questo soprattutto nella scuola dell'obbligo dove l'immagine della disciplina si costituisce.

In un tale insegnamento si devolve agli allievi l'esplorazione di situazioni funzionali all'emergere di date conoscenze matematiche, che vengono costruite in processi di interazione tra insegnante ed allievi dove si punta alla oggettivazione di concetti e fatti matematici attraverso una riflessione sui processi esplorativi e di studio che li hanno determinati.

In questa prospettiva il compito dell'insegnante diviene più variegato e complesso. In classe questi dovrà assumere consapevolmente un'ampia gamma di ruoli (provocatore, maieuta, orchestratore di discussioni, modello, etc.) che lo porranno di fronte a situazioni spesso impreviste e non semplici da gestire. In particolare l'insegnante dovrà avere cura di: 1) pianificare percorsi di insegnamento che promuovano le costruzioni concettuali degli studenti; 2) creare un ambiente che favorisca l'esplorazione matematica e la formulazione di congetture; 3) adottare strategie comunicative che facilitino l'interazione degli studenti e la condivisione delle idee. Inoltre, in base alle questioni matematiche che via via si pongono, egli dovrà prevedere reazioni a specifiche domande e possibili processi di pensiero degli allievi, ma soprattutto dovrà fronteggiare sul momento sviluppi del discorso matematico che divergono da quello da lui previsto. Ciò richiede in lui la capacità di prefigurarsi i problemi che si possono incontrare sul campo prima ancora della loro risoluzione.

Tutto questo pone in primo piano il *problema della formazione e dello sviluppo professionale degli insegnanti*, temi su cui in questi ultimi anni la ricerca sta molto operando. Ciò è testimoniato dallo spazio dato a questo tema nei più importanti congressi internazionali, dal crescente numero di studi sul ruolo dell'insegnante (Sfard 2005, Adler & Al. 2005) e, cosa più significativa, dalla recente realizzazione del 15° studio ICMI '*The professional Education and Development of Teachers of Mathematics*' (Ball & Even 2008).

È oggi riconosciuto dalla ricerca che l'insegnante, per poter attuare un insegnamento socio-costruttivo, deve non solo affinare ed approfondire le sue conoscenze circa la cosiddetta 'pedagogical content knowledge' (Shulman 1986), ossia la rete di conoscenze relative a difficoltà d'apprendimento, questioni psico-pedogogiche ed ostacoli epistemologici di contenuti matematici oggetto di insegnamento, ma soprattutto deve acquisire la conoscenza di modelli di insegnamento di tipo interattivo e discorsivo (Wood 1999).

Su questo ultimo punto, già negli anni '90 alcuni studiosi hanno evidenziato gli effetti amplificati e di distorsione dell'attività di classe conseguenti ad improvvise e non controllate micro-decisioni dell'insegnante (Artigue & Perrin-Glorian 1991).

Per limitare questi fenomeni parecchi studiosi hanno sottolineato l'importanza della riflessione critica dell'insegnante sulla propria attività di classe al fine di indurre in lui un atteggiamento costante di controllo di sé nell'azione e consapevolezza delle conseguenze delle proprie decisioni. (Mason 1998; Jaworski 1998, 2002, Lerman 2001, Shoenfeld 1998). In particolare, Mason ha proposto lo studio della *discipline of noticing* (Mason, 2002) sostenendo che il cogliere consapevolmente le cose è frutto di una pratica costante, che va oltre ciò che accade nell'attività di classe. Egli ha anche raccomandato la creazione di opportune pratiche sociali in cui gli insegnanti possano parlare-di e confrontarsi-su la loro esperienza (Mason 1998).

Nell'ultimo decennio sono stati realizzati numerosi studi *con e per* insegnanti al fine di far loro riconoscere l'influenza di loro scelte (azioni od omissioni) sullo sviluppo di una discussione matematica e di far loro acquisire consapevolezza del loro modo di essere in classe. Le modalità di questi studi sono variegate ma in generale essi puntano ad indurre negli insegnanti una 'messa in discussione' delle proprie concezioni circa la matematica ed il suo insegnamento, a divenire consapevoli della complessità del lavoro di classe, ad acquisire nuovi e più appropriati modelli di comportamento (Borasi & Al. 1999**,** Da Ponte 2004, Potari & Jaworski, 2003).

Le nostre ricerche si inquadrano in questo filone di studi pur affrontando questioni riguardanti il rinnovamento dell'insegnamento dell'algebra attraverso un approccio linguistico e costruttivo a questa disciplina nell'ottica dell'early algebra (su quest'ultimo tema si vedano Malara & Navarra 2003, Malara 2008).

La nostra esperienza di studio e ricerca con gli insegnanti ci ha reso consapevoli delle difficoltà che questi incontrano nel progettare ed attuare un insegnamento di tipo socio-costruttivo. Abbiamo rilevato come, al di là delle intenzioni, nello sviluppo delle discussioni matematiche, gli insegnanti spesso non devolvono agli allievi il problema e non li rendono consapevoli del fatto che la soluzione deve emergere da un'attività collettiva di indagine, attraverso la validazione ed il raccordo delle idee di ciascuno. Gli insegnanti poi tendono a dialogare con i singoli allievi, più che a coordinare il dialogo fra pari, e sono portati, per l'ansia di concludere, a ratificare la validità di interventi produttivi senza rilanciarli al vaglio della classe. Inoltre spesso non riconoscono le potenzialità di certi contributi ed evitano di prendere in considerazione proposte che non aderiscono all'idea della soluzione del problema che loro si sono prefigurata (Malara 2003, 2005, Malara et al. 2004).

Per queste ragioni, in accordo con Wood (1999), consideriamo importante che gli insegnanti, sia in formazione che in servizio, analizzino processi didattici (propri o altrui), si cimentino con le nuove modalità di insegnamento della matematica ed attuino riflessioni e confronti sul loro operato.

LA NOSTRA METODOLOGIA

I nostri studi riguardano la progettazione e la sperimentazione di percorsi didattici innovativi e sono stati sempre realizzati in stretta cooperazione con insegnanti secondo un modello di antica tradizione nel nostro paese (Arzarello & Bartolini Bussi 1998, Malara 2002) e per certi versi analogo al modello di co-learning partnerships attuato da Jaworski (2003).

Inizialmente i nostri studi, pur puntando alle innovazioni curricolari, erano più rivolti all'apprendimento e alle difficoltà degli allievi; nel seguito, grazie anche alla nascita delle scuole di specializzazione ed in sintonia con i trend internazionali, si sono indirizzati verso i problemi degli insegnanti e della loro formazione con l'obiettivo di individuare strumenti e metodologie per produrre in loro le competenze necessarie ad attuare un insegnamento di tipo socio-costruttivo, culturalmente più adeguato.

La nostra ipotesi è che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe di tipo socio-costruttivo sia condizione necessaria perché l'insegnante acquisisca consapevolezza del nuovo ruolo che deve svolgere nella classe, delle dinamiche che si sviluppano nella costruzione matematica collettiva e delle variabili che intervengono[1]. Crediamo inoltre che questa attività vada sostenuta dallo studio di risultati della teoria dell'educazione matematica che diano spessore alle conoscenze

---

[1] Per il recente cambiamento avvenuto nelle modalità di svolgimento dei processi giudiziari, oggi anche in ambito giuridico è sottolineata l'esigenza di far studiare, nella formazione di pubblici ministeri e di avvocati di difesa, esempi paradigmatici di processi. L'obiettivo è di rendere evidenti gli effetti di mosse, decisioni, azioni intraprese nel corso di un dato processo e fare acquisire attraverso l'esame di pratiche diverse, un repertorio di modelli ed atteggiamenti idonei al ruolo da svolgere in date situazioni (si veda ad esempio Carofiglio, 2007)

didattico-disciplinari dell'insegnante, ne supportino (o modifichino) le convinzioni, e che lo rendano consapevole dell'incidenza dello studio teorico per il proprio sviluppo professionale (Malara & Zan, 2002).

Per questo oggi i nostri studi sono rivolti *all'analisi di processi di classe* che si sviluppano su percorsi pianificati con gli insegnanti li attuano. Essi hanno un duplice obiettivo, innanzi tutto si vogliono portare gli insegnanti coinvolti ad avere un maggiore e più fine controllo sui comportamenti e sugli stili comunicativi da loro adottati ed ad osservare l'influenza sul processo di classe e sui comportamenti ed apprendimento degli allievi dei confronti di analisi critica svolti. Inoltre si vogliono mettere a punto strumenti per la formazione degli insegnanti, da usarsi sia nelle scuole di specializzazione, sia nella formazione a distanza (Martellotta & Al. 2006, Malara & Navarra 2007, Malara 2008).

Questi obiettivi sono realizzati attraverso una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe, e di riflessione su si essi, dove si guarda alle interrelazioni tra conoscenze costruite dagli studenti e comportamenti dell'insegnante nel guidare gli studenti in tali costruzioni.

L'attività si sviluppa in fasi successive incentrate su: la riflessione autonoma dell'insegnante di classe; la riflessione congiunta insegnante e ricercatore; la riflessione comune tra insegnanti impegnati nello stesso percorso didattico; la riflessione degli insegnanti in interazione con il/i ricercatore/i.

Nella prima fase, riguardante l'interpretazione dell'insegnante su quanto accade nella classe, gli viene chiesto di effettuare la trascrizione delle discussioni matematiche e di esplicitare e commentare punti ritenuti particolarmente problematici o produttivi. Questo forza gli insegnanti a riesaminare con occhio critico lo sviluppo del processo ed in particolare le conseguenze dei propri modi di comunicare con gli allievi (posizione delle domande, indicazioni date, decisioni assunte, etc).

Le trascrizioni delle registrazioni arricchite da questi primi commenti dell'insegnante costituiscono il nucleo fondante dei *diari del processo* (d'ora in avanti detti brevemente '*diari*').

Nella seconda fase, il ricercatore svolge una lettura analitica del diario scrivendo in esso suoi commenti locali e d'insieme. I diari corredati da questi nuovi commenti divengono oggetto di un successivo studio congiunto tra insegnante e ricercatore. In tale studio il ricercatore guida l'insegnante in riflessioni specifiche, chiedendogli di spiegare il significato o le ragioni di alcuni suoi interventi, indica potenziali strategie per superare punti morti o dà spiegazioni circa questioni matematiche sorte, a volte molto sottili. Egli promuove anche riflessioni globali su cosa è stato fatto ed evidenzia i passi significativi nello sviluppo della costruzione matematica.

Questa analisi congiunta consente di rendere espliciti all'insegnante sue abitudini, stereotipi, concezioni ed ad evidenziare possibili lacune o misconcetti nella sua conoscenza matematica. Questo momento risulta di particolare importanza per la consapevolezza che l'insegnante viene ad assumere circa la validità delle sue scelte e della sua azione didattica riflettendo su scelte errate, omissioni, fraintendimenti, ecc.

La terza fase, di confronto tra gli insegnanti, rappresenta un momento di libera condivisione su quanto avviene nelle loro classi; essa risulta utile agli insegnanti per esprimere perplessità o dubbi o per cercare le ragioni di possibili problemi didattici comuni. Questa fase è caratterizzata da una prima presa di coscienza sulle divergenze dei processi didattici attuati, ed una riflessione circa i propri modi di interagire con gli studenti (interventi/silenzi, turni di parola, rilanci, controllo).

Nella quarta fase, di confronto collettivo tra insegnanti e ricercatori, viene fatta una riflessione globale su quanto emerso. Il riesame dei punti nodali dei vari percorsi porta ciascuno insegnante a valutare l'efficacia complessiva del proprio operato a riconoscere ostacoli incontrati, deviazioni, errori ed ad esplicitare le nuove consapevolezze raggiunte. Ciò dà modo al ricercatore di osservare la diversa incidenza dell'esperienza su di loro e l'influenza delle singole personalità nel processo educativo attuato.

I DIARI MULTI COMMENTATI

Nell'ambito di recenti progetti[2] si è attuata un'interessante variazione metodologica anche se impegnativa e costosa in termini temporali.

Per la diversa dislocazione dei partecipanti e per la necessità di condividere l'analisi dei processi in studio, grazie alla disponibilità dei mentori, si è deciso che le trascrizioni commentate dall'insegnante, i cosiddetti *diari,* vengano analizzati e discussi in corso d'opera da almeno tre persone: *il mentore cui l'insegnante è assegnato (M1); il mentore coordinatore (M2); il responsabile del progetto (M3)*.

I diari così si arricchiscono di una molteplicità di commenti scritti (svolti a volte indipendentemente l'uno dall'altro, a volte in ordine gerarchico), che riflettono una variegata gamma di punti di vista e di interpretazioni, che mettono in luce - nelle loro concordanze - punti nodali del processo ed elementi critici del comportamento dell'insegnante. Non sono rari i casi in cui un insegnante, sulla base di tali commenti, senta il bisogno di ritornare sui diari con chiarimenti locali, esplicitando - a sostegno delle ragioni di sue decisioni - dinamiche nascoste, profili comportamentali di specifici allievi, etc, o esprimendo ravvedimenti circostanziati.

I diari pluri-commentati diventano un complesso ed articolato strumento di studio, sia per gli insegnanti sia per i ricercatori. In particolare in relazione ai processi esaminati essi si vengono a caratterizzare come:

- *strumento formativo* per gli insegnanti, consentendo loro di sviluppare competenze e sensibilità, e quindi di migliorare la qualità complessiva della propria azione didattica;
- *strumento diagnostico* per il ricercatore, consentendo l'individuazione di disfunzioni dell'azione didattica, la formulazione di ipotesi e l'attuazione di interventi per il loro aggiustamento ed anche l'individuazione di spunti di ricerca;

---

[2] Si tratta del progetto europeo Comenius *Professional Development of Teachers Researchers (PDTR*) e del progetto Nazionale '*Master in didattica delle Scienze' (MDS).*

- *strumento valutativo* sia per il docente che per il ricercatore fornendo elementi per potenziare l'efficacia degli interventi nei rispettivi ambiti (attività didattica e progettazione degli interventi formativi settoriali e/o generali).

Risultano poi, più in generale, una pregiata fonte per la produzione di materiali utili per attività laboratoriali di formazione.

Per dare un'idea del tipo di materiali che si generano con lo svolgimento di questo lavoro a più mani riportiamo in appendice il brano iniziale di un diario relativo alla sperimentazione svolta in I media nella classe di una giovane insegnante incaricata annuale. Il brano, proprio perché iniziale, è di immediata contestualizzazione e di facile lettura e dà un'idea della struttura di un diario. E' stato scelto perché presenta concentrati una ampia varietà di commenti che evidenziano problemi ricorrenti e presenti in tutti i diari, seppure con diversa intensità. Inoltre i commenti dell'insegnante, inizialmente assenti, vengono espressi sulla base di quelli dei mentori e documentano bene il processo di riflessione da lei svolto.

Sui caratteri dei commenti che emergono dai diari

L'indagine sulla tipologia dei commenti svolti ha portato alla individuazione di cinque aree chiave, seppure interconnesse, alcune delle quali offrono nuovi spunti per la ricerca e nuove prospettive per la formazione. Precisamente:

1. Questioni culturali e/o didattiche generali (es. concezione dell'aritmetica e dell'algebra, concezione dell'insegnamento e degli allievi, concezioni sulla significatività o centralità di certi argomenti).
2. Questioni matematiche e matematico - didattiche (es. le successioni: cosa sono, come insegnarle, come rappresentarle, quali nodi didattici pongono?).
3. La divaricazione tra teoria e pratica (es. la difficoltà di mettere in opera quanto studiato o progettato e di lavorare in termini relazionali).
4. Questioni linguistiche (il prevalere di espressioni linguistiche operative frutto del modello di insegnamento ricevuto, il difficile conflittuale equilibrio tra linguaggio colloquiale e linguaggio dell'insegnamento scientifico; lo scarsa attenzione alle parafrasi verbali ai fini della traduzione algebrica).
5. La gestione delle discussioni di classe (il prevalere di dialoghi insegnante-allievo; le diffuse imbeccate; le domande di conferma (si/no); la mancanza di attenzione per lo sviluppo di una 'intelligenza sociale' nella classe).

Vistosamente cruciali e drammatiche appaiono due questioni che riguardano: *il linguaggio dell'insegnante* nella comunicazione, spesso gergale, approssimato e poco corretto, ricco di metafore non sempre pertinenti; *la concezione della matematica*, troppo spesso *operativa* per il prevalere del 'calcolare' e 'trovare' sul 'rappresentare', del 'fare' sul 'ragionare'e 'riflettere'.

Esempi

A titolo esemplificativo presentiamo qui alcuni stralci di diari pluri-commentati in relazione ad alcune delle categorie di commenti indicate. Gli stralci sono relativi a sperimentazioni realizzate in prima media in riferimento ad un percorso didattico sullo studio di successioni numeriche e figurali modellizzabili algebricamente. Il percorso è

stato messo a punto da un gruppo di insegnanti coinvolti dei progetti citati dopo lo studio teorico di alcuni articoli della letteratura internazionale dedicati alle problematiche dell'insegnamento/apprendimento dell'algebra con particolare riferimento alla generalizzazione e modellizzazione algebrica e più in generale alla figura dell'insegnante ed al rapporto tra teoria e pratica.
Il percorso si sviluppa attorno allo studio di cinque situazioni che riguardano prevalentemente successioni lineari ma si conclude con una situazione[3] in cui occorre esplorare simultaneamente due successioni, una lineare l'altra quadratica, e confrontarle nei loro andamenti. Gli obiettivi principali del percorso sono il far conquistare agli allievi una visione funzionale delle successioni ed il portarli a costruire loro rappresentazioni algebriche modellizzando la relazione tra il numero d'ordine (o di posto) e termine corrispondente nella successione. Questioni matematiche cruciali del percorso riguardano: l'individuazione e rappresentazione di leggi di corrispondenza in termini generali, cosa connessa con l'attuazione di rappresentazioni numeriche diverse dei termini della successione ed il loro coordinamento; il riconoscimento di analogie strutturali; l'individuazione di variabili e la loro denominazione mediante lettere; la condensazione di formule aritmetiche analoghe in un'unica rappresentazione, la trasformazione di formule aritmetiche per il riconoscimento di loro identità, la consapevolezza del ruolo delle proprietà aritmetiche nella trasformazione.

Esempio 1: Commenti di carattere culturale e didattico generale relativi ad uno stralcio di discussione rivelatore di mancata attenzione dell'insegnante ad interventi di allievi ritenuti banali o non plausibili

L'insegnante aveva proposto alla classe l'esplorazione della successione i cui primi termini sono 4; 11; 18. La classe aveva già individuato la legge di generazione ricorsiva della successione. L'insegnante scrive alla lavagna la seguente tabella ed apre la discussione per avviare la classe allo studio della rappresentazione della legge di corrispondenza generale.

Numero d'ordine della successione	Numero della successione	Operazioni per saltare dal primo numero di posto	'Ricetta matematica' per la costruzione del numero
1	4	4	
2	11	4 +…	
3	18	4 + … + …	
4	25		
5	32		

Insegnante: Operazioni eseguite per saltare dal primo numero. Quindi cosa facciamo? Christian. Vedi che partiamo da 4. Nel secondo posto, come arriviamo a 11? Facciamo 4 +…
Christian: Eeeeeeeem….
Insegnante: Come arriviamo a 11? Facciamo 4 + … ?
Christian: Tre?
Insegnante: A 11? Sabrine. **(1)**

[3] Si tratta del quesito 'apple trees' del test internazionale P.I.S.A. 2000. Esso è stato selezionato dagli insegnanti nell'ambito di specifici seminari dedicati allo studio del test.

Sabrine: + 7.
Insegnante: Facciamo 4 + 7. E nel terzo posto, Sabrine, facciamo?
Sabrine: 4 + 7 + 7.
Justice: Ma non era meglio fare 4 x 2? **(2)**
Insegnante: E nel quarto posto?
Sabrine: 4 + 7 + 7 + 7.
Insegnante: E nel quinto?
Sabrine: 4 + 7 + 7 + 7 + 7.
Insegnante: E se ci fosse un sesto?
Sabrine: 4 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7.
Insegnante: Esatto. Allora, troviamo adesso…
Andrei: Non ho capito. Al primo posto cosa ci metto?
Insegnante: Beh, al primo posto c'è il 4.
Andrei: Io ho messo 4 × 1. **(3)**
Insegnante: Beh, però non c'è nessun '×' lì. Il primo posto è 4 **(4)**

Commenti dei mentori (I sta per 'Insegnante')

(1) M3. *Questo frammento di discussione evidenzia due cose su cui riflettere:* il problema della partecipazione della classe. *Cristian, con la sua perplessità e la sua risposta mostra chiaramente di essere 'altrove';* il comportamento dell'insegnant*e che 'passa oltre', non si cura dell'allievo.*

(2) M1. *Perché I non commenta l'intervento di Justice? M2. Me lo sono chiesto anch'io. Forse nella foga degli interventi quello di Justice si è perduto. La sbobinatura è preziosa anche per questo, perché consente all'insegnante riflessioni a freddo.* M3 *Concordo. Justice coglie una regolarità che esprime male, invece di dire 4 + 7 × 2 contrae il tutto in 4 × 2. I avrebbe dovuto chiarire la cosa. Tra l'altro si è perduta l'occasione di introdurre l'operatore moltiplicativo che consente di oggettivare il 'numero di volte' (che occorre aggiungere + 7 al primo termine per ottenere il numero considerato) come 'secondo fattore' della moltiplicazione nella rappresentazione abbreviata dell'espressione additiva che dà il numero.*

(3) M2. *Anche questo intervento avrebbe potuto essere indagato. Qual è il retropensiero di Andrei? Perché pensa al prodotto fra 4 e 1?* M3. *Anche qui ci troviamo di fronte ad una intuizione male espressa. Probabilmente il ragazzo vuole 'colmare il vuoto' che vede nella rappresentazione del primo termine a confronto delle altre. Qui I perde un'occasione di variare la rappresentazione del primo termine, 4, in modo funzionale alla situazione, ad esempio scrivendo 4 come 4+0 e rilanciando alla classe il problema di trovare per il primo termine una rappresentazione analoga a quella degli altri.*

(4) M3. *Questo intervento di I fa pensare che lei stessa escluda la rappresentazione di 4 in altro modo, mostrando poca lungimiranza da un punto di vista algebrico. Sarebbe invece appropriato incoraggiare queste intuizioni, anche se imprecise, ovviamente cercando di indirizzarle al meglio. In questo caso si può operare in modo da arrivare ad una rappresentazione di 4 in termini che aderiscano ad una regola generale, per esempio se la corrispondenza si modellizza secondo la legge: "il termine di posto n (termine n-esimo) della successione è dato da 4 + 7 × (numero di posto – 1)" questa porta immediatamente alla rappresentazione di 4 come 4 + 7 × (1 – 1) ossia 4 + 7 × 0.*

Riflessione dell'insegnante

Tutte queste annotazioni mi fanno pensare ad una enorme chiusura mentale che ho e che credevo di non avere così tanto. Non so se sia questione di attenzione, di abitudine a vedere le cose anche in altro modo, di paura ad uscire da quello che è lo schema da seguire o che credevo di dover seguire.

Esempio 2. Commento didattico-metodologico inerente una tipica azione dell'insegnante

L'insegnante affronta il passaggio dalla legge ricorsiva a quella generale.

Insegnante: Il primo posto è 4. Poi il secondo faccio 4 + 7, nel terzo 4 + 7 + 7 e così via. Vediamo se posso usare la moltiplicazione. Come faccio ad arrivare a 11? Posso fare 4 + 7 ma posso anche fare 4 +…
Insegnante: Biagio?
Biagio: 4 + (7 × 1).
Insegnante: Esatto. Perché abbiamo visto che per arrivare a 11… Biagio, spiegalo tu.
Biagio: Perché fare 7 × 1 è sempre 7. Quindi si fa 7 × 1.
Insegnante: Quindi abbiamo visto che per arrivare a 11 dobbiamo fare 4 + 7, però come dici tu, 7 è uguale a…
Biagio: 7 × 1.
Insegnante: Quindi dire 4 + 7 o dire 4 + (7 × 1) è uguale. Allora nella terza riga cosa mettiamo Biagio?
Biagio: 4 + (14 × 1).
Insegnante: Attento
Biagio: 4 + (7 × 1) + (7 × 1).
Insegnante: Tu fai così. Altre idee?
Riccardo: 4 + (7 × 2).
Commento
M2. *Suggerirei ad I di evitare domande che costituiscono una sorta di 'invito al completamento della frase', 'telefonando' la risposta. La strategia non paga. Mi ricorda un episodio citato da Brousseau (se non sbaglio tratto dalla commedia 'Topaze' di Marcel Pagnol) in cui c'è un precettore che sta facendo lezione di francese al suo allievo. I parenti assistono in silenzio. Il tema è: capire dal contesto se una certa parola è detta al singolare o al plurale (nel francese parlato non si pronuncia la –s del plurale). La parola in questione è 'moutons' (montoni). L'allievo non sa che pesci pigliare e il precettore teme che i parenti lo possano giudicare male. Per questo gira attorno all'allievo fermo con la penna in mano sussurrando 'moutons', poi non vedendo risultati, comincia a calcare la voce 'moutons'... 'moutonss'... 'moutonsss'. Finalmente l'alunno si illumina e scrive la –s alla fine della parola. L'ambiente si rasserena. Fine della citazione. M3. OK. Brousseau parla di 'Effetto Topaze'.*

*Esempio 3. Commenti di tipo matematico relativi all'affinamento ed al coordinamento di leggi diverse rappresentanti una stessa succession*e

Situazione 1
L'insegnante aveva dato da esplorare la progressione aritmetica generata dall'operatore +7 a partire dal termine 4. La classe era arrivata alla individuazione di due 'regole', sintetizzate dall'insegnante alla lavagna così:

	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67
(1)	+7	+7	+7	…						
(2)	7×2–10	7×3–10	7×4–10	7×5–10	7×6–10	7×7–10	7×8–10	7×9–10	7×10–10	7×11–10

Legge 1: bisogna aggiungere 7
Legge 2: moltiplico per 7 poi tolgo 10

Commento
M3. *Le due leggi sono espresse in modo molto grezzo. Attenzione, la prima è chiaramente ricorsiva, la seconda generale, anche se la variabile è tacita. Per poterle confrontarle occorre metterle sullo stesso piano. Questo richiede la trasformazione della prima legge in senso generale. Per questo occorre esplicitare il numero di volte in cui si applica l'operatore +7 a partire dal primo termine. La prima legge diviene*

4 ; 4+7 ; 4+ 2×7 ; 4+ 3×7 ; 4+4×7 ……….. .

Si potrebbero anche portare i ragazzi a notare che 4 = 4+0 = 4 + 0×7, inglobando il primo termine nello schema generale. Si può anche tentare di andare in parallelo con le due rappresentazioni:
legge 1: 4 + 0×7 ; 4+7 ; 4+ 2×7 ; 4+ 3×7 ; 4+4×7; ……….. .
legge 2: 7×2–10; 7×3–10; 7×4–10; 7×5–10; 7×6–10; ………
invitando a vederne l'equivalenza termine a termine e portandoli a scoprire che la ragione sta nel fatto che essendo 7×2 = 14 è 4 = 7×2-10.

Situazione 2

L'insegnante mette a confronto le rappresentazioni dei termini della successione secondo le due leggi prima individuate (situazione 1). Dalla analisi dei casi in classe si arriva a questa conclusione:

Posto	Numero	Regola 1	Regola 2
1°	4		$7 \times \boxed{2} - 10$
2°	11	$4 + 7 \times \boxed{1}$	$7 \times \boxed{3} - 10$
3°	18	$4 + 7 \times \boxed{2}$	$7 \times \boxed{4} - 10$
4°	25	$4 + 7 \times \boxed{3}$	$7 \times \boxed{5} - 10$
8°	53	$4 + 7 \times \boxed{7}$	
12°	81	$4 + 7 \times 11$	

Nella regola 1 il numero che cambia è il terzo numero, cioè il secondo fattore. Questo numero cambia seguendo il posto, cioè è uguale al precedente del posto.

Nella regola 2 cambia ancora il secondo fattore, però stavolta il posto è uguale al precedente del secondo fattore.

Commento

M3. *Le regole sono molto 'sporche' linguisticamente. Sarebbe stato meglio dire 'secondo la regola 1, nel rappresentare un termine della successione cambia il terzo numero, cioè il secondo fattore del prodotto che vi compare. Questo numero cambia <u>in corrispondenza</u> al numero di posto ed è uguale al numero di posto meno 1. Un'osservazione: perché non si è completato anche il primo caso? (Un allievo l'aveva visto, non è il caso di gettare alle ortiche interventi così raffinati e preziosi.) Un altra osservazione: noto con rammarico che la regola 1, seppure individuata operativamente, rimane inespressa, non oggettivata. La regola 1, nata dalla riscrittura dei vari termini della successione attraverso i successivi multipli di 7, andava esplicitata almeno verbalmente, anzi il compito andava affidato ai ragazzi. Si sarebbero avute formulazioni tipo 'il numero della successione che sta ad un certo posto è 4 più 7 per il numero di posto meno 1' (traduzione fedele della procedura) oppure ''il numero della successione che sta ad un certo posto è dato da quattro più il prodotto del numero di posto meno 1 per 7 " (formulazione mista relazionale-procedurale) ed altre ancora; l'insegnante poteva arrivare ad esprimerla nella forma relazionale, più evoluta: ''il numero della successione che sta ad un certo posto è la somma di 4 con il prodotto di 7 per il numero di posto meno 1). Ho volutamente evitato di usare il termine precedente o antecedente del numero di posto, poco funzionale alla traduzione algebrica. Già questa varietà di formulazioni verbali porta ad interessanti problemi da discutere nel passaggio alla formulazione algebrica (per la quale la metafora Brioshi funziona alla grande) concernenti non solo la rappresentazione della variabile (numero di posto) ma anche l'uso delle parentesi.*
Osservo che la regola 1 è data esprimendo il secondo fattore in funzione del numero di posto (cosa funzionale alla traduzione algebrica). La regola 2 invece è stata espressa esprimendo il numero di posto in funzione del secondo fattore (cosa non funzionale alla traduzione algebrica).

Esempio 4 Commenti relativi a questioni linguistiche e di rappresentazione nel passaggio alla generalizzazione in relazione ad una discussione pesantemente condizionata dal linguaggio usato dall'insegnante

La classe aveva individuato la legge di corrispondenza tra naturali generata a partire da 4 dall'operatore "+7". Si era passati ad affrontare il problema della generalizzazione e lavorato con grande partecipazione sul significato del termine 'ennesimo'. La discussione che segue verte sulla ricerca di una formula rappresentativa della corrispondenza. L’insegnante affronta la questione con gli allievi riassumendo in una tabella tutte le conoscenze cui si era arrivati. Nello studio del caso di posto 30° vi è un errore, nel generalizzare si scambia il precedente di 30 con il successivo.

Posto	Numero	Operazioni…	Regola 1	Regola 2
1°	4			
2°	11	4 + 7	4 + (7 × 1)	7 × 3 – 10
3°	18	4 + 7 + 7	4 + (7 × 2)	7 × 4 – 10
4°	25	4 + 7 + 7 + 7	4 + (7 × 3)	7 × 5 – 10
30°			4 + (7 × 31)	
n				

Insegnante: *Voglio sapere: se io sono al posto n, che avevamo detto – vi ricordate? – che era un posto in un certo punto, senza sapere che punto fosse. Eh, voglio sapere qual è la regola che mi permette di trovare questo numero alla posizione n* **(1)** [indico alla lavagna il termine ennesimo] *ci siete*?

Insegnante: *Bene, allora troviamo la regola* **(2)**. *Benedetta*?

Benedetta: *Eh, perché io, credevo che ennesimo fosse l’ultimo, allora ho scritto “non c’è perché la sequenza è infinita* **(3)**”.

Insegnante: *Va bene, questa è una considerazione che è vera e magari dopo ci servirà, la teniamo da conto* **(4)** *Allora, come facciamo a trovare la formula che ci servirà?* **(5)**! *Non guardate me, guardate il vostro foglio e la lavagna! Come si fa a trovare?* **(6)** *Andrea?*

Andrea: *Allora, se noi sappiamo… dall’ultima volta avevamo detto che ennesimo stava per qualsiasi posto* **(7)**

Insegnante: *Domanda: il numero n vuol dire un numero in un posto qualsiasi* **(8)** *senza che vi dica che numero è, questo è il difficile! Che formula scrivo per il numero al posto ennesimo*? **(9)**

Sergio: Cioè *secondo me non si può trovare perché ennesimo è un numero che non si sa*

Andrea: *Come ha detto lei, ennesimo indica un numero in qualsiasi posto, quindi dico come Sergio, se il posto è indefinito, non potremo mai sapere che numero è!*.**(10)**

Insegnante: *Esatto, sono d’accordo anch’io! Se non vi dico, al 3°, al 4° al 100°, al 7003° posto, non si può sapere. Me se io vi dico che questo numero… di questo numero invece di dirvi il numero di posto, vi dico che è al posto n, posso fare un calcolo… posso scrivere una formula per trovare questo numero?* **(11)**

Stefano: *Secondo me sì... non sappiamo che numero è n e anche se non lo sappiamo possiamo trovare una formula*.

Sergio: *Secondo me non possiamo ricavarlo perché non c’è una formula precisa* **(12)**

Insegnante: *Mmh, ma secondo te, questa formula esiste e siamo noi che non riusciamo a capire oppure non esiste*? **(13)**

Alessandro: *Secondo me… boh…*

Andrea: *Io per me... avrei trovato una formula per l’ennesimo posto ma non so se è giusta… Per trovare il numero all’ennesimo posto dovremmo fare 4 × 7 × n*.

Insegnante: *Sei sicuro? Guarda le altre formule… ti è sfuggito...*

Francesco: *Ha detto 4 × 7 invece è 4 + 7*

Insegnante: *Ok, è stata una svista!* **(14)**

Tamara: *Io dico ad Andrea: come fa a trovare 4 + 7 × ennesimo posto che non sa neanche qual è!*

Insegnante: *Che è l’interrogativo che ci siamo posti fino ad adesso. Ma io non voglio sapere che numero c’è, non voglio sapere il risultato del calcolo, neanche alle superiori riuscirete a fare 7 × n se n non sapete che numero è ‘n’ ! Ma io volevo sapere solo la formula e Andrea* *ne ha proposta una! Che questo numero non si possa trovare è ormai chiaro! Hai fatto bene a sottolinearlo. Adesso voglio sapere, la formula è corretta?* **(15)**

Tamara: *Secondo me no*

Benedetta: *Secondo me stiamo menando il can per l'aia. Cioè… scusa… stiamo facendo una cosa che non esiste!!! Perché ci fai tante domande!! Basta!! non c'è!!!*

Carmen: *Ha ragione la Benedetta!!!* **(16)**

Tamara: *Secondo me no, perché se vedi anche gli altri esempi… vedi che $4 + 7 \times 4$.. cioè invece di fare l'ennesimo posto… c'è 4*

Insegnante: *Ma al 4° posto c'è $4 + 7 \times 3$, quindi il secondo fattore è …?*

Tamara: *3.*

Andrea: *se guardiamo il numero al terzo posto, l'operazione che c'è scritta è $4 + 7 \times 2$* **(17)** *quindi da qua possiamo dedurre che il numero che cambia è lo stesso del posto ma meno 1.*

Insegnante: *Tamara, Andrea diceva "il posto meno 1"… come si chiama quel numero lì?* **(18)** *Il…?*

Tamara: *Eh?…*

Insegnante: *Lo abbiamo scritto anche sul nostro cartellone* [l'uno e le operazioni*: $a - 1$* era indicato come il precedente di a, con $a \in N$ e $a \neq 0$] **(19)**

Tamara: *Ah… il predecessore*

Insegnante: *Il predecessore nel senso che è il sovrano che viene prima*

Sergio: *Il precedente*

…

<u>Commenti</u>

(1) I. Mi rendo conto ora di aver sbagliato termini inducendo così negli studenti le risposte che poi verranno e che ho disperatamente "combattuto". Dicendo "la regola per trovare questo numero alla posizione n" gli studenti hanno inteso che io volessi sapere il valore di a_n. Forse avrei dovuto dire "la regola per trovare un numero della successione sapendo la sua posizione".

(2) M2. Suggerisco di condurre la classe a scoprire e ad evidenziare con delle frecce relazioni, ripetizioni di numeri, regolarità 'locali'. Molte di queste possono non essere produttive, ma abituano gli alunni ad un'esplorazione a 360°. Per esempio la stessa successione, proposta in un'altra classe, ha condotto alcuni alunni ad individuare una relazione fra i numeri delle prime due colonne e a rappresentarla con $11 = 2 \times 7 - 3$, $18 = 3 \times 7 - 3$, $25 = 4 \times 7 - 3$, e così via. Le frecce potrebbero collegare i vari quattro con il primo della successione, i numeri 1, 2, 3 della quarta colonna con i numeri dei posti della prima, sfalsati di una riga, ecc. Queste ultime frecce potrebbero rendere evidente che il 31 è sbagliato e che va sostituito con un 29

(3) M1 Attenzione: al posto ennesimo corrisponde il fattore $(n - 1)$ che dà luogo, secondo Benedetta, al 'penultimo' numero.

M3. Benedetta si contraddice, se la sequenza è infinita, anche i posti sono infiniti ed n non può essere l'ultimo. . Forse intende n come numero 'molto grande'. Con questa contraddizione esprime la sua convinzione di non poter rappresentare un numero di posto imprecisato. In ogni caso non ha il significato di n come indicatore di un numero che non vogliamo precisare.

(4) M3 E' vero che la successione è indefinita ma NON è vero che 'n' voglia dire 'ultimo'. Non si può dire vera una proposizione composta di due di cui una falsa. Attenzione agli aspetti logici del linguaggio!

(5) I. Incalzo la 'platea' perchè ammutolita

(6) **M1.** I. è assillata dall'idea di dover arrivare alla formula scritta nel linguaggio algebrico. Io continuo a pensare che, in questa fase del lavoro, l'obiettivo è condurre i ragazzi a cogliere la relazione tra posto e numero corrispondente, e ad esprimere tale relazione in modo chiaro.

M2 Perché non fare esprimere innanzitutto nel linguaggio naturale, descrivendo le forme delle colonne 3 e 4: "il numero lo ottengo aggiungendo al numero iniziale tanti 7 quanti sono..." o in una qualsiasi altro modo. Si possono poi confrontare le parafrasi proposte dagli alunni e si sceglie quella più adatta ad essere tradotta in linguaggio algebrico per Brioshi.

(7) **M1** Bene Andrea, quel “qualsiasi posto“ vale oro!

(8) **M3** Più che ‘qualsiasi’, termine che si porta dietro la variabilità, sarebbe qui stato appropriato sottolineare che si tratta di un numero che non vogliamo specificare, ‘indeterminato’ (termine che concentrando l’attenzione sull’elemento lo fissa in qualche modo)

(9) M1 Mi sono chiesta diverse volte perché non mettere, nella colonna della ricetta matematica, l’operazione (mentale o no) che viene fatta per individuare il fattore che moltiplica il 7, a partire dal numero di posto dato? Così i ragazzi avrebbero colto la regolarità, la reiterazione di una procedura, avvicinandosi in modo quasi indolore alla costruzione della formula. M3.la formula si determina per Identificazione nei casi studiati di parti invarianti (4+ 7×…) e parti varianti (numero di posto – 1).

(10) L’approccio alla lettera è molto complesso, richiede tempi lunghi, strategie diverse, confronti, esplorazioni, comporta continue, impreviste, evaporazioni. La compresenza di intuizioni di significati diversi negli interventi di Sergio e Andrea è assolutamente inevitabile, direi fisiologica. Probabilmente la necessità (vera o presunta) di concludere e arrivare alla regola pone all’insegnante ritmi che difficilmente a mio avviso possono convivere con tale complessità. Siamo in pieno balbettio algebrico, e l’apprendimento del nuovo linguaggio, dei suoi significati e delle sue regole deve rispettare le esigenze della necessaria decantazione (metafora: sedimentazione delle sostanze solide disperse in un liquido).

(11) **I.** Capisco ora perché non riuscivano a rispondermi! Non ci intendiamo! Come ho detto all’inizio, il verbo “trovare” li mette fuori strada! Forse avrei dovuto dire “trovare una rappresentazione del numero di posto n che ci faccia capire che questo numero sta nella successione”. Troppo complicato! Non so…

M1 D’accordo sui danni dell’uso del termine “trovare“.

M2 Anch’io sono d’accordo sul rappresentare, a maggior ragione se anche questo termine (Glossario) diventa una delle parole chiave del patrimonio culturale della classe, e quindi assume un significato negoziato e condiviso (ancora Glossario).

M3 Finalmente, brava I! Rappresentare, si rappresentare, è il termine chiave.

(12) M1 Le parole di Sergio vanno messe in discussione. M3. Concordo

(13) **I.** È un momento importante, Alessandro non riesce a spiegare, forse era opportuno ricorrere ad un esempio.

(14) M3 Qui I avrebbe dovuto approfittare per far verificare la formula di Andrea per valori di n già considerati: 2, 3, 4. 30. Così i ragazzi avrebbero potuto cogliere il senso della formula, correggere il caso 30 e ‘saltarci fuori’.

(15) **M1** La richiesta della formula crea panico, è evidente. Insisto, avrei chiesto “Come fareste per trovare il numero di posto n? Poi avrei scritto, sotto dettatura, le indicazioni dei ragazzi: sono convinta che mi avrebbero dettato la famigerata formula.

(16) **M2.** Alla Bastiglia! Alla Bastiglia!

(17) **M2.** Ripeto concetti già espressi: sono sempre più convinto che sia necessario condurre gli alunni, attraverso il superamento del punto di vista aritmetico del ‘fare operazioni’, verso la capacità di vedere una scrittura come 4+ 7 × 2 da un punto di vista algebrico. Il riuscire a guidarli a concepire una forma non canonica (4+7×2) come rappresentazione di un numero (18), e quindi come rappresentazione di relazioni (additiva e moltiplicativa) fra numeri, indipendentemente dal fatto che poi ci si facciano o meno dei calcoli, sarebbe un risultato di grande valore didattico. Pensare che la scrittura di prima sia ‘essenzialmente’ una sequenza di operazioni conferisce alla scrittura stessa una sorta di ‘provvisorietà’ che blocca la sua interpretazione, a livello metacognitivo, come oggetto matematico.

(18) **I:** Ho avuto difficoltà lungo tutto il percorso. Mi accorgo ora che anche le mie domande non sono sempre state centrate: in questo caso avei dovuto sottolineare che si trattava di una relazione tra il numero di posto e la regola 1, quindi avrei potuto chiedere a Tamara "Andrea ha individuato una relazione tra la regola 1 e il numero di posto e ha parlato di un certo – 1, come possiamo esprimerlo in matematica?". D'altronde è proprio questo tipo di difficoltà che mi ha fatto desistere dal proporre alla classe l'unità ArAl su Brioshi.

M2. Credo che proprio questa difficoltà (forse è una tua difficoltà) avrebbe dovuto aprire a Brioshi.

M3. Concordo, assolutamente il "rappresentare" deve sostituire il "calcolare"

(19) **M3.** Mi chiedo come interpretavano questa scrittura i ragazzi, da come si sono comportati fin qui la lettera non era vista né come variabile né come indeterminata. Cos'era, un'etichetta vuota di significato?

ALCUNE CONSIDERAZIONI FINALI

Le stesura delle trascrizioni commentate dei processi di classe favorisce nell'insegnante la riflessione a posteriori sullo svolgimento dell'attività e sulla sua conduzione e gli impongono la sua ricostruzione critica attraverso uno sforzo interpretativo di elevata valenza formativa. Questi stessi diari consentono a ricercatori e mentori di verificare la coerenza dell'insegnante fra: prassi didattica, sue convinzioni dichiarate e suo riferimento alla teoria (matematica e dell'educazione matematica) in gioco. Richiedono inoltre l'esplicitazione di una analisi *fine* di micro-situazioni che renda manifeste all'insegnante coerenze o incongruenze della sua azione didattica. Inoltre l'analisi complessiva dei commenti conduce il docente di classe alla rielaborazione dell'attività con significative ricadute sulla pratica didattica e consente a ricercatori e mentori la rilevazione ampia e approfondita dei patrimoni culturali e degli atteggiamenti degli insegnanti.

La condivisione dei diari commentati e l'analisi delle diverse discussioni di classe sorte da una medesima situazione problematica permette di oggettivare le ragioni che le hanno determinate. Inoltre, confrontando la propria realizzazione di un certo passo del percorso di insegnamento con quella di altri colleghi, ciascun insegnante individua importanti elementi distintivi e riflette sull'efficacia o le limitazioni del proprio lavoro (interventi frettolosi e decisivi, poca attenzione all'ascolto, non comprensione di interventi potenzialmente fruttuosi, scarsa abilità nell'orchestrare voci, difficoltà nel contenere i leader o nel minimizzare gli effetti di alleanza tacite, etc).

Tutto questo conduce gli insegnanti ad acquisire via via una più profonda consapevolezza del loro modo di essere in classe, un miglior controllo dei loro comportamenti, li induce a concepire variazioni sulle modalità di insegnamento ed ad ed attuarle in modo fine.

Soffermiamoci su ciò che emerge da questi processi e sulla valenza della metodologia. Il fatto che due o tre ricercatori svolgano commenti riga per riga dei diari dell'insegnante porta ad analizzare la trascrizione a tutto campo, accostando aspetti di contenuto (l'impostazione data all'esplorazione del problema, gli aspetti matematici sviluppati, gli obiettivi perseguiti o disattesi, …) con aspetti riguardanti la comunicazione ed il linguaggio utilizzati (formulazione delle domande poste, espressioni interlocutorie usate, indirizzi operativi espressi, …) con questioni relative al controllo della partecipazione degli allievi (numerosità e tipologia degli interventi) e del contratto didattico attuato (atteggiamenti indotti negli allievi, e norme socio-

matematiche nella classe). L'analisi svolta porta a 'congelare' un'ampia gamma di considerazioni e di approfondimenti che mettono a nudo, amplificandoli, aspetti diversi della professionalità dell'insegnante (la sua conoscenza matematica e pedagogica, il suo modo di concepire l'insegnamento e rapportarsi agli allievi, lo stile di contratto attuato, le sue divagazioni o frettolosità, finanche la sua affettività). E' una vera 'radiografia' dell'insegnante di fronte alla quale, in caso di distorsioni, questi ha un salutare momento di crisi, seguito quasi sempre da una positiva reazione di sfida verso se stesso, che lo porta ad agire per una riconversione della sua professionalità.
I diari pluri-commentati offrono inoltre un ampio materiale per la costituzione di prototipi di attività di riflessione critica utili nei laboratori e tirocini di didattica disciplinare, per gli insegnanti novizi, nella formazione a distanza, per la costituzione di oggetti di apprendimento, nella formazione di mentori e supervisori per fornire loro modelli di analisi di processi didattici interattivi e discorsivi.
Tali strumenti hanno ottenuto riscontri interessanti sul campo (corsi SSIS, corsi di formazione in servizio, e-tutoring, …). Le osservazioni svolte dagli insegnanti di fronte a compiti di questo tipo riflettono molto chiaramente il suo principale obiettivo: porre il docente in situazione in modo tale da permettergli di collegare criticamente fra loro tre nodi: la propria concezione dell'argomento matematico in gioco (e della stessa matematica); il conflitto indotto dall'incontro-scontro con le modalità didattiche attuate dai colleghi e dai risultati da loro raggiunti; la mediazione fra questi due nodi prodotti dal confronto collettivo e dalla relazione dialogica con i ricercatori.

Dall'analisi dei commenti svolti, appare chiaramente, per il prevalere di certi tipi di commenti, l'epistemologia del ricercatore che li ha prodotti. Sia le concordanze come le diversità di punti di vista di tali commenti risulta fruttuosa per l'insegnante, le prime come rafforzamento del commento, le seconde per la arricchente complementarietà.

Ovviamente questa metodologia è strettamente dipendente dal coinvolgimento degli insegnanti e dalla qualità del loro impegno. Per questo non può essere significativamente usata in corsi di aggiornamento. Tuttavia la nostra ipotesi è sia possibile diffondere nella scuola e nel sociale le innovazioni metodologiche e curricolari, attraverso il dialogo dei partecipanti ai nostri progetti con colleghi e genitori.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Adler, G., Ball, D., Krainer, K., Lin. F.L., Novotna, J.: 2005, Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education, *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381

Anichini, G., Arzarello, F., Bartolotti, C., Ciarrapico, L., Robutti, O. (a cura di), 2001/04, *La matematica per il cittadino: Matematica 2001, Matematica 2003, Matematica 2004*, MIUR, Roma

Artigue, M., Perrin-Glorian, M. J.: 1991, Didactic Engineering, Research and Development Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality, *For the Learning of Mathematics*, 11, 1, 13-18

Arzarello, F., Bartolini, M.G.: 1998, Italian Trends of Research in Mathematics Education: a National Case Study in the International Perspective, in Kilpatrick J. & Sierpinska A. (a cura di), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 243-262

Ball, D, Even, R.:2008, *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, atti 15° ICMI study*, Kluver (in stampa)

Borasi, R., Fonzi, J., Smith, C., & Rose, B.: 1999, Beginning the Process of Rethinking Mathematics Instruc-tion: a Pofessional Development Program, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, (1), 49-78

Brousseau, G.: 1984,

Carofiglio G., 2007, '*L'arte del dubbio'*, Sellerio, Palermo

Ponte, J. P.: 2004, Investigar a nossa própria prática: una stratégia de formaçáo e de construçáo de conhecimento profissional, in Castro E., De la Torre, E. (eds) *Investigación en educación matemática,* University of Coruña, Spain, 61-84

Jaworski, B.:1998, Mathematics Teacher Research: Process, Practice and the Development of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 3-31

Jaworski, B.: 2003, Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282

Lerman, S.: 1990, The Role of Research in the Practice of Mathematics Education, *For the Learning of Mathematics*, 10, 2, 25-28

Malara, N.A.: 2002, Il modello italiano di ricerca per l'innovazione in didattica della matematica e la ricaduta nel mondo della scuola, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate,* vol. 25A, n. 5, 427-458

Malara, N.A.: 2003, Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project**,** in Pateman N.A. B**.** J. Dougherty, & J. Zilliox *Proceedings PME 27,* Honululu, , Università di Hawai, vol.1, 33-48

Malara, N.A.: 2005, Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra, in Santos. L. & Al. (a cura di), *Mathematics Education: Paths and Crossroads*, Etigrafe, Lisbona, 285-304

Malara, N. A., 2008, Approccio all' Early Algebra e modalità di formazione degli insegnanti, *XVIII Convegno Nazionale della Unione Matematica Italiana*, Bari, 2007, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana (in stampa)

Malara, N.A., Navarra, G.: 2003, *Progetto ArAl: Quadro teorico e Glossario*, Pitagora, Bologna

Malara, N.A., Navarra, G.: 2007, A task aimed at leading teachers to promoting a constructive early algebra approach, In D. Pitta Pantazi & G. Philippou (Eds.) *Proceedings of the 5th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, CD-ROOM, Larnaka, Università di Cipro, 1925, 1934

Malara N.A, Zan, R.: 2002, The problematic relationship between theory and practice, in English, L. (a cura di) *Handbook of International Research in Mathematics Education,* LEA, NJ, 553-580

Malara N.A., Incerti, V., Fiorini, R., Nasi, R.: 2004, *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Pitagora, Bologna

Martellotta, M., Miolo, N., Navarra, G. (2006), ArAl in Web: un ambiente di apprendimento on-line per i docenti di area matematica, in *Atti di Didamatica* 2006, Cagliari, 433-442

Mason, J.: 1998, Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243-267.

Mason, J.: 2002, *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, Falmer, Londra

NCTM: 2000, *Priciples and Standards for School Mathematics*, http://standars.ntcm.org, in italiano in: http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/

OCSE (a cura di): 2002, *Sample Tasks from the PISA Assessment: Reading, Mathematical and Scientific Literacy*, Parigi,

OCSE (a cura di): 2003, *Assessment Framework: Mathematics*, *Reading, Science and Problem Solving,* Parigi, (trad. ital.: *PISA 2003*: *Valutazione dei quindicenni*, Armando, Roma)

Potari, D., & Jaworski, B.: 2002, Tackling Complexity in Mathematics Teaching Development: Using the teaching triad as a tool for reflection analysis, *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5 (4), 351-380

Sfard, A.: 2005, What can be more practical than a good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, 58(3) 393-413

Shoenfeld, A.: 1998, Toward a theory of teaching in context, *Issues in Education*, 4(1), 1-94

Shulman, L.S.: 1986, Paradigms and Research Programs in the Study of Teaching: a Contemporary Perspective, in Wittrock, M.C. (a cura di)*, Handbook of Research on Teaching,* MacMillan, Londra, 3-36

Wood, T.: 1999, Approaching Teacher Development: Practice into Theory, in Jaworski, B. & Al. (a cura di), *Mathematics Teacher Education: Critical International Perspectives***,** The Falmer Press, Londra, 163-179

APPENDICE

FRAMMENTO INIZIALE DI UN DIARIO PLURI- COMMENTATO

Riportiamo il brano iniziale di un diario relativo al processo di attuazione del percorso in una classe di prima media svolto da una giovane insegnante incaricata annuale. Il brano documenta abbastanza bene la complessità di un diario per la varietà dei commenti che si trovano concentrati, che riguardano:

a) aspetti di carattere generale che investono questioni legate alle concezioni dell'insegnante circa la tipologia della usuale attività matematica e la pertinenza e rilevanza dell'attività proposta agli allievi nell'ottica del 'curricolo minimo' atteso dalla scuola e dai genitori;
b) aspetti di rappresentazione che investono questioni matematiche legate all'infinito potenziale ed alla generalizzazione;
c) questioni didattico-metodologiche che investono il contratto didattico, il rapporto con gli allievi e l'accertamento dell'effettiva comprensione e apprendimento degli allievi,
d) questioni linguistiche legate allo stile comunicativo dell'insegnante ed agli atteggiamenti che si inducono negli allievi.

L'argomento proposto dall'insegnante riguarda l'esplorazione di una successione dati i primi suoi tre termini (si tratta della progressione aritmetica elemento iniziale 4 e di ragione 7). L'attività è finalizzata alla determinazione di una rappresentazione generale della successione. Il brano riportato riguarda unicamente la conquista da parte dei ragazzi del senso della consegna. I commenti di analisi critica, costituenti l'ossatura del diario, sono riportati in nota per non spezzare il flusso della discussione. Gli autori dei commenti sono così indicati: I: insegnante; M1: mentore di riferimento; M2: coordinatore dei mentori; M3: responsabile della ricerca.

Insegnante: *Oggi facciamo una cosa un po' diversa dal solito*[4]
Alcuni*: Bello!*
Riccardo: *Cosa facciamo?*
Insegnante: *Facciamo un gioco. Qualcuno di voi ha mai fatto i giochi che sono sulla 'settimana enigmistica?*
Coro*: Sì!/No!*
Insegnante: *È un giornale dove ci sono i cruciverba e altri giochi.*
Insegnante: *Io scrivo dei numeri e poi metto degli altri spazi vuoti che vuol dire che ci saranno degli altri numeri:* 4 11 18 __ __ __*. Ok*[5]*?*

---

[4] M2. La 'diversità' rispetto alle attività consuete viene presentata come un aspetto motivante. Per certi aspetti lo è, per molti altri può rappresentare un distrattore (il 'Bello!' dell'intervento successivo induce il sospetto in questo senso). In linea di principio, ritengo più produttivi approcci più neutri, che introducano in modo convincente ad una 'condivisione permanente', che non enfatizzino l'episodicità.
M3. Concordo, anche se vedo questa 'apertura' più un appoggio per l'insegnante, consapevole di imbarcarsi in un'attività diversa per lei,'senza rete'. e lontana dall'usuale.
I. Voleva in realtà essere un modo per attirare l'attenzione di tutti, anche di quelli che normalmente non seguono o fanno fatica a concentrarsi. Ma può essere stata facilmente un'involontaria stampella psicologica.

Provate un attimo a pensare quali potrebbero essere i numeri.[6] *Non possiamo mettere dei numeri a caso, dobbiamo cercare di spiegare perché mettiamo quei numeri.*

Lorenzo: *forse ho capito, ... io lo so, io lo so*

Insegnante: *Lorenzo, visto che hai detto "Io lo so, io lo so, io lo so", Voce alta.*

Lorenzo: *4 + 7, 11; 11 + 7, 18; 18 + 7, 25.*

Insegnante: *E quindi che numeri aggiungi?*[7]

Lorenzo: *18 + 7, 25; 25 + 7, 32; 32 + 7, 39; 39 + 7, 46. (Alla lavagna l'insegnante scrive in colonna le seguenti uguaglianze: 4 + 7 = 11; 11+7 = 18; 18 + 7 = 25; 25 + 7 = 32; 32 + 7 = 39; 39 + 7 = 461 + 7 = 18)*

Insegnante: *Eccetera. Qualcuno non è d'accordo?*[8]

Antonio: *Ma come ha fatto?*

Sabrine: *Io non ho capito.*

Insegnante: *Tu non hai capito? Allora, Lorenzo spiega a Sabrine che cosa hai fatto*[9].

Lorenzo: *Ho sommato 4… è una catena. 4 + 7 fa 11. 11 + 7 fa 18. 18 + 7 fa 25. 25 + 7 fa 32. 32 + 7 fa 39. 39 + 7 fa 46. Ho sempre sommato 7 con quello che veniva*[10].

---

[5] M1. Avrei subito chiarito meglio alcune convenzioni: gli spazi vuoti (immagino trattini) che saranno riempiti da numeri, puntini per indicare che i numeri potrebbero essere tanti, infiniti. Questo per cominciare a fare dei distinguo tra il concreto della lavagna (con i suoi limiti di spazio) e l'astratto delle immagini mentali.
M3 concordo. Avrei messo nella successione almeno 4 termini, le virgole tra i segnaposto, i puntini alla fine per indicare l'indefinitezza della sequenza. Questi accorgimenti potrebbero evitare visioni circoscritte, fraintendimenti e superare la visione della sequenza (finita) inducendo l'idea della successione (infinita).
I Vero. Effettivamente ho dato per scontato che la scrittura presentata alla lavagna fosse chiara a tutti: puntini al posto di numeri mancanti. Non ho invece pensato a puntualizzare la differenza fra l'infinito dei numeri appunto mancanti ed il finito della lavagna.

[6] M1 Avrei prima sollecitato la classe ad individuare cosa potrebbe collegare i tre numeri, cosa hanno in comune, ovvero: perché sono stati scelti quei tre numeri?
M2. Sono d'accordo. Una migliore contestualizzazione potrebbe favorire la chiarezza del contratto didattico.
I. Giusto, non ci avevo proprio pensato. Sicuramente, la mia scarsa preparazione all'attività mi ha portato a non riflettere su questi possibili aspetti, ma ad andare subito al nocciolo del problema posto ai ragazzi.

[7] M1. Meglio, quali numeri potrebbero essere inseriti e perché?
M2 Ok. Occorre non trascurare di esplicitare che le affermazioni vanno giustificate.

[8] M3. Si dà per scontato che la regola seguita da Lorenzo sia chiara a tutti? O è un'interlocuzione? Sarebbe stato meglio rilanciare esplicitamente alla classe 'quale regola ha seguito Lorenzo? I. Vero. La mia domanda era mirata a vedere la loro reazione. Avrei dopo chiesto di spiegare e motivare sia la risposta affermativa che quella negativa, come poi è effettivamente successo.

[9] M1. Avrei chiesto a Lorenzo di spiegare cosa l'ha indotto a costruire i numeri successivi, ai primi tre dati, in quel modo..

[10] M3. Lorenzo esprime ciò che ha fatto a partire da 4 (primo termine). Nel riassumere dimentica di indicare il punto di partenza. Sarebbe stato opportuno un intervento di I per invitarlo a precisare. Esempio 'Che vuoi dire con 'quello che veniva', e 'da dove cominci a sommare 7?' I. Vero. Credo di aver preferito, in quel momento, lasciare proseguire la loro interazione. I ragazzi parlano veloci, si parlano uno sopra l'altro senza lasciare che l'altro finisca quasi la frase. È quindi difficile, talvolta, intervenire senza fare loro perdere il filo di quello che, magari con tanta fatica, stanno provando ad esprimere.

Sabrine: *Perché dobbiamo aggiungere quel 7?*[11]
Insegnante: *Perché dobbiamo aggiungere quel 7, chiede lei? Chi è che le risponde?*
Andrei: *Io, io!*
Insegnante: *Andrei*.
Andrei: *Perché in questa sequenza un numero è di 7 che avanza. Perché in un'altra poteva avanzare anche di 10*.
Insegnante: Hai *capito?*[12]
Sabrine: *No*.
Insegnante: *Laura spiegaglielo tu*.
Laura: *Sabrine, la prof. ha dato dei numeri: 4, 11 e 18. Prova a contare quanti numeri ci sono da 4 fino a 11*.[13]
Sabrine: 18.
Laura: *Allora: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Sono 7 numeri. Da 11 a 18 quanti sono? Sono altri sette numeri, te lo dico io. E la prof. ha messo dei puntini e tu devi scoprire quel numero che andando avanti aggiungevi di altri 7*.
Sabrine: *Ah! Ho capito*.
Insegnante: *Hai capito?*
Sabrine: *Sì*[14].
Insegnante: *Ok, quindi qual è la regola?*[15]
Riccardo: *Che devi scoprire quanti numeri ci vogliono per arrivare lì*.[16]
Insegnante:: *Beh, fammi una regola un po' più bella*.[17]
Riccardo: *Allora, conti quanti numeri ci sono da uno all'altro e poi vai avanti così*.

---

[11] M2. Sabrine mette il dito nella piaga e apre una porta nella direzione anticipata da M1 nel Commento precedente. Bello.

[12] M3 Non è molto appropriato questo intervento. Quello che l'A. dice non è chiaro e I avrebbe dovuto invitarlo ad essere più preciso.

[13] M2. Laura fa del suo meglio per condurre Sabrine alla comprensione che c'è un 'passo di 7 unità' fra un numero e l'altro della successione.

[14] M1. Forse era il caso di verificare , magari con un esempio, se Sabrine ha veramente capito.
M2. Sono d'accordo.
M3. Sembra un dialogo sterile. Non va bene accontentarsi di un SI. Bisogna accertarsi dell'effettiva comprensione e dare all'allieva, che magari ha intuito il procedimento, l'opportunità di consolidarlo. Bastava almeno chiedere alla allieva cosa avrebbe collocato dopo il numero 18.
I. Vero, avrei dovuto verificare. Di solito lo faccio, quando vedo che qualcuno ha delle incertezze gli faccio fare un esercizio in più o gli chiedo un ulteriore esempio. Credo che, in quel momento (ma direi nel corso di tutta l'esperienza), l'errore più comune che ho fatto sia stato l'aver fretta di andare avanti e di fare tutto ciò che mi ero prefissata. Ho tagliato la questione, perché mi sembrava banale (ma avrei dovuto pensare a loro) e di averci già "perso" anche troppo tempo.

[15] M1. Avrei posto la questione in modo interlocutorio: possiamo parlare di 'regola di comportamento'?
M2 I dovrebbe cercare di condurre la classe verso la rappresentazione della relazione fra i numeri della successione.
M3. Concordo. l'insegnante poteva approfittare per intervenire, focalizzando l'attenzione su un termine ed il suo successivo e lavorare sulle verbalizzazioni della relazione che li lega. Il termine 'regola' è gergale, meglio usare relazione. I ho usato "regola" perché pensavo che questo termine fosse chiaro per tutti e più immediato.

[16] M3. Lì dove? Per l'allievo il compito riguarda unicamente i posti da riempire?

[17] M3. Espressione gergale, il termine 'bello' viene usato come sinonimo di 'chiaro'.

Giuseppe: *In base ai numeri dati, dobbiamo trovare il numero in cui si va avanti...*
Lorenzo: *In base ai numeri dati dobbiamo trovare il comando.*
Giuseppe: *E cos'è il comando?*
Insegnante: *Infatti, il discorso è questo. Quando noi dobbiamo trovare una regola o dobbiamo spiegare qualcosa a qualcuno, bisogna che questo qualcuno capisca quello che noi diciamo. Nella nostra testa magari è chiarissimo, però non sempre quello che poi noi diciamo è così chiaro anche per gli altri*.[18]

[18] M3. Molto pertinente e chiarificatrice del contratto questo intervento di I.
I. Grazie. Questo è per me il problema più grande da affrontare quando si vuole far interagire i ragazzi fra loro.