

Faenza	1	1	2	3	4	5	1	2	3	AT
---------------	---	---	---	---	----------	---	---	---	---	-----------

20 novembre 2017

1 (Uso del registratore)

Commenti *Insegnante di classe*

Commenti *Navarra*

Commenti *Malara*

Parole Chiave: RAPPRESENTARE, RISOLVERE

DESCRIZIONE DELLA CLASSE: La classe è composta da 26 alunni, 14 femmine e 12 maschi. Nell'attività didattica partecipano quasi tutti in modo attivo e vivace. Per quanto riguarda le conoscenze e le abilità si attestano su un livello medio, fatta eccezione per alcune eccellenze. Gli alunni non hanno mai lavorato con il Progetto ArAl¹.

MARCO HA €20 NEL SUO PORTAFOGLIO E PER IL SUO COMPLEANNO RICEVE €7 DALLA ZIA. POI COMPRA UN LIBRO E NEL PORTAFOGLIO RIMANGONO €12.
 A1) QUANTO COSTA IL LIBRO?
 A2) QUALI SONO LE OPERAZIONI CON CUI CALCOLI QUESTO NUMERO?
 B) RAPPRESENTA LA SITUAZIONE².

1. I: Chi mi vuole raccontare con le sue parole quello che c'è scritto nel testo?
2. Anna: C'è un bambino che si chiama Marco che subito ha 20 euro e la zia gliene regala altri 7. Quindi bisognava fare 20 più 7 che fa 27.
3. I: Fermati Anna. Cosa ti ho chiesto?
4. Anna: Ah sì, devo raccontare cosa c'è scritto nel testo. Allora Marco aveva 20 euro e la zia gliene regala altri 7, poi Marco va in libreria e compra un libro e nel portafoglio rimane 12 euro e noi dovevamo scoprire quanto costava il libro.
5. I: Molto bene Anna. Quindi la prima domanda era trovare quanto costava il libro. **Chi vuole provare?**³
6. Matilde: Devo dire le operazioni?⁴
7. I: Sì.⁵
8. Matilde: Per trovare quanto costava il libro bisognava fare due operazioni, la prima era calcolare quanti soldi aveva in tutto quindi 20 più 7 che faceva 27 e poi fare meno 12 che fa 15.
9. I: Brava Matilde. Vediamo cosa ha scritto Leonardo e ditemi se siete d'accordo.
10. *Scrivo alla lavagna ciò che ha scritto Leonardo.*

$$20+7=27-12=15$$


¹ Poiché è la prima volta che cerco di mettere in pratica il progetto ArAl, i bambini erano perplessi e mi chiedevano se dovevano fare i dati, le rispostine ecc. Uno degli aspetti più importanti dell'impianto metodologico del progetto ArAl è quello di incrociare costantemente aspetti pratici e teorici, condividendo con la classe i costrutti principali in gioco in quella determinata fase dell'attività. Visto come sono andate le cose, per esempio, sarebbe stato opportuno chiarire il significato di rappresentare la situazione (precisando che si intende rappresentare in linguaggio matematico) analizzando la differenza fra le due prospettive del risolvere e del rappresentare (rispettivamente consegne A e B). Se questa analisi manca, gli alunni svolgono le consegne senza affrontare le differenze profonde fra il pensiero procedurale (legato al risolvere) e quello relazionale (legato al rappresentare).

² La consegna data fa pensare che l'insegnante voglia guidare i bambini dal piano del calcolo, prettamente operativo, a quello metacognitivo della analisi e rappresentazione del procedimento risolutivo. Questo non è tanto in linea con il principio ArAl 'prima rappresenta poi risolvi', tuttavia - dovendo questa attività innestarsi su modi di concepire ed agire precedenti in riferimento ai problemi - potrebbe essere una buona strategia. Così prima si opera e poi si riflette sull'azione e si rappresenta il processo risolutivo, ma nel prosieguo deve essere chiaro per i bambini che il cuore dell'attività è l'analisi, l'oggettivazione e la rappresentazione aritmetico-algebrica della procedura risolutiva.

³ La proposta dell'insegnante 'chi vuole provare' lascia inespresa la parte della frase più importante; la frase completa avrebbe dovuto essere "chi vuole provare a dire come trovare il costo del libro acquistato" da Marco. Questa poca trasparenza può disorientare i bambini.

⁴ Matilde, come prima Anna (2), esprime il consueto punto di vista procedurale, che è quello forte che pervade tutta la cultura matematica degli alunni; l'insegnante stesso lo sostiene rispondendo "Sì" (7). È proprio da questo conflitto che bisogna partire per guidare la classe verso il pensiero relazionale, in modo da costruire delle competenze matematiche in una visione prealgebrica.

⁵ La richiesta di Matilde, 'Devo dire le operazioni?' mostra disorientamento. Il 'Sì' lapidario dell'insegnante indirizza verso il calcolo e blocca lo studio relazionale del problema.

		progetto ArAl		2016/17		Rappresentare/risolvere			2					
Faenza				1	1	2	3	4	5	1	2	3	AT	

11. Alessandro: Va bene anche così.
12. I: Perché?
13. Alessandro: Perché è la stessa cosa, viene fuori lo stesso risultato.
14. Arianna: Io non sono d'accordo.
15. I: Perché non sei d'accordo?
16. Arianna: Perché a destra e a sinistra dell'uguale deve venire fuori lo stesso risultato ⁶, non è che da una parte viene fuori 27 e dall'altra fa 15.
17. I: Angelica, avevi la mano alzata, vuoi aggiungere qualcosa?
18. Angelica: No, volevo dire la stessa cosa.
19. I: Cioè cosa volevi dire?
20. Angelica: Volevo dire che non si può scrivere così perché sia da una parte che dall'altra dell'uguale deve venire la stessa cosa.
21. I: Cosa vuol dire la stessa cosa?
22. Angelica: Vuol dire che le due operazioni non possono fare risultati diversi.
23. I: Quindi Leonardo perché la tua uguaglianza non è giusta?
24. Leonardo: Perché il risultato della prima operazione è 27 mentre dopo c'è 27-12 che fa 15 non 27.
25. Anna F: Anche io all'inizio avevo scritto come Leonardo, poi mi sono ricordata che a destra e a sinistra dell'uguale ci devono essere i numeri uguali.
26. I: Sicura numeri uguali?
27. Anna F.: Non numeri uguali, la somma.
28. I: Cosa intendi per somma?
29. Anna F.: 20 più 7 è una somma.
30. I: Ok, ma 27 meno 12 cosa è?
31. Anna F.: Una sottrazione.
32. I: Non ho chiesto che operazione hai usato, ho chiesto cosa è 27 meno 12.
33. Anna non sa rispondere e interviene Gabriele.
34. Gabriele: È una differenza.
35. I: Bene. Quindi Anna prova a spiegare meglio quello che volevi dire.
36. Anna F: A destra e a sinistra dell'uguale ci devono essere gli stessi risultati.
37. I: Quindi siamo d'accordo che per trovare quanto costa il libro dovevo fare...
38. Filippo: ... 20 più 7 che fa 27 e poi 27 meno 12 che fa 15. Il libro costava 15 euro.
39. I: Molto bene la prima consegna. Passiamo alla seconda che chiedeva quali sono le operazioni con cui calcoli quanto costa il libro.
40. Tutti i bambini hanno scritto che le operazioni sono $20+7=27$ e $27-12=15$ ⁷
41. I: Quali sono le operazioni che conoscete?
42. Nicole: Addizione, sottrazione, divisione e moltiplicazione.
43. I: Quindi rifaccio la domanda: quali operazione sono necessarie per calcolare il costo del libro?
44. Nicole: Prima un'addizione e poi una sottrazione.
45. I: Ok, passiamo allora all'ultima richiesta: rappresenta la situazione ⁸.
46. Alcuni alunni fanno dei fumetti più o meno elaborati quindi scegliamo tre rappresentazioni più matematiche ⁹

⁶ Un'ulteriore conferma dei commenti precedenti: Arianna vede a sinistra e a destra dell'uguale uno stesso 'risultato'. Momenti come questo sono ideali per proporre alla classe l'incontro con termini del Glossario fondativi del pensiero relazionale: l'uguale, rappresentazione, le forme canonica e non canonica di un numero, la dualità processo/prodotto, la dualità trasparente/opaco.

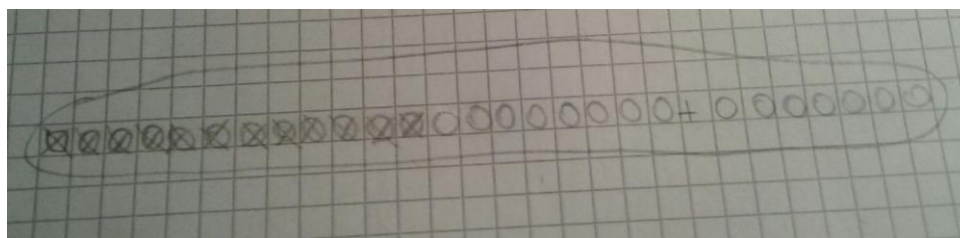
⁷ Con questa consegna ho capito la confusione che c'è tra le parole calcoli e operazioni.

⁸ L'insegnante concorda categoricamente con un'allieva che le operazioni che risolvono il problema sono 'prima una addizione e poi una sottrazione'. Questa asserzione implicitamente induce gli allievi a considerare che la soluzione discussa nella classe sia l'unica possibile, in realtà un bambino avrebbe potuto risolvere il problema confrontando il valore dei soldi iniziali di Marco con quello dei soldi finali e riconoscere che il costo del libro si ottiene dalla somma tra la loro differenza e la somma donata dalla zia. In questo procedimento si attua prima una sottrazione, (tra le quantità di soldi iniziali e rimasti) e poi una addizione (tra la differenza tra la quantità di soldi iniziali e quella di soldi rimasti e la quantità di soldi regalati dalla zia). Sarebbe stato interessante operare su questo piano anche per non radicare nei bambini l'idea che i dati numerici vadano utilizzati nell'ordine in cui si presentano.

⁹ Poiché non ho esplicitato bene che volevo la rappresentazione in linguaggio matematico, molti hanno fatto dei disegni sottoforma di fumetto.



47. Marianna: La prima parte l'ho capita perché 7 si va ad aggiungere a 20 però la seconda parte non l'ho capita perché 27 è la somma di 20 e 7, ma non capisco cosa c'entra il 15 sotto il 27, al massimo ci deve stare il 12.
48. Nicole: Anche io la prima parte l'ho capita.
49. I: Cioè cosa vuoi dire?
50. Nicole: Che 20 sono i soldi che aveva prima e 7 quelli che ha aggiunto. Però dopo Marco toglie un numero, non è che ha subito 15, quindi non capisco, e poi $12 + \text{libro}$ non è tanto chiaro¹⁰.
51. Giulia: Forse Davide nella seconda parte voleva fare 27 meno 15 uguale 12.
52. Nicole: Ma Marco come fa a fare meno 15 che non ce l'ha.
53. Davide: Io intendevo che i 15 euro li dava al negoziante e alla fine rimane 12 euro **più il libro**¹¹.
54. I: Vediamo un'altra rappresentazione¹².



55. Filippo: Vedo che ci sono 20 euro che Marco aveva all'inizio poi 7 che si aggiungono e ne toglie 12.
56. Marianna: Ma lui non toglie 12 euro, anzi sono quelli che rimane.
57. Gabriele: Ho sbagliato a contare. Le crocette dovevano essere 15. *Vengono aggiunte 3 crocette.*
58. Nicole: Non va bene lo stesso perché 15 non c'è nel testo quindi come fai a fare 15 crocette se non sai quanto costa il libro. 15 è quello che devi trovare¹³.
59. Alessandro: Infatti da questo disegno capisco che Marco aveva 20 euro più 7 e ne toglie 15.
60. I: Qualcuno riesce a modificare il disegno in modo che si capisca la situazione?
61. Tommaso: Possiamo circondare 12 e scrivere 'rimasti' e contare quanti sono gli euro per il libro e fare una freccia che esce dall'insieme¹⁴.
62. I: Ora vediamo la terza rappresentazione.

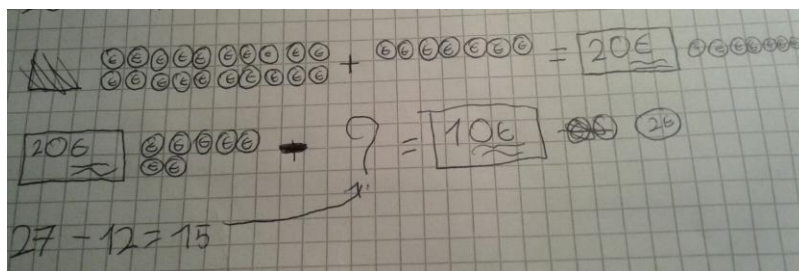
¹⁰ Quando gli alunni sono dei neofiti nell'uso delle lettere, spesso confondono il nome della cosa (qui 'libro') con il numero che nel problema è collegato a quella cosa (qui 'costo del libro'). Bisognerebbe che l'insegnante si 'facesse le antenne' per intervenire ogni volta che si presenta questa misconcezione.

¹¹ Trovo molto espressiva, seppure impropria, la rappresentazione ' $12 + \text{libro}$ ' equiparata a 27. È una equazione in forma embrionale su cui l'insegnante avrebbe potuto lavorare molto, a partire dal significato del termine 'libro'.

¹² Come ho scritto in precedenza, con la consegna 'rappresenta' si vorrebbe favorire il pensiero relazionale, mentre le rappresentazioni iconiche o miste viste sinora esprimono quello procedurale: fare operazioni, trovare risultati.

¹³ Nicole intuisce la differenza fra il numero che si deve trovare (15) e la spesa (12). Molti compagni, conoscendo il risultato, lo manipolano come se fosse un dato.

¹⁴ Trovo povera la rappresentazione delle quantità attraverso stringhe di pallini, ciascuno indicante l'unità, è una regressione data l'età dei bambini. È chiaro che se non si è lavorato prima sulle rappresentazioni verbali o aritmetico-algebriche; per i bambini rappresentare vuol dire disegnare o al meglio schematizzare graficamente la situazione.



63. Edoardo: Io sono partito dal considerare che all'inizio Marco ha 20 euro e poi la zia gliene regala altri 7 e fa 27. Poi 27 meno punto di domanda perché non so quant'è il costo del libro uguale a 12.
64. Alessandro: Ma se noi abbiamo fatto 27 meno 12 dopo l'uguale ci va il punto di domanda.
65. Tommaso: Si è sbagliato, doveva fare il contrario.
66. Edoardo: Eh no, perché dopo sembra che lui li perda i 12.
67. Tommaso: Ma noi li dobbiamo togliere 12 per trovare quelli gli servono per il libro.
68. A questo punto non riuscivano a mettersi d'accordo quindi sono intervenuta.
69. I: Qual era il nostro obiettivo?
70. Coro: Rappresentare la situazione.
71. I: Quindi Edoardo ha rappresentato quello che c'era scritto nel testo?
72. Qualcuno dice sì altri no.
73. Quindi rileggo la situazione indicando man mano con il dito il disegno e alla fine tutti giungono alla conclusione che nel disegno di Edoardo è rappresentata la situazione¹⁵.
74. Edoardo: Infatti io ho illustrato quello che c'era scritto nel testo, non un modo di risolvere.
75. I: Bravo Edoardo! Quindi chi prova a dirmi cosa c'era scritto nel testo?
76. Mattia: C'era scritto che lui aveva 20 euro e ne arrivano altri 7, poi ne spende qualcuno che però non sappiamo quanto e ne rimane 12.
77. Tommaso: Ma così non trovo quanto costa il libro.
78. Alessandro: La terza consegna chiedeva di rappresentare il testo non di trovare quanto costa il libro, quindi va bene come ha fatto Edoardo.
79. Tommaso: Ho capito ora.
80. I: Edoardo cosa significa il punto interrogativo?
81. Edoardo: Il costo del libro.
82. I: Molto bene Edoardo, ma posso mettere qualcos'altro al posto del punto interrogativo?
83. Matilde: Posso mettere una macchia.
84. Davide: Oppure una lettera tipo 'c' che sta per costo.
85. I: Ok, molto bene, quindi possiamo scrivere al posto del punto di domanda la lettera c cioè $20+7-c=12$.
86. Marianna: Quindi $c=27-12$.
87. I: Esatto, poi per trovare c faccio la sottrazione¹⁶.
88. Edoardo: Oppure possiamo usare una x.

¹⁵ La discussione promossa dal protocollo di Edoardo è interessante perché finalmente porta a riflettere su qualcosa che comincia a scostarsi dal pensiero unico del 'fare calcoli'. Il suo ragionamento (63) è riconducibile a questa rappresentazione: $20+7-?=12$ (Edoardo sente il bisogno di fare subito il calcolo parziale e ottenere 27, ma per ora non importa) che è ostica per altri, più legati al risultato (64, 65). L'aspetto che andrebbe sottolineato ora è che, mentre se si fanno i calcoli si eseguono nell'ordine un'addizione $20+7=27$ e poi una sottrazione $27-12=15$, il punto di vista del rappresentare conduce ad una pluralità di rappresentazioni: $20+7-c=12$; $12=20+7-c$; $20+7=c+12$; $c+12=20+7$; $7+20=c+12$; $c+12=7+20$; ecc. Alcune di esse esprimono meglio la semantica della situazione, altre di meno ma esprimono comunque la semantica della matematica. In conclusione: gli alunni debbono (a) individuare le relazioni – additive e di equivalenza – fra gli enti noti e sconosciuti del problema e quindi (b) rappresentarle, evidenziando le proprietà applicate (commutativa e simmetrica dell'uguaglianza). Come si vede da queste note, il rappresentare (prospettiva algebrica) è infinitamente più ricco del risolvere (prospettiva aritmetica).

¹⁶ Avallando l'uso della sottrazione l'insegnante riporta il discorso sul piano aritmetico. Una volta impostata un'equazione del tipo $20+7=c+12$ bisognerebbe proseguire a livello algebrico, per esempio in questo modo:

$$20+7=c+12$$

$$27=c+12$$

$$27-12=c+12-12$$

$$15=c$$

Se si preferisce si può applicare la proprietà simmetrica dell'uguaglianza (invertire 15 e c):

$$c=15$$


Si sostituisce la forma non canonica $20+7$ con quella canonica 27;

si applica il primo principio di equivalenza (togliendo 12 da entrambe le parti dell'uguale, v. [Unità della bilancia](#));

si traduce la conclusione in linguaggio naturale, per esempio: "15 euro è il costo del libro".

Se si preferisce si può applicare la proprietà simmetrica dell'uguaglianza (invertire 15 e c):

"Il costo del libro è di 30 euro".

		progetto ArAl		2016/17		Rappresentare/risolvere					5			
Faenza				<i>1</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	4	<i>5</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	AT	

89. I: Bene, la lettera c o x si chiama incognita¹⁷

¹⁸

¹⁷ Si potrebbe precisare che in questo caso la lettera sta per l'incognita; in altri casi (per esempio lavorando con la [griglia dei numeri](#)) si può esplorare il significato della lettera come variabile.

¹⁸ A chiusura mi permetto di evidenziare come tutto il diario si sviluppa a partire dalla proposta, opaca, fatta dall'insegnante 'chi vuole provare' (9) che lascia inespresa la parte frase ('chi vuole provare a dire come trovare il costo del libro acquistato' da Marco. Questa poca trasparenza disorienta gli alunni, tant'è che una bambina (Matilde (10)) chiede: "Devo dire le operazioni?". Il 'SÌ' lapidario dell'insegnante blocca lo studio relazionale del problema.

Mi permetto di ipotizzare un percorso che poteva essere generato dall'insegnante se invece avesse voluto indirizzare gli allievi verso un tale studio. Invece di 'Sì' avrebbe dovuto dire: "No, dobbiamo dire come arriviamo a stabilire il costo del libro sulla base delle informazioni che abbiamo. Come si ottiene secondo voi il costo del libro?" L'obiettivo di questa domanda non è però operativo ma è quello di portare gli allievi a formulare la frase: "Il costo del libro si ottiene per differenza tra il soldi posseduti da Marco ed i soldi rimasti a Marco".

A questo punto l'insegnante avrebbe potuto chiedere: "Cosa sappiamo del denaro posseduto da Marco?"

Probabilmente i bambini avrebbero dato una risposta essenzialmente numerica, ad esempio $20+7$, oppure 27. L'insegnante avrebbe dovuto chiedere: "Cosa è questo numero? Cosa esprime? Diciamolo bene". L'obiettivo è di portare gli alunni a dire: "a quantità dei soldi posseduti da Marco è (data dal)la somma tra la quantità dei soldi posseduti inizialmente da Marco e quella dei soldi ricevuti dalla zia.

Probabilmente i bambini avrebbero risposto: "Sono tutti i soldi di Marco".

L'insegnante avrebbe detto: "Sì, ma come determiniamo il totale di soldi di Marco?"

Probabilmente i bambini avrebbero risposto: "Sommando i soldi iniziali con quelli dati dalla zia".

L'insegnante avrebbe allora proposto una formulazione completa della frase con l'esplicitazione del soggetto. Si sarebbe arrivati a scrivere alla lavagna: "La quantità dei soldi posseduti da Marco è (data da)la somma tra quella da lui posseduti inizialmente e quella ricevuti dalla zia".

Collegando le due parti del ragionamento si sarebbe giunti alla frase: "Il costo del libro è la differenza tra la quantità dei soldi posseduti da Marco, che sono la somma delle quantità dei soldi iniziali di Marco e dei soldi ricevuti dalla zia, ed i soldi rimasti a Marco".