PDTR Project	Italy	1	Successioni

IC Belloni, Colorno (PR), 1A	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*1*	***2***	*3*	***FM***

16 febbraio 2007 Verbale 1 *(uso del registratore)*

Commenti dell'insegnante titolare della classe
Commenti del mentore (M: Loredana Gherpelli)
Commenti del mentore coordinatore (Giancarlo Navarra)
Commenti del responsabile del progetto (Nicolina A. Malara)

I termini dei Commenti evidenziati **in grassetto** appartengono al Glossario ArAl.

La classe è composta da 19 ragazzi, 9 maschi e 10 femmine. Nella classe sono presenti 5 ragazzi extracomunitari, tre dei quali non mostrano particolari problemi linguistici mentre due evidenziano alcune lacune di comprensione e comunicazione. È presente un ragazzino segnalato che, in realtà, non evidenzia carenze maggiori di altri.
La classe è molto vivace, talvolta indisciplinata e poco responsabile: sono, infatti, consuetudini abbastanza comuni alzarsi dal proprio banco durante le lezioni per i più disparati motivi, parlare senza alzare la mano, giocare durante le lezioni e sporcare la classe in modo eccessivo con foglietti, merende, punte della matita, fazzoletti ed altro. Sono, inoltre, presenti alcuni elementi di maggior disturbo che, nella disposizione dei banchi, si è cercato di contenere. Sul piano della socializzazione, la classe è abbastanza affiatata. Si evidenzia però, talvolta, un'insofferenza generale verso i comportamenti di alcuni compagni.
La classe ha un livello di partenza medio-basso. La partecipazione alle lezioni, a parte le frequenti distrazioni, è abbastanza buona ed attiva. I ragazzi devono ancora capire e fare proprio un metodo di studio e di lavoro, alcuni alunni non eseguono i compiti a casa oppure li eseguono in modo superficiale ed incompleto ed alcuni non sempre portano il materiale giusto.

I: Oggi facciamo una cosa un po' diversa dal solito[1].
A: Bello!
A (Riccardo): Cosa facciamo?
I: Però dobbiamo essere molto bravi nel senso che ognuno potrà dire la sua opinione, però ovviamente come al solito ci sono le regole, perché se tutti parlate contemporaneamente, cosa ne viene fuori?
A (Andrei): Niente.
C: Un gran casino!
I: Esatto. Quindi bisogna stare molto bravi. Ognuno dice la sua perché è importante. Qualcuno di voi ha mai fatto i giochi che sono sulla settimana enigmistica?
G: Sì!
G: No!
I: Qualcuno sì e qualcuno no.
A (Justice): Io non so neanche cos'è!
A: Io lo so cos'è!
I: È un giornale dove ci sono i cruciverba e altri giochi. Se io vi scrivo dei numeri: 4, 11, 18 e poi vi metto degli altri spazi vuoti che vuol dire che ci saranno degli altri numeri. Ok[2]?

4 11 18 ....

A (Lorenzo): Forse ho capito!
I: Provate un attimo a pensare quali potrebbero essere i numeri.[3]
I: Che cosa ho detto Andrei?
A (Andrei): Di stare zitti.

---

[1] *La 'diversità' rispetto alle attività consuete viene presentata da molti insegnanti come un aspetto motivante. Per certi aspetti lo è, per molti altri può rappresentare un distrattore (il 'Bello!' dell'intervento successivo induce il sospetto in questo senso). In linea di principio, ritengo più produttivi approcci più neutri, che introducano in modo convincente ad una 'condivisione permanente', che non enfatizzino l'episodicità. Nel Commento 79 riprenderò il tema.*
[2] *Avrei subito chiarito meglio alcune convenzioni: gli spazi vuoti (immagino trattini) che saranno riempiti da numeri, puntini per indicare che i numeri potrebbero essere tanti, infiniti. Questo per cominciare a fare dei distinguo tra il concreto della lavagna (con i suoi limiti di spazio) e l'astratto delle immagini mentali.*
[3] *Avrei prima sollecitato la classe ad individuare cosa potrebbe collegare i tre numeri, ovvero: perché sono stati scelti quei tre numeri? Sono d'accordo. Una migliore contestualizzazione potrebbe favorire la chiarezza del **contratto didattico**.*

I: Non ho detto di stare zitti, attenzione.
A (Andrei): Che ognuno può dire la sua però stiamo attenti agli altri.
I: Esatto, bravissimo, quindi mano alzata eccetera. Quindi, questi tre numeri. Però possiamo mettercene degli altri. Ovviamente non possiamo mettere dei numeri a caso, ma dobbiamo cercare di spiegare perché mettiamo quei numeri. Lorenzo, visto che hai detto "Io lo so, io lo so, io lo so". Voce alta.
A (Lorenzo): 4 + 7, 11; 11 + 7, 18; 18 + 7, 25.
I: E quindi che numeri aggiungi?[4]
A (Lorenzo): 18 + 7, 25; 25 + 7, 32; 32 + 7, 39; 39 + 7, 46.
I: Eccetera. Qualcuno non è d'accordo?
A: Ma come ha fatto?
A: Io non ho capito.
I: Tu non hai capito? Allora, Lorenzo spiega a Sabrine che cosa hai fatto[5].
A (Lorenzo): Ho sommato 4… è una catena. 4 + 7 fa 11. 11 + 7 fa 18. 18 + 7 fa 25. 25 + 7 fa 32. 32 + 7 fa 39. 39 + 7 fa 46. Ho sempre sommato 7 con quello che veniva.
A (Sabrine): Perché dobbiamo aggiungere quel 7?[6]
I: Perché dobbiamo aggiungere quel 7, chiede lei? Chi è che le risponde?
A (Andrei): Io, io!
I: Andrei.
A (Andrei): Perché in questa sequenza, è un numero, in questo qua è di 7 che avanza. Perché in un'altra poteva avanzare anche di 10.
I: Hai capito?
A (Sabrine): No.
I: Laura spiegaglielo tu.
A (Laura): Sabrine, la prof. ha dato dei numeri: 4, 11 e 18. Prova a contare quanti numeri ci sono da 4 fino a 11.[7]
A (Sabrine): 18.
A (Laura): Allora: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Sono 7 numeri. Da 11 a 18 quanti sono? Sono altri sette numeri, te lo dico io. E la prof. ha messo dei puntini e tu devi scoprire quel numero che andando avanti aggiungevi di altri 7.
A (Sabrine): Ah! Ho capito.
I: Hai capito?
A (Sabrine): Sì[8].
A (Francesco): Come quello che ci facevano fare alle elementari.
I: Spiegami, perché io alle elementari non c'ero.
A (Francesco): Ti facevano fare, dovevamo fare tipo per 4 e trovavamo la cifra. Adesso non me le ricordo.
A (Lorenzo): No! Dovevamo fare il comando. Da 4 a 7.
I: No, spiegamelo bene che non ho capito.
A (Lorenzo): Allora, quella lì è una numerazione. Numero secondo il comando + 7 da 4.
I: Quindi + 7 è il comando[9]?
A (Lorenzo): Sì.
I: Ok, quindi qual è la regola[10]?

---

[4] *Meglio, quali numeri inserisci?*
[5] *Avrei chiesto a Lorenzo di spiegare perché ha costruito i numeri successivi, ai primi tre dati, in quel modo. Questione interessante. Sostituire al 'cosa' il 'perché'. Però in questo momento, con una classe ancora 'immatura', mi sembra un compito troppo impegnativo. Già spiegare il 'cosa', e cioè il* ***processo*** *(mentale), è un'operazione complessa, di tipo metacognitivo (rifletto* su *quello che ho fatto 'nella mia testa' per poterlo spiegare ai compagni). Spiegare* perché ho *affrontato l'esplorazione della situazione in questo modo è ancora più difficile, perché devo 'riflettere sulla riflessione', e quindi attivare un processo meta-metacognitivo. Naturalmente la mia è una lettura a tavolino, indotta dalla fine osservazione del mentore (M).*
[6] *Sabrine mette il dito nella piaga e apre una porta nella direzione anticipata da M nel Commento precedente. Bello.*
[7] *Laura, per semplificare la problematica, dà una spiegazione non corretta che può risultare fuorviante; meglio, forse, sarebbe stato chiedere l'aiuto di Lorenzo che ha messo a fuoco la corrispondenza tra un numero ed il suo successivo, magari scrivendo alla lavagna quello che Lorenzo indica. Non capisco bene perché 'non corretta' e 'fuorviante'. Mi sembra che Laura faccia del suo meglio per condurre Sabrine alla comprensione che c'è un 'passo di 7 numeri' fra un numero e l'altro della successione.*
[8] *Forse era il caso di verificare , magari con un esempio, se Sabrine ha veramente capito. Sono d'accordo. La domanda posta in questo modo permette all'alunno di 'squagliarsela'.*
[9] *Che brutto termine aveva usato l'insegnante delle elementari. Anche in una lettura del tipo* ***'balbettio algebrico'***, *sarebbe meglio un termine meno 'imperioso'.*
[10] *Avrei posto la questione "sinonimi": invece di 'comando', possiamo parlare di 'regola di comportamento'?*

A (Riccardo): Che devi scoprire quanti numeri ci vogliono per arrivare lì.
I: Beh, fammi una regola un po’ più bella.
A (Riccardo): Allora, conti quanti numeri ci sono da uno all’altro e poi vai sempre avanti così.
A (Giuseppe): In base ai numeri dati, dobbiamo trovare il numero in cui si va avanti... no...
A (Lorenzo): In base ai numeri dati dobbiamo trovare il comando.
A (Giuseppe): E cos’è il comando?
I: Infatti, il discorso è questo. Quando noi dobbiamo trovare una regola o dobbiamo spiegare qualcosa a qualcuno, bisogna che questo qualcuno capisca quello che noi diciamo. Nella nostra testa magari è chiarissimo, però non sempre quello che poi noi diciamo è così chiaro anche per gli altri. Vedi la spiegazione di Lorenzo che alla Sabrine non era tanto chiara. Invece quando poi lo ha spiegato la Laura abbiamo capito. Sempre fare attenzione a quello che diciamo perché dobbiamo mettere gli altri in condizione di capire quello che dobbiamo fare. Io non so cosa è il comando. Se tu mi fai una regola con dentro la parola “comando”, io non capisco. Allora, chi mi sa dare una regola facile facile che tutti possono capire?[11]
A: Io! Io!
I: Justice.
A (Justice): Prima trovo 11, poi trovo la differenza e poi vado avanti così.
I: E ti sembra una regola[12]?
A: Conti e scrivi il numero.
I: Partendo da questo esercizio[13], io voglio trovare la regola per questo esercizio. A partire da 4…
A (Veronica): Si fa[14] 11 – 4 e si trova il numero e poi si aggiunge sempre quello stesso numero.
I: Allora possiamo dire che quello stesso numero lo chiamiamo…[15]
A (Veronica): Comando.
A (Justice): Comandos.
I: Allora, però, lo dico qual è il comando, non posso dire ‘comando’ senza spiegare cos’è. Come quando facciamo i problemi e vi dico che i numeri che utilizzate da qualche parte ci devono essere, non potete arrivare con un numero che prima non c’era. Quindi che sia sempre chiaro quali sono i vari numeri che utilizziamo. Adesso vi do un foglio.
A (Giuseppe): E lo facciamo.
A: Adesso?
I: E provate a guardare un po’. È fondamentalmente quello che abbiamo fatto finora. Completiamo la serie[16]. Justice.
A (Justice): 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, … Sono troppi.
I: Dai!
A (Justice): Eh! 53, 60...
I: Quindi, a partire da 4, la regola è?
A (Justice): Aggiungi 7.
I: Bravo.
[Veronica va a casa]
I: Quindi, a partire da 4, aggiungi 7. Completiamo la tabella[17]. La tabella ha quattro colonne. Nella prima ho il numero d’ordine della successione. Che cos’è il numero d’ordine? È il numero di posto dei vari posti[18]. Il 4 è al primo posto, l’11 è al secondo, il 18 al terzo e così via. Quindi, seconda colonna. Chi è che la completa?
C: Io! Io!

---

[11] *Non sono d’accordo con il commento di I su Laura-Sabrine, inoltre di nuovo I perde l’occasione per far intervenire Lorenzo affinché possa spiegare il significato che lui attribuisce alla parola “comando” (in questo contesto). Secondo punto: la “regola” non necessariamente deve essere “facile, facile”, è importante invece che sia agile la sua lettura, la sua interpretazione.*

[12] *Mi sembra che la classe stia continuando ad usare un termine – ‘regola’ - al quale ognuno dà una sua personale interpretazione, non soggetta a riflessione* ***collettiva*** *e quindi a* ***condivisione****. Cos’è, in questo contesto, la ‘regola’?*

[13] *Proporrei di usare il termine ‘esercizio’ per situazioni meno raffinate di quella in esame. Mi dà l’impressione quasi che svilisca il contesto problematico che la classe sta esplorando.*

[14] *Veronica privilegia l’aspetto operativo, ‘aritmetico’, del fare. I dovrebbe cercare di condurre la classe lentamente verso delle riflessioni sulla* **rappresentazione** *della* ***relazione*** *fra i numeri della successione.*

[15] *Avrei commentato: in questo caso (situazione problematica), quello stesso numero è il numero 7, fare quello che dice Veronica significa ubbidire ad un comando o seguire una regola.*

[16] *Attenzione, i numeri fanno parte di una successione (non ‘serie’), che non si può completare! Questo poteva essere un buon momento per sollecitare i ragazzi a discutere sulla possibilità di terminare la successione.*

[17] *Sarebbe stato meglio inserire nel diario un disegno della lavagna. La lettura sarebbe stata favorita.*

[18] *Penso ad un lapsus: “È il numero di posto dei vari numeri”. Un’altra considerazione: sembra che I ponga la domanda (‘Che cos’è il numero d’ordine?’) e si dia da sola la risposta senza attendere quella della classe. Capisco bene? Perché non ha lasciato che rispondessero gli alunni?*

A (Giuseppe): 4, 11, 18, 25, 32.
I: Operazioni eseguite per saltare dal primo numero. Quindi cosa facciamo? Christian. Vedi che partiamo da 4. Nel secondo posto, come arriviamo a 11? Facciamo 4 +…
A (Christian): Eeeeeeeem….
I: Come arriviamo a 11? Facciamo 4 + … ?
A (Christian): Tre?
I: A 11? Sabrine.
A (Sabrine): + 7.
I: Facciamo 4 + 7. E nel terzo posto, Sabrine, facciamo?
A (Sabrine): 4 + 7 + 7.
A (Justice): Ma non era meglio fare 4 × 2?[19]
I: E nel quarto posto?
A (Sabrine): 4 + 7 + 7 + 7.
I: E nel quinto?
A (Sabrine): 4 + 7 + 7 + 7 + 7.
I: E se ci fosse un sesto?
A (Sabrine): 4 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7.
I: Esatto. Allora, troviamo adesso…
A (Andrei): Non ho capito. Al primo posto cosa ci metto?
I: Beh, al primo posto c'è il 4.
A (Andrei): Io ho messo 4 × 1[20].
I: Beh, però non c'è nessun × lì. Il primo posto è 4. Poi il secondo faccio 4 + 7, nel terzo 4 + 7 + 7 e così via. Allora, ricetta matematica. Quale sarà la ricetta matematica[21]? Vi aiuta. Crinela. Guarda l'ultima colonna, la ricetta matematica per la costruzione del numero. Come faccio ad arrivare a 11? Posso fare 4 + 7 ma posso anche fare 4 +…
A (Sabrine): 18?[22]
I: Biagio?
A (Biagio): 4 + (7 × 1).
I: Esatto[23]. Perché abbiamo visto che per arrivare a 11… Biagio, spiegalo tu.
A (Biagio): Perché fare 7 × 1 è sempre 7. Quindi si fa 7 × 1.
I: Quindi abbiamo visto che per arrivare a 11 dobbiamo 4 + 7, però come dici tu, 7 è uguale a…[24]
A (Biagio): 7 × 1.
I: Quindi dire 4 + 7 o dire 4 + (7 × 1) è uguale. E allora nella terza riga cosa mettiamo Biagio?[25]
A (Biagio): 4 + (14 × 1).

---

[19] *Perché I non commenta l'intervento di Justice? Me lo sono chiesto anch'io. Forse nella foga degli interventi quello di Justice si è perduto. La sbobinatura è preziosa anche per questo, perché consente all'insegnante riflessioni a freddo.*
[20] *Anche questo intervento avrebbe potuto essere indagato. Qual è il retropensiero di Andrei? Perché pensa al prodotto fra 4 e 1?*
[21] *I parla di 'ricetta matematica', ma i ragazzi distinguono tra ricetta in generale e ricetta matematica espressa nel linguaggio simbolico della matematica? Se per 'ricetta' intendiamo una regola di comportamento, un comando, come dice Lorenzo, allora Veronica e altri hanno già "**verbalizzato**" la regol . Forse è difficile che a questo punto della discussione i ragazzi possano rendersi conto della differenza tra quanto indicato nella terza colonna e quanto nella quarta. Dalle schede del vostro progetto vedo che la locuzione 'Ricetta matematica' compare fin dall'inizio ed, è stato, penso, deciso da insegnanti e mentore. In che modo è stato proposto poi alla classe? Com'è stato giustificato? Perché gli alunni non sono stati lasciati liberi di scegliere un nome 'alla loro portata'? Cioè frutto del livello del loro **balbettio algebrico**, e quindi della loro capacità di elaborare concetti e di nominarli?*
[22] *Cosa intendeva Sabrine?*
[23] *Meglio, invece di "esatto", "ragazzi, può essere una buona idea, cosa ne pensate?".*
[24] *Suggerirei ad I di evitare domande che costituiscono una sorta di 'invito al completamento della frase', 'telefonando' la risposta. La strategia non paga. Mi ricorda un episodio citato da Brousseau (se non sbaglio tratto da una commedia di Moliere) in cui c'è un precettore che sta facendo lezione di francese al suo allievo. I parenti assistono in silenzio. Il tema è: capire dal contesto se una certa parola è detta al singolare o al plurale (nel francese parlato non si pronuncia la –s del plurale). La parola in questione è 'moutons' (montoni). L'allievo non sa che pesci pigliare e il precettore teme che i parenti lo possano giudicare male. Per questo gira attorno all'allievo fermo con la penna in mano sussurrando 'moutons', poi non vedendo risultati, comincia a calcare la voce 'moutons'… 'moutonss'… 'moutonsss'. Finalmente l'alunno si illumina e scrive la –s alla fine della parola. L'ambiente si rasserena. Fine della citazione.*
[25] *Meglio , le due scritture sono equivalenti , cioè…. Dal mio punto di vista il nodo della questione non viene affrontato:* perché si introduce la ***rappresentazione*** *'4 + (7 × 1)? La classe accetta acriticamente la proposta di Biagio.*

I: Attento, guarda la colonna prima, cosa avevi scritto?[26]
A (Biagio): 4 + 7 + 7.
I: Allora cosa possiamo scrivere?
A (Biagio): $4 + (7 \times 1)$[27].
I: Ed è il primo.
A (Biagio). Sì.
I: In quello dopo?[28]
A (Biagio): Ancora 7×1. $4 + (7 \times 1) + (7 \times 1)$.[29]
I: Tu fai così. Altre idee?
A (Riccardo): $4 + (7 \times 2)$.
I: Qualcun altro? Altre idee? Allora, la prima idea di Biagio era $4 + (14 \times 1)$. Poi ha detto $4 + (7 \times 1) + (7 \times 1)$. Adesso Riccardo dice $4 + (7 \times 2)$. Altre cose? Altre idee? Qual è la migliore?[30]
A (Laura): L'ultima!!!
I: Perché Laura?
A (Laura): Perché non devi scrivere tanto, così non ti complichi la vita.
A (Rossella): Perché non ripeti il numero.
A (Lorenzo): Ci si mette di meno se tolgo la parentesi[31].
A (Arianna): Continui ad aggiungere di 1 al fattore. Cioè bisogna andare avanti di 1 nel fattore.
I: Dove?
A (Arianna): Nel $4 + (7 \times 1)$. Metto, 1, 2, 3, 4…
I: Ah! Tu sei già andata avanti. Quindi la riga dopo cosa metteresti?
A (Arianna): $4 + (7 \times 3)$.
I: È più comodo[32] mettere $4 + (7 \times 3)$ o, come diceva Biagio, $4 + (7 \times 1) + (7 \times 1) + (7 \times 1)$?
A (Andrei): No!
C: No!
A (Laura): È più facile scrivere $4 + (7 \times 2)$.
A (Lorenzo): Beh, è più facile scrivere 4 + 21[33].
I: Ho capito, ma noi dobbiamo trovare una formula[34]. Quindi siamo arrivati a $4 + (7 \times 3)$. Poi?
A (Arianna): $4 + (7 \times 4)$

---

[26] *Avrei commentato diversamente per es. "Bene Biagio, ma potremmo scrivere in un altro modo? Magari mettendo ancora in evidenza il 7?"*
[27] *Non mi è chiaro il passaggio fra i due interventi di Biagio. Non dovrebbe essere $4 + (7 \times 2)$?*
[28] *Si sente il bisogno del disegno di una tabella con quello che sta succedendo. Si perdono i riferimenti.*
[29] *Biagio è legato alla rappresentazione 7×1 che è presente nella 4ª colonna.*
[30] *A questo punto della lezione, forse è meglio non cercare altre idee ma è importante mettere a confronto (fissando sulla lavagna quanto proposto da Biagio e Riccardo) i suggerimenti dei due compagni; avrei anche chiesto a Riccardo di andare avanti nella costruzione dei numeri, per vedere se poi avrebbe continuato proponendo $4 + 7 \times 3$ ecc. Dal confronto, anche in parte guidato dall'insegnante, poteva già emergere la valenza della rappresentazione di Riccardo. In pratica si poteva arrivare a chiedere ai ragazzi quale/i informazioni in più (rispetto alla proposta Biagio) dà la rappresentazione di Riccardo.*
[31] *Bene Lorenzo!*
[32] *Bene il riferimento alla comodità ma, andando avanti nella compilazione della tabella, è importante che sia sollecitata l'attenzione dei ragazzi sul confronto tra colonna 1ª e 4ª.*
[33] *Se si rimane sul problema "risparmio energetico" Lorenzo ha ragione, nel senso che la scrittura 4 + 21 è più compatta rispetto a 4 + 7 × 3, ma l'insegnante deve spostare l'attenzione, come già detto, sul confronto tra colonna 1 e colonna 4. Credo che ci si trovi di fronte ad uno dei nodi della questione ma, invece che parlare di* ***scrittura*** *'compatta', mi sembra che sarebbero molto più potenti concetti come* ***forma canonica*** *e* ***forma non canonica****, che consentirebbero di introdurre una dialettica fra* ***trasparenza*** *e* ***opacità*** *delle* ***rappresentazioni*** *per quanto concerne il punto che qui interessa, cioè il confronto fra le scritture. Quindi I potrebbe porre in evidenza che la questione non riguarda la 'facilità'; la forma non canonica permette la trasparenza del* ***processo*** *e quindi delle* ***relazioni*** *fra i numeri. I vari aspetti della questione troverebbero una loro coerenza concettuale. Naturalmente questi termini (e l'universo che essi manifestano) richiedono un investimento costante, indipendentemente dalle attività e dagli argomenti in gioco, in modo da costruire nella classe un quadro di riferimento omogeneo, e quindi una mentalità comune frutto di scelte culturali* ***condivise*** *all'interno del gruppo perché frutto di una* ***costruzione collettiva*** *delle conoscenze.*
[34] *Troppa pressione sulla formula!*

I: E via di seguito. Allora. Guardate il primo punto. Osservando la tabella, riesci a ricavare la legge per sapere che numero occupa una certa posizione nella successione?[35]
A (Justice): Sì.
I: Motiva la tua risposta.
A (Justice): Allora no.
I: Ormai hai detto sì.[36]
A (Giuseppe): Anche se dice no, deve motivare.
I: Giusto. È chiara la domanda?
A (Laura): Secondo me no.[37]
A (Justice): Sì.
I: Cosa ti chiede?
A (Justice): Boh. Osserva la tabella…
I: No, non ti ho detto rileggi la domanda, ti ho detto cosa ti chiede.
A (Justice): La legge.
I: Cos'è una legge?
A (Justice): Una regola.
I: E cos'è una regola?
A (Justice): Ad esempio, in scuola guida ti dicono di non attraversare con il rosso.
I: Allora una regola è qualcosa che è sempre…
A (Laura): Valida.
I: Allora, riesci a trovare la regola?[38]
A (Justice): La regola è che…
I: Ti dice, osservando la tabella riesci a ricavare la legge per sapere che numero occupa una certa posizione? Cioè, vedi, questa colonna è la posizione. Nella prima posizione c'è 4, nella seconda 11, nella terza 18, la quarta 25 eccetera. Se io ti dicessi: nella posizione 180 che numero c'è? Perché è questo che ti chiede. Riesci a trovare un modo, senza stare lì a fare i calcoli tutte le volte? C'è un modo?[39]
A (Justice): Cioè… faccio 4 × 7…
A (Giuseppe): Continuando sempre + 7.
I: Eh sì, e faccio + 7 per 180 volte[40]?
A (Laura): Ma no!
A (Justice): Fai direttamente!
I: Cosa vuol dire fai direttamente?
A (Justice): Eeeh!
I: Spiegati.
A (Justice): Non lo so. Usi la calcolatrice.

---

[35] *Avrei commentato: leggendo quanto scritto nella colonna "ricetta", si può dedurre (fare riflessioni) il n° d'ordine di un (generico) elemento della successione? Oppure, osservate la 4° colonna compilata seguendo l'idea di Riccardo, controllate il numero d'ordine corrispondente leggendo la prima colonna, possiamo notare qualcosa? Suppongo che la classe sappia cosa intende I con 'ricavare la legge', e che siano già state affrontate, pur in termini embrionali, questioni attinenti la generalizzazione o la modellizzazione.*
[36] *Meno severità! Così l'alunno si può spaventare e decidere di non intervenire più.*
[37] *Attenzione, Laura ci dice che, a volte, anche le parole dell'insegnante (chiunque esso sia) non sono chiare.*
[38] *Di nuovo sottolineo l'ambiguità della domanda: in realtà l'insegnante vorrebbe che i ragazzi notassero la relazione tra numero d'ordine (per es. 23) e il modo per calcolare il numero corrispondente della successione, sfruttando la "ricetta", (per cui, in riferimento all'esempio, otteniamo 4 + (23 –1) × 7). Tale richiesta, cioè l'indicazione di una regola, può essere in un certo senso prematura, soprattutto se ancora non si è parlato in termini generali di un qualunque numero della successione, se non è emerso il problema "infinito", ,se il linguaggio utilizzato è ancora quello naturale. Concordo.*
[39] *Avrei detto: senza dover necessariamente calcolare tutti i numeri della successione fino a quello che si trova al 180° posto.*
[40] *Lapsus voluto?*

A (Laura): Eh! È facile![41]
I: Giuseppe?
A (Giuseppe): Moltiplicando quante volte voglio il 7. Cioè… Boh…
I: Lorenzo.
A (Lorenzo): Qual era la domanda?
I: Beh, allora perché avevi la mano alzata?
A (Lorenzo): No perché… senza volerlo.
I: Arianna.
A (Arianna): Fai 4 + (7 × il numero).
I: Per?
A (Arianna): Boh, non so, 180[42].
I: Quindi per la posizione che ti interessa?
A (Arianna): Sì.
I: Può essere una regola?[43]
A (Lorenzo): Sì[44].
A (Giuseppe): No! Perché nel quinto c'è 7 × 4!
I: E allora?
Riccardo: Io! 4 + 7, li sommi e poi fai ×.
I: Beh, è un po' diverso! Perché chi ha la precedenza? Perché è sbagliato quello che ha detto lui?[45]
A (Arianna): Perché ha la precedenza il ×!
Riccardo: Allora 7 + 4 × 2.
A (Laura): 7 + 4 × (7 × 181).
A (Giuseppe): Ma no!
A (Laura): Sì perché…
I: Ferma, lascialo parlare.
A (Giuseppe): Per la 180esima posizione devi fare 4 + (7 × 179).
A (Laura): Perché?
I: Spiegaglielo.
A (Giuseppe): Ma boh.
I: Come boh. L'hai detto, ci sarà un motivo.
A (Laura): Quinto c'è × 4, allora fai × 181[46].
A (Giuseppe): Sì, ma quinto c'è 4[47].
A (Laura): È vero!

---

[41] *Negli interventi si accavallano spesso i due punti di vista aritmetico-operazionale e algebrico-**relazionale**. È del tutto inevitabile, e mi sembra molto produttivo porli in evidenza (spesso sono nascosti nelle pieghe degli atteggiamenti, in frasi dette e non dette, in certi modi di fare) e confrontarli, ogni volta che se ne presenta l'occasione, attraverso una riflessione **collettiva**, in modo da aiutare gli alunni a non vedere questi aspetti solo in termini di pura convenienza (più facile, più sbrigativo, più veloce). Dovrebbe essere maggiormente curata la parte della **condivisione** degli aspetti concettuali, anche di quelli di sapore quasi 'filosofico'. Da molti interventi sembra anche che non via sia una vera 'azione comune', ma che gli alunni attivino delle riflessioni superficiali, subito interrotte (vedi i numerosi 'Boh!'), o fatte tanto per fare (ad esempio il prossimo intervento di Lorenzo a proposito della mano alzata).*

[42] *Il pensiero di Arianna è molto ambiguo: non riesco a capire se 180, per Arianna, è un elemento della successione o il numero di posto occupato da un termine della successione. Credo che Arianna butti là un numero a caso, senza sapere bene perché lo fa; mi conferma nel mio commento precedente.*

[43] *Attenzione alle domande che conducono a risposte monosillabiche 'Sì?, 'No', 'Boh'.*

[44] *Perché non fare una verifica su Lorenzo, e non solo, attraverso un esempio?*

[45] *Avrei scritto sotto dettatura alla lavagna quello che indica Riccardo per essere più sicura sul suo pensiero e per poter poi commentare con gli altri. Sono d'accordo. Gli alunni devono essere condotti attraverso spunti significativi verso la **verbalizzazione** e **l'argomentazione.** Bisogna cercare di favorire anche il dialogo fra pari e limitare allo stretto necessario il ruolo dell'insegnante (riconosco che non è facile). Se egli è il perno costante della **discussione** si impoveriscono gli aspetti **sociali** della costruzione della conoscenza.*

[46] *Scambia numero per posto?*

[47] *La **verbalizzazione** è troppo povera; è 'sincopata' proprio perché il problema degli alunni non è di farsi capire da tutti, ma solo dall'insegnante, che 'tanto capisce perché* sa*'. Bisogna invitare a formulare frasi complete, con soggetto, predicato, complementi, che illustrino il più chiaramente possibile il pensiero dell'autore. 'Quinto c'è 4' in sé non significa nulla, è un SMS, e di questo gli alunni devono essere resi gradualmente consapevoli.*

I: È chiaro a tutti?[48]
G: No.[49]
I: Allora, Laura…no, qualcun altro.
A (Sabrine): No, la Laura!
I: A chi è chiaro quello che ha detto Giuseppe? Alla Laura e all'Arianna e basta? Solo a loro due è chiaro? Allora, Giuseppe, prova a rispiegarlo bene.
A (Giuseppe): Allora, nella 180esima posizione…
I: Beh, magari, parti da quello che hai già.
A (Giuseppe): Nella quinta posizione, 4 + (7 × 4).
A (Sabrine): Perché?
A (Giuseppe): Boh.[50]
I: Come perché, boh? Laura spiegaglielo tu.[51]
A (Laura): Allora, nella prima posizione c'è 4, quindi qualsiasi numero di partenza nella prima posizione c'è sempre quello. Nella seconda posizione c'è 4 + (7 × 1) e quindi nella 180esima posizione non ci può essere 4 + (7 × 180) perché….
A (Justice): Non ho capito[52].
I: Arianna, prova a spiegarlo tu. Justice, però adesso lei te lo spiega, ma se tu chiacchieri, cosa senti?
A (Arianna): Nella prima posizione non devi aggiungere niente perché c'è il numero di partenza. E quindi nella 180esima è come se avessi aggiunto 179 volte 7.
I: Io non ho capito. Prova a rispiegarlo un po' meglio. Considera che siamo un po' duri di comprendonio. Guardate la tabella perché lei lo spiega basandosi sulla tabella, se tu guardi in faccia lei… magari è più facile se guardi la tabella.
A (Arianna): Nella prima posizione non devi aggiungere niente perché il 4 è il numero di partenza. Poi nella seconda bisogna aggiungere 7 e quindi quando arrivi alla 180esima hai aggiunto 179 volte il 7.
I: Rossella è chiaro?
A (Rossella): No.
I: Lorenzo, prova a spiegarlo tu. Silenzio. Sabrine!
A (Sabrine): Me lo sta spiegando!
I: No, no. Se lui lo sta spiegando e a te lo spiega un altro, viene fuori confusione. Ascolta la sua spiegazione, se poi non è chiara, te lo faccio spiegare da qualcun altro.[53]
A (Lorenzo): Se partiamo dalla prima posizione e c'è il 4, dobbiamo moltiplicare il 4 × 7, 180 volte. Però come ha detto l'Arianna noi non dobbiamo moltiplicarlo 180 volte, perché nella prima posizione abbiamo già 4, quindi non serviranno 180 volte, ma ne serviranno 179, perché la prima non va conteggiata, quindi moltiplichiamo 4 + (7 × 179) e troviamo il numero.[54]
I: Sabrine, è chiaro?

---

[48] *Avrei detto "Cosa ne pensate? Vediamo con un altro esempio, al posto 12 quale numero troviamo? Cosa possiamo fare per trovarlo? Concordo in pieno. I non può accettare la povertà del linguaggio degli alunni, altrimenti è chiaro che non se ne esce. Invito I ad una riflessione profonda su questi aspetti.*

[49] *Ma è ovvio! È la naturale conseguenza di quanto stiamo dicendo. Lo so bene che non è facile costruire* ***discussioni*** *ordinate,* ***argomentazioni*** *complete e coerenti, uso del* ***linguaggio*** *appropriato, però questo è un obiettivo fondamentale, per certi aspetti direi* l'obiettivo. *La comprensione della matematica passa attraverso un uso* ***collettivo*** *appropriato del linguaggio. L'insegnante deve cercare di costruire costantemente l'ambiente più adatto affinché ciò si realizzi. Porre domande stimolanti e tirarsi oculatamente in disparte al momento delle risposte sono due aspetti determinanti nella dialettica di classe.*

[50] *In alcuni casi (questo è uno di quelli) troverei produttivo, se non necessario, interrompere l'attività per chiarire i termini del* ***contratto didattico****. Partirei proprio dai numerosi 'Boh' cercando di attribuire loro dei significati: 'Mi arrendo', 'Non mi interessa', 'Ho già detto tutto, cosa vuole che dica ancora', 'Ma cosa vuole questa qui da me', 'Perché non lo chiede anche agli altri', ecc. Significati comunque negativi.*

[51] *Forse Giuseppe riesce a vedere la relazione tra 1° e 4° colonna, ma gli è difficile riassumere sinteticamente il percorso fatto durante la lezione, forse pensa che la spiegazione richiesta sia qualcosa di più complesso, o che le aspettative dell'insegnante siano troppo alte per lui. Mi sembra che in fondo M e io stiamo dicendo le stesse cose.*

[52] *Anche Laura "salta", probabilmente bisognerebbe calibrare meglio i passi da un posto ad un altro.*

[53] *A volte è importante e produttiva anche la discussione che può esserci tra due compagni, il ragazzo in difficoltà riesce a capire meglio, a concentrarsi di più, se sente una sola voce. Naturalmente sono d'accordo, è il solito discorso del rapporto fra 'pari'. Solo che va costruito anch'esso, e favorito, in modo che l'attenzione generale non si disperda in mille rivoli incontrollabili. È sempre lo stesso punto: concordare con la classe un* ***contratto didattico*** *che preveda anche queste possibilità.*

[54] *Attenzione, Lorenzo sbaglia nella prima parte dell'argomentazione.*

A (Sabrine): No.[55]
I: Chi lo spiega alla Sabrine?
Justine: Allora, ci sono 180 posizioni.
A (Laura): Non lo devi spiegare a me, Justice.
I: Io ho detto 180, ma possono essere anche 92[56].
A (Justice): Dato che il primo è il numero iniziale, si salta, quindi ce ne sono 179. Hai capito adesso?
A (Sabrine): No. Prof, spiegalo tu.
I: Neanche secondo me. Biagio, tu hai capito?
A (Biagio): No.
I: Guarda l'ultima colonna Biagio. Che cosa c'è scritto? Leggile tutte.
A (Biagio): 4 +…
I: Fermati. Allora, per ottenere 4 cosa fai?[57]
A (Biagio): Niente.
I: Niente, tengo 4. Per ottenere 11?
A (Biagio): 4 + (7 × 1).
I: L'11 in che posizione è?
A (Biagio): Seconda.
I: E tu fai 7 ×…
A (Biagio): 1.
I: Il 18 in che posizione è?
A (Biagio): Tre.
I: E fai 7 ×…
A (Biagio): 2.
I: Il 25 in che posizione è?
A (Biagio): Quarta.
I: E fai?
A (Biagio): 7 × 3.
I: Il 32 in che posizione è?
A (Biagio): Quinta.
I: E fai?
A (Biagio): 7 × 4.
I: Allora, non c'è nessuna corrispondenza fra la posizione e la moltiplicazione che fai?
A (Biagio): Sì, faccio 7 ×…
I: 7 ×…? Allora, se io prendo, per esempio il numero che c'è nella 90esima posizione?
A: 79!
A: 89!
A: 79!
A (Riccardo): Ma stiamo facendo le potenze?
I: No. Se noi vogliamo sapere che numero c'è nella 90esima posizione, cosa facciamo? 4 +…
A: 7 ×…
A (Arianna): 7:… no, 7 ×…
A (Giuseppe): 7 × 89.
A (Laura): 78.
A (Justice): 89.
I: Ho detto 90esima posizione.
A (Laura): Ah! 89.
I: × 89.
A (Justice): Sono più intelligente io di te.

---

[55] *I dovrebbe guidare la classe verso l'osservazione della* ***relazione*** *fra il numero del posto e quello per cui si moltiplica il 7, altrimenti sembra dalle spiegazioni che il 'minore di un'unità' non emerga. In molte classi del Progetto ArAl che hanno svolto questa attività è potente il ricorso ai concetti di* ***forma canonica/non canonica****.*
[56] *Attenzione al linguaggio: non è che le posizioni possono essere 180 oppure 92, sono i numeri della successione che hanno posizioni distinte.*
[57] *4 è il primo numero dato, se si vuole capire come si può calcolare il 4 applicando la regola/ricetta della 4° colonna, evidentemente occorre definire prima la regola utilizzando il linguaggio algebrico. Pensando che sia molto improbabile che ai ragazzi venga in mente di porre nella ricetta 7 × 0, allora può risultare fuorviante porre quella domanda in quel momento.*

A (Laura): Ho capito, 80esima!
I: Se dovessimo fare nella 112esima posizione?
G: 111.
I: Quindi è un discorso che possiamo fare per qualsiasi posizione sì o no?
C: Sì.
I: Prendiamo una posizione generica, non indichiamola quindi con un numero particolare, indichiamola con, per esempio…
A (Laura): *A*.
I: Con una lettera va bene? Se voglio sapere nella posizione *a* che numero c'è, cosa faccio?
G: 4 + 7 ×…
I: 7 ×…? Se a fosse 80 faremmo?
C: 79.
I: Perché? 79 cos'è rispetto ad 80?
G: Un numero in meno!
I: Quindi è?
A (Arianna): Il precedente.
I: Quindi lo indico con… ?
A (Laura): Con la *b*.
I: No. Come fate da 80 ad andare a 79?
C: – 1.
I: Allora, se il mio numero 80 è a, io cosa faccio?[58]
A (Laura): *a* – 1!
A (Giuseppe): E cioè cosa fa?
I: Faccio *a* – 1.
A (Giuseppe): Cosa fa? 0, *a*?[59]
I: Se la posizione è 80, devo moltiplicare per 79, cioè 80 – 1. Se la posizione è 251?
A (Giuseppe): Faccio 250[60].
I: Perché?
A (Giuseppe): Perché faccio 251 – 1.
A (Sabrine): A me l'ha spiegato lui.
I: Allora, se te l'ha spiegato lui, Michael spiegalo a tutti.
A (Michael): Ah! Perché se ho 90 numeri e il primo numero non si conta, devi fare 4 + (7 × 89).
I: Ma perché non conti il primo numero?
A (Michael): Forse perché l'ho già contato. Non lo so. Perché c'è già e non si conta.[61]
I: 4 cos'è? Rossella.
A (Rossella): Il numero di partenza.
I: 4 è il numero di partenza, poi cosa faccio per trovare gli altri numeri? Lo abbiamo detto prima. Cosa faccio per trovare 11?
A (Rossella): Addiziono 7.
I: E poi tante volte 7. E nella prima posizione io aggiungo 7?
C: No.
I: Lo aggiungo però dalla…
C: Seconda.
I: Nella seconda posizione quanti ne aggiungo di 7?
C: Uno!
I: E nella terza?
C: Due!
I: E nella quarta?

---

[58] *Attenzione al linguaggio, alla chiarezza: probabilmente I parla di numero d'ordine, cioè di posto occupato, ma per i ragazzi questo può non essere scontato, si può generare confusione tra numero ordinale e numero cardinale.*

[59] *Probabilmente manca una attività pregressa su elementi del linguaggio algebrico. Lo penso anch'io. Credo che questa attività si stia rivelando molto proficua per l'insegnante perché lo conduce a riflettere su prerequisiti, aspetti metodologici, l'importanza del* ***linguaggio****, degli aspetti* ***sociali*** *della conduzione di una* ***discussione****, e su molto altro ancora.*

[60] *Intervento non accettabile sul piano linguistico (v. Commento 47 e altri sull'uso del linguaggio). Poi c'è ancora l'uso di 'faccio', che mantiene il pensiero ancorato al mondo dell'aritmetica.*

[61] *Mi ripeto: la reazione di Michael è conseguente al fatto che ancora non si domina la formula generica 4+7×(n–1), in effetti non è il primo "non valga", è che la relazione + 7 comincia a valere dal secondo numero in poi.*

C: Tre!
I: E nella quinta?
C: Quattro!
I: Quindi ne aggiungo sempre una volta in meno rispetto alla…
G: Posizione![62]
I: Quindi, questa può essere una regola giusta?[63]
G: Sì!
I: Quindi 4 + …
G: [7 × (*a* – 1)].
A: Come si fa a fare a se a… cioè…
I: Chi è a?[64]
A: 90.
A: Deve essere un numero preciso.
A: La posizione.
I: La posizione[65]. Quindi nel momento in cui so che *a* è la posizione, posso trovare qualsiasi numero, perché se io dico, Alessia, che numero c'è nella 43esima posizione? Tu cosa fai? Conti?[66]
A (Alessia): No.
I: Ti basta fare quello. Cioè cosa fai?
A (Alessia): 4 + (7 × 42).
I: Perché *a* che è la tua posizione, è 43, ma 43 – 1 fa 42 e quindi trovo il numero. Sì o no?
A (Alessia): Sì.
I: Quindi, guardate gli ultimi tre punti. Sono quelli che poi abbiamo già fatto. In base alla legge che hai trovato, calcola che numero occupa il 13esimo posto nella successione. Crinela fallo tu.
A (Giuseppe): 12[67].
I: Shhh! Che numero occupa la 13esima posizione. Andrei!
A (Andrei): Ehhh… le stavo chiedendo…
I: Cosa stavi chiedendo? Chiedilo a tutti![68]
A (Andrei): Che numero è ennesima posizione.
I: Un attimo, adesso ci arriviamo[69]. Siamo al secondo punto. Allora, in base alla nostra legge, che è questa, che numero occupa il 13esimo posto nella successione?
A (Crinela): Allora, 4 + (7 × 12).
I: Facciamo il calcolo, perché a noi serve un numero. Allora, chi facciamo prima, il + o il ×?[70]
A (Crinela): Il ×.
I: Ok, quindi quanto fa 12 × 7?
A (Crinela): 2 × 7 fa 14, 4 e 1. 7 × 1 fa 7, + 1 fa 8.
I: Quindi?
A (Crinela): 84. 84 + 4, 88[71].
I: Quindi nella 13esima posizione, c'è?

---

[62] *V. Commento 24. I dialoghi a botta e risposta possono anche essere efficaci, talvolta, ma consolidano la convinzione che l'insegnante sia sempre e comunque l' unico (o quasi) referente.*
[63] *Meglio: "Può essere una osservazione giusta?"*
[64] *Meglio: cosa rappresenta a?*
[65] *Non 'la posizione', ma il numero della posizione.*
[66] *Meglio: posso risalire al numero che occupa quella posizione? Devi individuare tutti quelli che ci sono prima?*
[67] *Confusione tra concetti: numero d'ordine e n° della successione. Mi permetto di modificare, a scanso di equivoci sull'ordinale, la frase di M: numero d'ordine e* numero della successione.
[68] *Forzatura!*
[69] *Avrei cercato di dare una risposta, anche parziale. Oppure, per non interrompere la* ***discussione****, si può ricorrere alla* ***metafora*** *del frigorifero: 'Andrei, la tua proposta è molto interessante. Mettiamola solo un attimo in frigorifero, la riprendiamo fra qualche minuto'.*
[70] *C'è anche una parentesi! Certo, ma c'è anche* un *altro aspetto, tutt'altro che secondario. Il diario riporta 'il +', 'il ×'. Se in realtà I ha chiesto 'l'addizione o la moltiplicazione?', va bene, se invece ha chiesto 'il più o il per?' la inviterei all'uso di un linguaggio più corretto. In seconda media le operazioni vanno chiamate non col nome dei segni (che suona quasi come un 'nickname'), ma col loro nome. Anche qui vale davvero la pena, nei momenti opportuni, lavorare sul* ***contratto didattico****.*
[71] *Trovo che ci sia un'eccessiva atmosfera aritmetica (numeri, calcoli, operazioni, risultati, ...). Bisogna costruire una concettualità più algebrica.*

A (Crinela): 88.
I: Christian, che numero c'è al 30esimo posto? Come fai a trovare che numero c'è al 30esimo posto? Cosa ha fatto la Crinela per trovare 88? Sabrine, dagli una mano.
A (Sabrine): Facciamo…
I: Cosa abbiamo trovato prima? Tutto il nostro discorso è stato fatto perché? Perché siamo riusciti a trovare…
A (Sabrine): Un numero.
I: Ragazzi, cosa abbiamo trovato?
G: Una regola.
I: Una regola, una legge, una formula. Qual è la formula Sabrine? Michael? La regola generale, al di là della posizione[72].
A (Michael): 4 + 7 × (3 – 1).
I: Sì, ma 3 chi è?
A (Michael): La posizione.
I: Sì, ma visto che abbiamo detto che non sappiamo quale posizione ci interessa, utilizziamo…[73]
A (Michael): La *a*.
I: Potevo anche metterci un fiore, potevo metterci qualsiasi cosa, potevamo metterci la *p* di posizione se è più chiaro[74]. Quindi questa è la nostra regola, che abbiamo costruito insieme. L'ho costruita io?
C: No!
A: (Riccardo): Posso dire quanto risulta?[75]
I: Quindi, Christian, se quella è la nostra regola, chi è *a*?[76]
A (Christian): Cosa?
I: Christian, però, bisogna anche stare un po' attenti. Allora, Sabrine, chi è *a*?
A (Sabrine): Il numero… è la posizione.
I: Non vi piace *a*? Ci metto un fiore.
A: È brutto!
I: Cosa ci metto?
A (Laura): Un cuore!
A (Justice): È finito san Valentino!
I: Ci metto la *p* di posizione. Se questa è la nostra regola generale, come faccio a trovare che numero c'è al 30esimo posto?
A (Sabrine): Faccio quel numero –1.
I: Quel numero chi?
A (Sabrine): Eeeh, *p*.
I: E chi è *p*? Devi fare il penultimo punto. Leggi il foglio. Cosa c'è scritto nella penultima riga? Che numero c'è…
A (Sabrine): Dove? Ma non lo trovo.
I: La penultima riga. Non l'ultima, quella prima. Che numero c'è…
A (Sabrine): Che numero c'è al 30esimo posto.
I: Allora, chi ci metto al posto di *p*?
A (Sabrine): 30.
I: Allora cosa faccio?
A (Sabrine): 30 – 1.
I: Beh, dettami dall'inizio.
A (Sabrine): 4 + [7 × (30 – 1)].
I: Chi faccio prima?[77]

---

[72] *Avrei parlato di* ***relazione*** *tra numero della successione e posizione corrispondente. Concordo. Suggerisco una lettura più approfondita del quadro teorico e del Glossario ArAl. Anche se non volessimo fare riferimento esplicito al progetto ArAl, l'ambiente in cui si sta lavorando è quello dell'early algebra, ed è importante conoscerne i vari aspetti.*
[73] *Avrei detto: visto che parliamo di un numero qualunque della successione, come indichiamo la sua posizione?*
[74] *Non sono d'accordo con le proposte di I. Ho anch'io delle perplessità. Nel progetto ArAl, sin dalla prima elementare, si usano molte* ***metafore*** *per indicare l'****incognita****, quindi anche i fiori ci potrebbero stare. Ma le metafore fanno parte delle fasi iniziali di un percorso imperniato sulla costruzione del* ***balbettio algebrico****, e quindi svolgono un loro ruolo molto importante per traghettare nelle fasi iniziali l'alunno da conoscenze note ad altre nuove. Ora si sta lavorando sulla lettera (attenzione: 'p' è* il numero *della posizione, non* la *posizione), e il riferimento al fiore o alla 'qualsiasi cosa' dovrebbe casomai costituire un aggancio* ***semantico*** *ad attività precedenti (presenti nella memoria storica degli alunni) e non un generico riferimento all'uso di un simbolo a piacere.*
[75] *Bisogna rispondere a Riccardo che non ha capito cosa rappresenta a.*
[76] *Di nuovo, meglio 'cosa rappresenta a'.*
[77] *Meglio: guidami nei calcoli.*

A (Sabrine): Allora 4 + 7 che fa… ah no. Poi, × 29.
I: Esatto[78], la parentesi ha la precedenza. Adesso chi ha la precedenza? Il + o il ×?
A (Sabrine): Il ×. 4 +…
I: 7 × 9?
A (Sabrine): 62.
I: 63. Scrivo 3 e riporto 6. 7 × 2?
A (Sabrine): 14. + 6 fa 21.
I: 20. Quindi?
A (Sabrine): 203.
I: 4 + 203, fa?
A (Sabrine): 206.
I: 207. E quindi, alla 30esima posizione che numero c'è?
A (Sabrine): 207.
I: Dimmi Alessia.
A (Alessia): Io non ho fatto così.
I: Non lo dici a me, però, lo dici a tutti. Alzi la voce e spieghi a tutti quello che hai fatto.
A (Andrei): Prof, ma lo facciamo ogni venerdì così?[79]
I: No. Alessia.
A (Alessia): Io ho fatto 4 + 7 ×, visto che era il 13esimo posto, ho messo subito 12.
I: Ma lei stava facendo il 30esimo posto.
A (Alessia): Prima.
I: E adesso, al 30esimo posto?
A (Alessia): Io avevo messo subito 29.
I: Beh, va bene, d'accordo, noi abbiamo fatto il passaggio. Questa è la nostra formula e siamo andate a sostituire il valore. Tu sei passata direttamente a questo passaggio. Cosa cambia? Nulla, hai semplicemente saltato un passaggio. L'ultimo punto. Che numero c'è all'ennesimo posto? Cosa significa ennesimo?[80]
A (Andrei): Quello dopo.
A (Alessia): Penultimo.
I: Rispetto a chi? Chi è l'ultimo?
A (Alessia): Boh.
I: E allora come faccio a sapere qual è il penultimo?
A (Sabrine): 31!
A (Andrei): Ma che 31!
I: 31 perché?
A (Sabrine): Perché è quello dopo.
I: Quindi tu dici che ennesimo vuol dire quello dopo?
A (Sabrine): No, 31.
I: Quindi secondo te ennesimo vuol dire 31? Cosa vuol dire ennesimo?
A: Precedente.
A (Laura): Conseguente.
A (Andrei): Il prossimo.
I: Nessuna idea? Non avete mai sentito parlare… In una frase, non avete mai sentito ennesimo?
C: Sì.
A (Laura): Sì, infatti non lo capisco.
I: Fatemi un esempio.
A (Lorenzo): Justice ha combinato l'ennesimo guaio.

---

[78] *Ho molti dubbi sul commento "esatto".*
[79] *Sarebbe stato interessante sentire il commento di Andrei. La questione è: Andrei è un caso o un sintomo? In qualche modo l'attività sembra rimanere 'esterna' ai ragazzi, forse è l'onda lunga di quell'iniziale 'ragazzi facciamo una cosa un po' diversa dal solito'. Non dovrebbe essere 'diversa'. Diciamo che l'obiettivo dovrebbe essere quello di costruire, attorno all'esperienza matematica, un sistema **condiviso** di pratiche **sociali** che accomunino e rendano **trasparenti** sia per gli alunni che per il docente **linguaggi**, terminologie, **metafore**, obiettivi. Se manca questa condivisione, l'attività, pur interessante in sé, non è realmente formativa (né per gli uni né per l'altro). Domande come quella di Andrei sono per l'insegnante un campanello di allarme: per dirla in termini di scopone scientifico, bisogna 'sparigliare le carte'. Probabilmente il 'no' secco dell'intervento successivo di I non ha giovato.*
[80] *Ribadisco quanto già detto: era opportuno fermarsi per spiegare cosa significa, in un contesto matematico, "ennesimo" e conseguentemente definire come indicare chi precede l'ennesimo. Ho l'impressione che si sia creata confusione tra il concetto di "ultimo" e il concetto di "ennesimo".*

I: Cosa vuol dire ennesimo guaio? Non tutti insieme che non capisco niente.
A (Arianna): L'ultimo di quelli che ha fatto.[81]
A (Giuseppe): L'Arianna ha detto l'ultimo, ma l'ultimo di cosa?
I: Giusto.
A (Justice): Posso prendere il dizionario così lo cerco.
I: Guardiamoci. Cosa vuol dire all'ennesimo guaio, Justice è stato punito? Allora, ennesimo. Sappiamo quanti ne fatti prima?
C: No.
A (Andrei): Boh.[82]
A (Giuseppe): Una centinaia.
I: Ennesimo è come se dicessimo…
A: L'ultimo!
I: Beh, l'ultimo di una serie. Ma siccome non sappiamo quanti ce ne sono prima, possiamo dargli un numero preciso?
A (Laura): No!
I: È come dire *p*. È come dire un qualsiasi numero rispetto a tutti quelli che ci sono stati prima. Può essere l'ennesimo di Justice, che magari è il 100esimo, può essere l'ennesimo guaio di Lorenzo che magari è l'80esimo, può essere l'ennesimo di Andrei che magari è il 500esimo. Quindi ennesimo non ha un valore preciso, significa però quello dopo tanti altri. Come possiamo indicarlo? Possiamo dargli un numero preciso?[83]
A (Andrei): 114.
G: No!
A (Giuseppe): Se non lo sappiamo…
I: E allora possiamo utilizzare cosa? Cosa abbiamo utilizzato lì?
C: La *p*.
I: Prima avevamo utilizzato la…
C: La *a*.
I: Utilizziamo qualcosa che ci dà un'informazione che poi possiamo andare a sostituire.
A (Lorenzo). La *x* per esempio.
I: La *x*, la *a*, la *p*. Di solito per l'ennesima… che lettera vi fa venire in mente?
A (Laura): Enne.
I: Di solito si usa la lettera *n*. Quando non si ha un numero preciso ma si sa che vale sempre, quindi in questo caso, nella posizione *n*, nella posizione ennesima, che numero avrò? 4 + …
G: $4 + [7 \times (n - 1)]$.
I: Questa è una regola ancor più corretta rispetto a questa. È la stessa cosa, ma è più corretto utilizzare la mia *n* che vuol dire una posizione qualsiasi, ennesima. Laura, leggi sul dizionario cosa significa ennesima.
A (Laura): Ennesima potenza, con riferimento all'esponente.
I: Leggi dall'inizio.
A (Laura): Dall'espressione matematica "elevare all'ennesima potenza". Corrispondente al numero *n* in una sequenza in una successione.
I: Quindi, dire ennesimo corrisponde ad un certo numero *n* e nel nostro caso chi è *n*? Alla nostra …[84]
G: La posizione.
I: Corrisponde ad un certo numero *n* in una sequenza o in una successione. Quello che abbiamo appena fatto è una sequenza, una successione di numeri che seguono una certa… regola. E da cosa dipende?
G: Dal numero di partenza.
I: E dal...? Chi è 7?
A: Passo.
A (Laura): Comando.

---

[81] *Questo intervento confermerebbe la sensazione di M a proposito della confusione ennesimo-ultimo.*
[82] *Ripeto quello che ho già scritto nei Commenti 41 e 50: questi 'boh' enfatizzano, a mio avviso, il distacco dall'attività. Se io sono impegnato, rifletto, sto in silenzio, ascolto gli altri, organizzo i miei pensieri, faccio un'ipotesi. Se butto là un 'boh', è come se fossi disinteressato, o se mi arrendessi. Un altro di quei segni che l'insegnante deve imparare a riconoscere (spesso li si riconosce, si sta male perché si capisce che la classe scappa di mano, ma non si sa bene cosa fare e si continua. Succede nelle migliori famiglie...)*
[83] *Attenzione, nella accezione comune spesso si pensa all'ennesimo errore per indicare l'ultimo di tanti, ma nel nostro contesto-successione ennesimo è il termine generico; sostituendo ad n (inteso come valore dell'n° d'ordine) un qualunque naturale, quindi anche zero, ottengo tutti gli elementi della successione.*
[84] *La n nasconde un numero che indica la posizione!*

. .[85]

[85] *Commento al lavoro di Francesca: metto subito in evidenza qualche aspetto positivo, cioè l'attenzione che I pone alla partecipazione di tutti gli alunni, anche di quelli con evidenti difficoltà di apprendimento, sforzandosi di utilizzare linguaggio e atteggiamenti vicini a quelli dei ragazzi.*
Tuttavia, proprio in merito al ***linguaggio*** *avrei qualche appunto da fare: I dovrebbe cercare di offrire anche un linguaggio più corretto e appropriato, soprattutto non ambiguo, come sottolineato in diverse situazioni.*
Altro punto importante la conduzione – gestione della problematica "successioni": mi pare che I abbia posto con troppa urgenza il problema della "ricetta –formula matematica. Forse I non ha simulato, pianificato abbastanza i vari obiettivi intermedi funzionali al raggiungimento dell'obiettivo finale, che non è solo la messa in formula, così come non si è costruita una ipotesi di sviluppo della ***discussione*** *in classe. Personalmente penso che, anche all'interno di una lezione in cui si è programmato di dare ampio spazio alla collaborazione degli alunni (alunni tra loro, alunni ed insegnante), non vada dimenticato il ruolo importante di mediazione che l'insegnante può avere.*
Non solo, proprio quando si pongono in essere attività di questo tipo, è fondamentale avere un quadro (dei quadri) di come potrà svilupparsi la lezione, è molto facile, infatti, farsi prendere la mano e perdere di vista quelle gradualità che sono necessarie per arrivare ad una autentica ***condivisione di conoscenze****.*
Quando parlo di gradualità faccio riferimento anche a conoscenze pregresse (per es. elementi del linguaggio algebrico) che possono essere funzionali a conquiste in itinere sul piano dell'apprendimento.
Mi associo a quello che scrive M. Aggiungo solo un punto, che è quello che riguarda più da vicino il mio ruolo di osservatore della coerenza fra teoria e prassi. Nella conduzione della lezione vedo indubbiamente lo sforzo di adeguamento al lavoro preparatorio – di natura soprattutto matematica - predisposto assieme a M e ad altri insegnanti partecipanti al progetto (le schede); non colgo invece riferimenti altrettanto forti ad importanti aspetti metodologici. Per esempio, nel suo commento conclusivo, M riporta tre termini: ***linguaggio, discussione, condivisione****, che ho evidenziato in grassetto. Sono termini del Glossario del Progetto ArAl. Se li si legge (nel primo fascicolo della Collana o nel sito), si trovano, nelle rispettive definizioni, altri termini 'in grassetto'. In* ***linguaggio****: Brioshi, relazioni, mediatore, socializzazione. In* ***discussione*** *(il termine rimanda a* ***collettivo****) i riferimenti sono molto numerosi: verbalizzazione, argomentazione, condivisione, scrittura, protocolli, discussione, soluzione collettiva, mediazione sociale, sintassi, semantica, traduzioni, linguaggio matematico, rappresentazioni sagittali, balbettio algebrico.* ***Condivisione*** *rimanda anch'essa a* ***collettivo****. I termini di questi elenchi definiscono la cornice metodologica dell'attività matematica, indipendentemente da quale sia l'ambito di volta in volta esplorato. Si suggeriscono letture, approfondimenti e riflessioni in questo senso.*

16 marzo 2007 Verbale 2 (ex 3) *(uso del registratore)*

I: Oggi facciamo quello che avevamo iniziato la volta scorsa. Vi ricordate quello sulle successioni?[86]
A: Quel gioco?
I: Esatto. Vi consegno un disegno. Valgono le stesse regole della volta scorsa. Cioè? Chi se le ricorda?
A: Trovare i numeri della successione.
I: No, le regole.[87]
A (Arianna): Alzare la mano.
I: Alzare la mano.
G: Ahhh!!!
I: Poi?
A: Stare zitti quando uno parla.
A: Quando uno parla, ascoltare.
I: Basta? Non parlare tutti insieme, etc. Allora, vi ho consegnato un disegno[88] dove c'è scritto "Lorenzo sta costruendo con i fiammiferi alcuni grattacieli, in questo modo". Provate, ognuno, a disegnare i due grattacieli successivi.
A: Ma non ci stanno!
I: Fateli un po' più piccoli. Osservate quello che ha fatto e provate a disegnare.
A (Andrei): Non ci stanno mica[89].
I: Falli più piccoli. Perché non ci stanno?
A (Andrei): Non c'è più spazio.
I: Sono importanti le misure?
A (Justice): No, non c'è scritto.
A (Arianna): È importante che aggiungi sempre un piano.
I: Devo aggiungere sempre un piano. Posso rimpicciolirle o devo mantenere le stesse dimensioni? Visto che ho poco spazio, è importante mantenere la stessa misura o come dice l'Arianna aggiungere un piano?
IR: Se cambio le dimensioni meglio farlo per tutti i grattacieli.
G: Aggiungere un piano.
A (Giuseppe): Anche se è più piccolo di questo non fa niente?
I: È lo stesso[90].
Brusio.
I: L'altra regola era però non chiacchierare.[91]
Passa un minuto.
I: Cosa usa Lorenzo?
A (Andrei): Fiammiferi.
I: La domanda che vi faccio è "che procedimento avete usato per costruire il successivo…"
Brusio.
A (Andrei): Più uno!
I: Allora, uno non ho ancora finito di parlare, due non avevi la mano alzata, nessuno ti ha dato la parola. Quindi hai infranto tre regole tutte in una volta. Allora la domanda a cui vorrei che rispondeste è di spiegarmi a parole che procedimento avete usato per costruire il successivo grattacielo. Ce n'erano cinque. Andrei, a parole.
A (Andrei): Allora, ad ogni grattacielo si aggiunge tre fiammiferi. Perché la base è di uno e per costruirne un altro se ne mettono due per la lunghezza e per finire si mette un altro sopra.
I: Altre idee o altre spiegazioni o un altro modo di spiegarlo. Michael.
A (Michael): Aggiungere più uno.
I: Uno che?
A (Michael): Un fiammifero.
I: Aggiungere un fiammifero. Tu quanto ne avevi aggiunti?
A (Andrei): Tre.
I: Chi ha detto quattro? Eleonora.

---

[86] *Avrei lasciato ai ragazzi la possibilità di verificare, magari a lezione inoltrata, o anche alla fine, l'analogia tra le due situazioni problematiche (non tanto sulla modalità della lezione!).*
[87] *In realtà, saper costruire i numeri, anche saltando, significa mettere in pratica la/e regola/e.*
[88] *Non riporto la scheda, anche se sarebbe meglio inserirla, perché non so se tutti conoscano il lavoro preparatorio di Chiara Lugli e Roberta Fantini.*
[89] *Il solito Andrei... il solito dilemma: caso o sintomo?*
[90] *Non d'accordo.*
[91] *Le regole, per essere **condivise**, devono essere conquistate dalla classe attraverso una lenta riflessione **collettiva**.*

A (Eleonora): Perché ogni casellina è formata da quattro. Ah no, è vero, da tre!
I: Ah, non lo so.
A (Eleonora): Ce n'è una da quattro e una da tre.
I: Spiega.[92]
A (Eleonora): Ce n'è una da quattro e le altre da tre.
I: Allora, noi dobbiamo fare il sesto piano. Quanti ne aggiungi di fiammiferi? Tu hai detto quattro.
A (Eleonora): Eh…
I: Dove li aggiungi quattro?
A (Eleonora): No, tre.
I: Allora quattro o tre?
A (Eleonora): Tre.
I: Dove li aggiungi?[93]
A (Eleonora): Sopra l'ultimo.
I: Non ho capito cosa devo fare.
A (Eleonora): In alto sul quinto.
I: E come li metto? A caso? Così?

. .[94]

A (Eleonora): A quadrato. Due in verticale e uno in orizzontale.
I: Oh! Abbiamo costruito il sesto.

IR: Mancano i disegni?
I: Qualcuno l'ha fatto in modo diverso o lo vuole spiegare in modo diverso?
A (Sabrine): Io non ho capito.
I: Allora lei non ha capito. C'è qualcuno che glielo vuole spiegare? Veronica[95].
A (Veronica): Allora. Bisogna aggiungere tre perché nel quinto c'è già la base. Cioè la parte alta è la base di quello dopo. Capito? Quindi per fare il quadrato ne bastano solo tre siccome la base c'è già. Hai capito?
A (Sabrine): Ah, sì.
A (Justice): Io no.
A (Laura): Oh mamma!
I: Lui no.
A (Veronica): Allora. Questa… Sono quadratini. Noi abbiamo cinque piani e dobbiamo fare il sesto, ma siccome c'è già la base basta aggiungere soltanto gli altri tre. Cioè la base alta del quinto è la base del sesto e quindi ne mancano tre. Non so spiegarglielo.
I: Qualcuno sa spiegarglielo? Andrei.[96]
A (Andrei): Allora, fai conto che la base del quinto è l'ultimo fiammifero, ne aggiungi tre, due in verticale e uno in orizzontale.
A (Laura): Io non ho capito niente di quello che ha detto.
A (Riccardo): Posso spiegarlo io?
I: Prova.
A (Riccardo): Perché il tettuccio dell'ultimo piano fa anche da base per il piano successivo.
G: Ah sì!
I: Bravo. Quindi?
A (Riccardo): Quindi basta che ne aggiungi tre perché il primo c'è già.
I: Quindi ne aggiungi due fiammiferi…
A (Riccardo): In verticale e uno in orizzontale.
I: I due fanno da pareti e uno fa da soffitto. Quindi se aggiungessi un altro piano…
G: La stessa cosa.
A (Veronica): Il primo fa eccezione perché non c'è niente sotto.
I: Esatto. Allora, proviamo a fare una cosa simile a quella che abbiamo fatto l'altra volta. Ve la ricordate?

---

[92] *Meglio, vieni alla lavagna, fai vedere.*
[93] *Sarebbe meglio: 'Spiega perché tre'. Bisogna sempre puntare al* ***processo*** *del pensiero, più che al* ***prodotto*** *del pensiero, anche se quest'ultimo è molto più 'gettonato' dagli alunni.*
[94] *Manca il disegno, sia qui che nella lavagna successiva.*
[95] *Avrei chiamato Sabrine alla lavagna a costruire.*
[96] *In realtà Veronica sta spiegando correttamente, in modo chiaro.*

A (Andrei): No.
I: Dai! Avevamo costruito una tabella che ci serviva per stabilire che numero c'era nella successione. Se io vi chiedessi "quanti fiammiferi ci sono nel primo piano?"
C: Quattro!
I: Quindi per fare il primo piano me ne servono quattro. Proviamo a fare la tabella. Cosa possiamo mettere nella tabella?
A (Veronica): Primo piano?
I: Beh, avremo il primo…
C: Il secondo, il terzo, il quarto…
I: E allora qui cosa ci mettiamo?
C: Piano!
I: Numero del piano.

Piano
1°
2°
3°
4°
5°
6°

A (Veronica): Numero del piano e numero di fiammiferi.
I: Esatto, numero di fiammiferi.

Numero Piano	Numero di fiammiferi
1°	
2°	
3°	
4°	
5°	
6°	

I: Per fare il primo piano quanti fiammiferi ci vogliono?
C: Quattro
I: Secondo?
C: Sette.
I: Terzo?
C: Dieci.
I: Quarto?
C: Tredici.
I: Quinto?
C: Sedici.
I: Sesto?
C: Diciannove.
A (Sabrine): Ah sì! Ho capito[97]!

Numero Piano	Numero di fiammiferi
1°	4
2°	7
3°	10
4°	13
5°	16
6°	19

I: Quindi, nella terza colonna della nostra tabella, cosa possiamo mettere?[98]
A (Andrei): + 3.
A (Alessia): Nel primo 4 × 1, nel secondo 4 × 1 + 3.

---

[97] *I disegni aiutano anche il lettore, oltre a Sabrine!*
[98] *Avrei suggerito l'ipotesi di una terza colonna, ma chiedendo il motivo per cui era opportuno inserirla, in pratica per controllare una eventuale relazione tra i piani ed i fiammiferi.*

I: Altre possibilità?[99]
A (Arianna): Allora, nel primo 4, nel secondo 4 + 3, nel terzo 4 + 3 + 3, nel quarto 4 + 3 + 3 + 3.
I: Altri?
A (Francesco): Prof, si potrebbe fare quello con le potenze?
I: Che non abbiamo ancora fatto.[100]
A (Justice): Io le so.
I: No, non si usano cose che non abbiamo fatto[101]. Altre possibilità? Provate anche a ragionare su quelle che sono già state date.
A (Giuseppe): Nel primo piano scrivo 4. Nel secondo 4 + 3 × 1. Nel terzo 4 + 3 × 2. Nella quarta 4 + 3 × 3 e nella quinta 4 + 3 × 4.
A (Veronica): 4 nel primo. 4 × 2 – 4.
I: 4 nel primo.
A (Veronica): No, 4 × 2 – 4 nel primo. Poi nella seconda 4 × 3 – 4. È giusta?
A (Justice): Ti si è accesa la lampadina ma ti complichi la vita[102].
A (Veronica): E va beh!
I: Beh, vediamo.
A (Veronica): 4 × 4 – 4. Poi 4 × 5 – 4.

Andrei	Alessia	Arianna	Giuseppe	Veronica
+3	4 × 1	4	4 × 1[103]	4 × 2 – 4
+3	4 × 1 + 3	4 + 3	4 + 3 × 1	4 × 3 – 4
+3	4 × 1 + 6	4 + 3 + 3	4 + 3 × 2	4 × 4 – 4
+3	4 × 1 + 9	4 + 3 + 3 + 3	4 + 3 × 3	4 × 5 – 4
+3	4 × 1 + 12	4 + 3 + 3 + 3 + 3	4 + 3 × 4	4 × 6 – 4
+3	4 × 1 + 15	4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	4 + 3 × 5	4 × 7 – 4

I: Ok, allora, andiamo a vedere se sono giusti. Vuol dire che al primo posto devo ottenere quattro fiammiferi, al secondo sette, al terzo 10 e così via. Partiamo da quello dell'Alessia.[104]

Alessia	
4 × 1	= 4
4 × 1 + 3	= 7
4 × 2 + 3	= 11
4 × 3 + 3	= 15
4 × 4 + 3	= 19
4 × 5 + 3	= 22

G: È sbagliato!
I: Non va bene.[105] Quindi quello dell'Alessia è sbagliato.
Brusio.
I: Almeno lei ci ha provato!

---

[99] *Invece di chiedere altre possibilità, avrei chiesto ad Alessia di continuare. Se non l'avesse scritto M, l'avrei scritto io. È opportuno indagare sulle proposte degli alunni, dando spazio anche ai compagni e alle loro interpretazioni. Altrimenti gli alunni si consolidano nella convinzione che il referente è sempre l'insegnante, e che quindi è lui che decide se va bene o no, chi deve intervenire, chi dice cose corrette e chi no e così via.*
[100] *Attenzione: Francesco, probabilmente, sta pensando che 3 + 3 equivalga a 3 x 3 =* 3^2.
[101] *Mi sembra una risposta troppo perentoria. Forse sarebbe meglio un complimento, o la metafora del frigorifero, o una richiesta di una pur veloce spiegazione. I è troppo 'ago della bilancia', e questo va a scapito della costruzione di una* intelligenza sociale *nella classe.*
[102] *Si sarebbe potuto chiedere a Justice il perché della sua affermazione.*
[103] *Avrei sollecitato l'attenzione sulla scrittura di Giuseppe, quel 4 x 1 è una "anomalia" rispetto alle scritture successive.*
[104] *Io sarei partita da Veronica, l'ultima intervenuta, avrei chiesto osservazioni sulla proposta di Veronica per indurli ad osservare che i suoi "grattaceli" sono tutti costruiti con un numero totale di fiammiferi multiplo di 4, cosa non vera in generale. Io sarei stato ancora più libero. L'esordio che in genere preferisco è 'Bene. Commenti?'. A quel punto l'insegnante pilota la discussione.*
[105] *Solito **processo** di pensiero e **prodotto** di pensiero. I non può accettare osservazioni così **opache**. Non sono educative per la classe. Il **contratto didattico** deve prevedere che le affermazioni siano sempre **argomentate**.*

A (Justice): Anche io!
A (Andrei): E il mio?[106]
I: Il tuo che? +3 a tutto?
A (Andrei): 4. 4 + 3 = 7. 7 + 3 = 10. 10 + 3 = 13. 13 + 3 = 16.
A (Giuseppe): Come la Veronica, prof.
I: No, è diverso.
A (Giuseppe): Come l'Arianna.
I: Quindi Andrei dice:

Andrei	
	4[107]
+3	4 + 3 = 7
+3	7 + 3 = 10
+3	10 + 3 = 13
+3	13 + 3 = 16
+3	16 + 3 = 19

I: Sì, è giusto, ma vedremo se ci sarà utile. Arianna.

Arianna	
4	= 4
4 + 3	= 7
4 + 3 + 3	= 10
4 + 3 + 3 + 3	= 13
4 + 3 + 3 + 3 + 3	= 16
4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3	= 19

I: Questo potrebbe andar bene, almeno risulta.[108]
A (Laura): Sì ma ci complica la vita!
I: Giuseppe.[109]

Giuseppe	
4×1	= 4
$4 + 3 \times 1$	= 7
$4 + 3 \times 2$	= 10
$4 + 3 \times 3$	= 13
$4 + 3 \times 4$	= 16
$4 + 3 \times 5$	= 19

I: Questo può andar bene.[110]
A (Veronica): Il mio è sbagliato!
I: Veronica:

---

[106] *La domanda esprime la* dipendenza, *già commentata, degli alunni dall'insegnante - ago della bilancia. La riflessione deve essere davvero* ***collettiva****, e gli alunni devono diventare protagonisti* *consapevoli* *di questo. Vanno esaltati l'atteggiamento cooperativo, il rapporto fra pari, l'attenzione per le osservazioni dei compagni.*
[107] *Non condivido la trascrizione dell'idea di Andrei, così il +3 non è un operatore.*
[108] *Meglio: 'Così, seguendo le indicazioni di Arianna, ritroviamo i fiammiferi con cui si costruiscono i grattacieli'. Invito a riflettere su quel 'risulta' (solito problema della dominanza del pensiero aritmetico).*
[109] *Avrei chiesto a Laura di spiegare la sua, pertinente, osservazione.*
[110] *Giuseppe presenta una "regola" simile a quella di Arianna, ma la forza della sua regola sta nella sua compattezza e nel fatto che riesce a mettere in evidenza la costanza di due numeri (grandezze) e la variazione di un altro. Penso sarebbe stato bello mettere a confronto, subito, le due regole per controllare le reazioni degli alunni. Aggiungo che sarebbe meglio che fosse la classe a certificare se 'va bene' o meno. 'Imparare a mettersi in disparte' è unna regola aurea.*

Veronica	
$4 \times 2 - 4$	$= 4$
$4 \times 3 - 4$	$= 8$
$4 \times 4 - 4$	$= 12$
$4 \times 5 - 4$	$= 16$
$4 \times 6 - 4$	$= 20$
$4 \times 7 - 4$	$= 24$

G: Non è giusta!
A (Federica): Eh, dovrebbe essere: – 4, – 5, – 6, – 7 etc.
I: Quello è un altro modo. Proviamo[111].

Federica	
$4 \times 2 - 4$	$= 4$
$4 \times 3 - 5$	$= 7$
$4 \times 4 - 6$	$= 10$
$4 \times 5 - 7$	$= 13$
$4 \times 6 - 8$	$= 16$
$4 \times 7 - 9$	$= 19$

I: Quindi questo può andar bene. Possono andare bene quello dell'Arianna, di Giuseppe, della Federica e di Andrei. Abbiamo detto che però quando otteniamo cose di questo tipo è molto facile. Noi siamo arrivati al sesto posto però il problema è, per esempio, quanti fiammiferi ci servono per fare 200 piani. Continuo ad aggiungere 3?
C: Nooo!!![112]
I: Cose devo trovare? Una…[113]
A (Arianna): ... una regola.
I: Una regola specifica?[114]
A (Veronica): No.
Confusione.
I: Una regola ge…[115]
G: Generale!
I: Una regola generale che mi serve per qualsiasi situazione. Secondo voi, quale sarà delle formule trovate quella più utile per trovare una regola generale?[116]
A (Veronica): $4 + 3 \times 1$.
A (Arianna): Sì.
A: Sì quella di Giuseppe.
I: Quella di Andrei secondo voi?
C: Nooo!!!
A (Laura): Ti complichi la vita!
A (Andrei): Beh, + 3, + 3, + 3….
I: Infatti, questo 7 dove lo trovo?
A: Dal risultato[117].
A: Da niente.[118]

---

[111] *I non dovrebbe 'appropriarsi' così presto delle proposte degli alunni, soprattutto quando si riferiscono a cose fatte da un compagno. È più produttivo – in termini sia cognitivi che sociali – chiedere pareri all'autore ('Che ne pensi, Veronica'?), invitare la classe ('Interessante... voi cosa ne pensate?'), a colui che fa l'osservazione ('Puoi spiegarti meglio?').*
[112] *Se ho tempo posso anche farlo!*
[113] *L'ho già scritto più volte: I dovrebbe cercare di evitare le domande 'telefonate'.*
[114] *Cioè: una regola per questa situazione problematica?*
[115] *V. Commento 24!*
[116] *Attenzione, "in qualsiasi situazione" all'interno dei grattaceli!*
[117] *Cose già dette sul punto di vista aritmetico.*
[118] *Non accontentarsi mai di frasette così misere. Ribadire (e ricostruire collettivamente) il **contratto didattico** per quanto concerne l'**argomentazione** per favorire la comunicazione.*

I: Quindi quella di Andrei non va bene. Quella dell'Arianna?[119]
A: Troppo lunga!
A (Veronica): Deve fare 4 + tre volte …. *(non capisco)*
I: Quella dell'Arianna e quella di Giuseppe…
A (Arianna): Sono uguali.
Tante voci, non si capisce niente.
I: Ragazzi state parlando tutti insieme e io non capisco niente. Laura.
A (Laura): Quella di Giuseppe ci metti meno tempo a farla perché non devi scrivere sempre + 3, + 3, + 3 e fai subito 3 ×…[120]
I: Sono diverse?
G: No.
I: Arianna.
A (Arianna): Sono la stessa cosa però in quella di Giuseppe prendi il tre tante volte e invece là lo aggiungevo.
I: Ok, quindi non è sbagliata quella dell'Arianna, però… Quindi rimane quella di Giuseppe e quella della Federica.
A (Veronica): Quella della Federica è la migliore!
I: Riscriviamole.

Giuseppe	
4×1	$= 4$
$4 + 3 \times 1$	$= 7$
$4 + 3 \times 2$	$= 10$
$4 + 3 \times 3$	$= 13$
$4 + 3 \times 4$	$= 16$
$4 + 3 \times 5$	$= 19$

Federica	
$4 \times 2 - 4$	$= 4$
$4 \times 3 - 5$	$= 7$
$4 \times 4 - 6$	$= 10$
$4 \times 5 - 7$	$= 13$
$4 \times 6 - 8$	$= 16$
$4 \times 7 - 9$	$= 19$

I: Cerchiamo adesso di trovare un modo per generalizzare. Vi ricordate? L'altra volta avevamo sostituito alcuni numeri con…[121]
A: Una lettera.
I: Esatto. Perché avevamo visto che quel numero voleva sempre dire la stessa cosa. Nel nostro caso precedente era…[122]
A: Enne.
I: Sì ma cos'era la enne?
A: Ennesima.
A (Giuseppe): Un modo per…
I: Sì ma l'avevamo usata per sostituire…
A (Arianna): La posizione.[123]
I: Vediamo qui cosa possiamo fare. Partiamo da quella di Giuseppe.
A (Giuseppe): Ma è giusta quella?

---

[119] *La regola di Andrei non è stata scritta in modo chiaro , ma è simile a quella di Arianna (mi sembra). Mi pare che Andrei aggiunga 3 al numero precedente; se non lo conosce non può andare avanti. Nella sua 'regola' manca la possibilità di giungere alla generalizzazione ponendo in relazione il numero della successione con il numero del posto.*

[120] *Bene Laura! Situazioni come queste sono preziose per mettere in evidenza le **rappresentazioni additive** e quelle **moltiplicative**. V. a questo proposito la prima voce del Glossario (Additiva: forma, rappresentazione). Aiutano a riconoscere le **relazioni** fra gli elementi della situazione problematica e della sua rappresentazione, e a riflettere sulla **struttura** di quest'ultima.*

[121] *Attenzione, la lettera non sostituisce alcuni numeri, ma sta ad indicare un generico elemento dell'insieme. Tuttalpiù si può parlare di sostituire una lettera con dei valori numerici, ma allora si hanno delle particolarizzazioni.*

[122] *Non mi è chiaro quello che dice I.*

[123] *Meglio: il numero che indica la posizione.*

I: Sì sì. Due modi differenti, bisogna trovare quello migliore. Vediamo quale delle due formule generali è la migliore. Partiamo da quella di Giuseppe. Possiamo generalizzare qualche cosa?[124]
G: Il 4!
G: Il 3!
I: Allora, invece di sparare dei numeri, cerchiamo anche di motivare.
A: Il 4 e il 3 perché si ripetono.
I: Esatto, allora noi dobbiamo trovare un qualche cosa che si ripete, perché vuol dire che è sempre…
A: Uguale.
I: Ma possiamo anche trovare qualche cosa che non è sempre uguale ma che rappresenta sempre la stessa cosa ma che, essendo a piani differenti, sta ad indicare cose diverse. Proviamo a pensare. Nessuna idea?[125]
A (Veronica): Mi è venuto in mente un altro modo, posso provare? Fare 4 + 3, come Giuseppe, × 2 – 1.
C: Ohhh!!!
I: E che cos'è?
A (Veronica): Così vien sempre fuori 1[126].
I: Ma a me non serve sempre 1.
A (Veronica): Ma poi faccio 4 – 2, poi 6 – 3, poi 8 – 4.
A: Sì e poi ti viene la virgola.
A (Veronica): No, ma non va bene.[127]
I: Ridimmi.
A (Veronica): 4 + 3 × 2 – 1.
I: Fra parentesi?
A (Veronica): Sì.

Veronica
4 × 1
4 + 3 × (2 – 1)
4 + 3 × (4 – 2)
4 + 3 × (6 – 3)
4 + 3 × (8 – 4)
4 + 3 × (10 – 5)

A (Andrei): Eh! È uguale!
I: Torniamo alle nostre due possibilità. Troviamo il modo di generalizzare. Non troviamo niente che possiamo sostituire?[128]
A: Il 4.
A: E il 3.
I: Ma il 4 è sempre uguale.
A: Il segno.[129]
I: Allora, vi ricordate quando abbiamo fatto la successione l'altra volta, chi si ricorda come era la regola generale?[130]
Varie voci confuse (è entrata la bidella).
I: Qualcuno si ricorda la regola?
A: Allora: dal numero iniziale si aggiungeva la posizione[131] meno 1.

---

[124] *Non credo sia abbastanza chiara la richiesta dell'insegnante. Io avrei chiesto di osservare se esistono numeri che si ripetono nella costruzione dei grattacieli.*
[125] *I è decisamente enigmatica! Mi sembra di cogliere, di nuovo, lo stesso errore metodologico, cioè voler arrivare subito alla regola senza aver prima sollecitato la classe al confronto delle due colonne cioè alla messa in relazione tra n° d'ordine e n° dei fiammiferi (dei grattaceli).*
[126] *Avrei chiesto spiegazione. V. Commento 111.*
[127] *Tutto l'intervento di Veronica va messo in discussione!*
[128] *Non mi è chiaro quello che vuol comunicare I.*
[129] *La classe sta provando a caso! Non intervengo più su questi aspetti perché ci sono già molti commenti di M e miei sull'argomento 'conduzione della discussione'.*
[130] *Non sono d'accordo sul suggerimento di I, solo alla fine del lavoro gli alunni dovrebbero accorgersi, percepire l'analogia.*
[131] Il numero *della posizione. È un dettaglio molto importante. È facile che 'scappi' nel corso della discussione, ma è bene che l'insegnante si faccia le antenne in questo senso.*

I: Allora: il numero iniziale, quello che era sempre uguale, non lo sostituivamo[132]. Sostituivamo invece quello che cambiava. Proviamo un attimo a pensare a quel 4 + 3 × 1, 4 + 3 × 2, 4 + 3 × 3. Che cosa rimane di costante? Il 4[133].

Giuseppe
4
4 + 3 × 1
4 + 3 × 2
4 + 3 × 3
4 + 3 × 4
4 + 3 × 5

A: Anche il 3!
I: Esatto, anche il + 3. E allora, 4 + 3 teniamocelo.[134]

Giuseppe
4
4 + 3 × 1
4 + 3 × 2
4 + 3 × 3
4 + 3 × 4
4 + 3 × 5

I: Perché ce li dobbiamo tenere? Chi rappresenta il 4? Guardate un po'.
G: Il numero iniziale.
I: È il primo piano, formato da…
C: 4 fiammiferi.
I: Ogni piano aggiungo?
C: 3.
I: Quindi questo 3, sono i fiammiferi che devo…[135]
G: Aggiungere.
I: Quante volte? Dipende.[136]
A: 1, 2, 3, 4…
I: È il piano?[137]
A: Piano meno 1.
A: Posizione meno 1.
I: Piano meno 1. Perché se vedete, al secondo piano moltiplico per 1, cioè piano 2° meno 1. Al terzo piano per 2, cioè?
A: Piano meno 1.
I: Al quarto piano moltiplico per tre, cioè?
C: Piano meno 1.
I: Al quinto piano moltiplico per…
C: 4.
I: Cioè?
C: Piano meno 1.

Piano	Giuseppe
1	4
2	4 + 3 × 1
3	4 + 3 × 2
4	4 + 3 × 3
5	4 + 3 × 4
6	4 + 3 × 5

[132] *Non si tratta di "sostituzioni".*
[133] *Ma perché lo dice I? Non dovrebbero dirlo gli alunni?*
[134] *Attenzione, così si invita, psicologicamente, a calcolare (4 + 3) × ….*
[135] *Solita questione dei 'moutonsss' (v. Commento 24).*
[136] *Sarebbe stato bello se il "dipende" fosse venuto dalla classe!*
[137] *Meglio: corrisponde al numero del piano?*

I: E allora come la scrivo la formula generale?
C: 4 + 3 × (piano – 1)!
G: 4 + 3 × (p – 1)!
I: Esattamente. Quindi per il 200° piano, Crinela? Per costruire 200 piani, quanti fiammiferi mi servono?[138]
A (Crinela): Non lo so.
I: Guarda la formula generale. Stai dormendo.
A (Crinela): Allora…
I: Dimmi quello che fai, poi il calcolo lo facciamo insieme. Rossella?
A (Rossella): Devo fare 200 – 1.
I: Qual è la formula generale?[139]
A (Rossella): Quella.
I: Allora?
A (Rossella): 200…
I: Dove?
A (Rossella): Parentesi…
A (Giuseppe): Oh, ma svegliati!
I: Fuori.
A (Giuseppe): Io?
I: Sì.
A (Giuseppe): Ma ho solo detto “svegliati”!
I: Appunto! Ed è anche il modo! Perché se tu fai il furbo, a me non sta bene, te l’ho già detto, stai assumendo un atteggiamento che non va bene e io non ti permetto di dire a nessuno “Oh ma svegliati”, non te lo permetto. Quindi vai fuori e ti prendi anche la nota. Perché la maleducazione nei confronti degli altri è una cosa che io non tollero. Vale per lui e vale per tutti gli altri. Che mai vi permettiate di dire cose simili ad un compagno. È chiaro? Allora, Rossella, 200 al posto di chi lo metti?. .[140]
A (Rossella): Al posto di p.
I: Tutto il resto c’è già e rimane. Quindi?
A (Rossella): 4 + 3 × (200 – 1).
I: Esatto. Quindi?

$$\begin{aligned}&4 + 3 \times (p - 1) =\\ &= 4 + 3 \times (200 - 1) =\\ &= 4 + 3 \times 199 =\\ &= 4 + 597 = 601\end{aligned}$$

I: Lorenzo, quanti fiammiferi mi servono per fare 50 piani?[141]
A (Lorenzo): 200.
I: Che cosa fai?
A (Lorenzo): 50 × 4.
I: Che non è assolutamente vero, perché cosa stiamo dicendo? Eleonora[142]. Lui cosa ha fatto facendo 50 × 4? 50 erano i piani.
A (Eleonora): × 4 sarebbe per il primo.

---

[138] *Avrei commentato: buona idea, ma p cosa rappresenta? Per costruire 200 piani, come faccio se voglio sfruttare la nostra formula?*
[139] *Non avrei interrotto Rossella che, forse, cerca di sistemare subito la “variabile” piano.*
[140] *Al di là della matematica, non penso sia educativo far uscire dall’aula un alunno.*
[141] *Meglio: Lorenzo come fai per calcolare quanti fiammiferi occorrono per fare 50 piani? Per dirla in termini teorici: I punta al* ***prodotto****, M al* ***processo****. I resta ancorata al pensiero aritmetico, M la invita al pensiero* ***algebrico****. La coppia processo/prodotto è una delle chiavi, forse* la *chiave concettuale, nella costruzione del* ***balbettio algebrico****. È proprio una questione di rivoluzione copernicana delle proprie coordinate culturali, perché la formazione di base di quasi tutti gli insegnanti condiziona profondamente il loro pensiero nella direzione del pensiero aritmetico. Bisogna che l’insegnante impari a riconoscere, in tutte le infinite microsituazioni di classe, l’emergere di occasioni favorevoli alla riflessione* ***collettiva*** *sul confronto fra i due punti di vista.*
[142] *Sarebbe stato meglio chiedere allo stesso Lorenzo il perché della sua proposta. Bisognerebbe abituarsi a chiedere il più spesso possibile agli alunni* le ragioni *delle loro proposte. Lo so che non sempre è possibile, o conveniente, ma la direzione dovrebbe essere quella. Cito a questo proposito un articolo di Booth (1986) in cui si afferma: ‘Gli errori e le misconcezioni degli allievi spesso non sono né prese a cuor leggero né stupide, ma rappresentano il risultato di riflessioni e di tentativi* ragionevoli *per dare un senso ad espressioni matematiche altrimenti prove di significato’.*

I: Cioè cosa ha fatto? Ha preso il primo e ha usato lo stesso numero di fiammiferi 50 volte. Ma abbiamo visto che per ogni piano che aggiungo devo aggiungere 4 fiammiferi?
C: No.
A (Andrei): Fa 154 fiammiferi.
I: Devo aggiungere 4 fiammiferi?[143]
A (Andrei): Fa 154 fiammiferi.
I: Rispondi alla mia domanda! Devo aggiungere 4 fiammiferi?
A (Andrei): No.
I: Ne devo aggiungere…
A (Laura): Tre!
I: × 4 non va bene. Allora, non dirmi il numero, dimmi come fai a trovare il numero di fiammiferi[144] per il cinquantesimo piano.
A (Riccardo): Secondo me fai 50…
I: Ma scusa Riccardo, cosa abbiamo trovato adesso? Abbiamo trovato una formula generale. Allora usala.
A (Riccardo): Eh!

$$4 + 3 \times (p - 1) =$$
$$= 4 + 3 \times (50 - 1) =$$
$$= 4 + 3 \times 49 =$$
$$= 4 + 147 = 151$$

I: Quindi alla fine mi servono?
A (Arianna): 151 fiammiferi.
I: Sabrine, quanti fiammiferi mi servono per costruire 20 piani?
A (Sabrine): Venti piani?
A: È la stessa cosa…
A (Sabrine): Faccio 20…[145]
I: Ragazzi, io non voglio che stiano attenti sempre e solo i soliti! Francesco!
A (Francesco): Faccio 4 + 3 ×… Devo trovare?
I: I fiammiferi che mi servono per costruire 20 piani.
A (Francesco): 4 + 3 × (20 – 1). 4 + 3 fa 7...
I: Oh!!! Le precedenze! C'è un ×! E devo fare prima la tonda! Quindi?[146]
A (Francesco):

$$4 + 3 \times (p - 1) =$$
$$= 4 + 3 \times (20 - 1) =$$
$$= 4 + 3 \times 19 =$$
$$= 4 + 57 = 61$$

I: Ok. Ci siamo? Quindi, la formula generale per il metodo di Giuseppe è questa: 4 + 3 × (p – 1). Troviamo adesso la formula generale per quella della Federica. Cosa rimane di costante?[147]
A: Il 4!
A: 4 × 3!
I: Il 4, e basta!

---

[143] *Non era più semplice farsi spiegare come è arrivato al 154?*
[144] *Bene. Qui I introduce il **processo**. Sarebbe bene arrivare al punto che siano gli alunni stessi a influenzarsi a vicenda richiamando processo e **prodotto**. Sarebbe anche opportuno introdurre sin dall'inizio un altro termine topico: **rappresentazione**. Questi termini dovrebbero essere trascritti un po' alla volta su dei cartoncini e fissati ben visibili alla parete, in modo da sottolineare il patrimonio linguistico condiviso da tutta la classe.*
[145] *Non si capisce cosa succede a Sabrine.*
[146] *Ancora una volta I dovrebbe fare in modo che sia la classe stessa ad accorgersi dell'errore di Francesco e a correggerlo.*
[147] *Avrei, caso mai, detto "vediamo se riusciamo a trovare…", ma non mi sembra il momento più opportuno per coinvolgere la classe in un'altra problematica pesante. I ragazzi sono finalmente arrivati alla scrittura "algebrica" di una regola condivisa ma probabilmente non ancora digerita da tutti, dunque avrei proposto di costruire ancora grattaceli e, adesso sì, avrei sollecitato gli alunni ad una riflessione tra questa problematica e altre precedenti (senza parlare di successioni). Forse I è un po' condizionato dalla sensazione di dover completare gli obiettivi della scheda?*

Federica
4 × 2 – 4
4 × 3 – 5
4 × 4 – 6
4 × 5 – 7
4 × 6 – 8
4 × 7 – 9

I: Chi è 2, 3, 4, 5, 6 e 7?[148]
A (Veronica): Quello per cui devo moltiplicare.
A (Laura): I piani.
A (Sabrine): Il piano.[149]
I: Allora, nel primo piano moltiplico per…
A (Andrei): Piano + 1.
I: Nel secondo piano moltiplico per?
A (Veronica): Tre.
I: Al terzo?
C: Quattro.
I: Al quarto?
C: Cinque.
I: Al quinto?
C: Sei.
I: Al sesto?
C: Sette.[150]
I: E allora? Moltiplico 4 ×?
C: Piano + 1.

Piano	Federica
1	4 × 2
2	4 × 3
3	4 × 4
4	4 × 5
5	4 × 6
6	4 × 7

I: Perché questo 2, 3, 4, 5, 6 vedete che corrisponde al piano + 1? Sì o no?[151]
C: Sì.
I: Poi però mi rimane quel – 4, – 5, – 6, – 7, – 8...

Piano	Federica
1	4 × 2 – 4
2	4 × 3 – 5
3	4 × 4 – 6
4	4 × 5 – 7
5	4 × 6 – 8
6	4 × 7 – 9

A: P + 3.
A (Veronica): Eh lo so, lo so. Lo so cosa sono io. Sono sempre + 2 del piano – 1. Sono sempre 2 in più.

---

[148] *Avrei chiesto a Federica cosa possono rappresentare quei numeri.*
[149] *Solita questione del* numero *del piano, da affrontare sempre, appena si presenta la confusione.*
[150] *Più che sulla litania dei numeri, bisogna puntare sulla rappresentazione* ***non canonica*** *della* ***relazione*** *fra i numeri in gioco. Quello che conta non è il singolo numero; il fatto che gli alunni rispondano quattro, cinque, sei, sette, non garantisce che abbiano capito il senso di ciò che stanno facendo.*
[151] *Non sono molto d'accordo su come è stata impostata la discussione. Inoltre: attenzione alla solita domanda 'Sì o no?' e all'inevitabile risposta (in questo caso) 'Sì'.*

A (Rossella): + 3[152].
I: Quindi –…
A (Veronica): Non meno, più!
I: È meno![153]
A (Veronica): – piano + 1, – 2. + 2.
I: Allora, nel primo piano tolgo...?
A (Veronica): 4.
I: Nel secondo piano tolgo?
G: 5.
I: Nel terzo piano tolgo?
G: 6.
I: Nel quarto piano tolgo?
G: 7.
I: Nel quinto piano tolgo?
G: 8.
I: Nel sesto piano tolgo?
G: 9.
I: Cerchiamo una corrispondenza.[154]
A (Federica): Ah! Perché invece di raddoppiare si toglie!
I: Con cosa? Alessia.
A (Alessia): Si toglie sempre 3 al piano[155].
A (Veronica): Io lo so! Si aggiunge sempre 3[156]. 1 + 3 fa 4, 2 + 3 fa 5.

Piano	Federica	
1	4 × 2 – 4	piano + 3 = 1 + 3 = 4
2	4 × 3 – 5	piano + 3 = 2 + 3 = 5
3	4 × 4 – 6	piano + 3 = 3 + 3 = 6
4	4 × 5 – 7	piano + 3 = 4 + 3 = 7
5	4 × 6 – 8	piano + 3 = 5 + 3 = 8
6	4 × 7 – 9	piano + 3 = 6 + 3 = 9

I: Capite che queste cose, al di là del fatto di essere fuori un po' da quello che stiamo facendo in classe, vi serve per aprire la mente e le persone che ne avrebbero più bisogno sono quelle che si fanno i fattacci loro. Vero? Quindi, se 1 diventa 4, 2 diventa 5, 3 diventa 6, vuol dire che si aggiunge sempre 3 e allora faccio…
C: Piano + 3.
. .[157]
A (Andrei): Ah, è vero!
I: Cosa diventa allora alla fine? 4 × (piano + 1) – (piano + 3)

---

[152] *Manca una spiegazione.*
[153] *Attenzione al linguaggio! V. Commento 70.*
[154] *Tra cosa?*
[155] Al numero del piano.
[156] *Opportuno chiedere 'Aggiungi 3 a cosa?' Vorrei che I non pensasse che questa osservazioni sembrano spocchie possibili a tavolino, a bocce ferme. L'esperienza acquisita nel corso del progetto ArAl mostra come sia necessario che l'insegnante potenzi le proprie antenne nella direzione del pensiero prealgebrico in modo da cogliere spontaneamente queste sfumature sul campo. Un po' alla volta la classe stessa risente dei benefici di questa sempre più diffusa sensibilità.*
[157] *Avrei fatto un commento più positivo, per es. "molto bene, siamo riusciti a capire come funziona, per ogni grattacelo, la regola di Federica... " Sono pienamente d'accordo. Sottolineo anche che la classe non è affatto 'fuori da quello che stiamo facendo' anzi, ciò che sta accadendo sul piano matematico, metodologico, sociale, linguistico, dovrebbe diventare proprio la regola, non rimanere un'eccezione. Il rischio è che gli alunni chiedano 'Quando si fanno ancora i fiammiferi?' o, ancora peggio 'Quando si fa ancora fiammiferi?', come se 'fiammiferi' fosse un giochino a latere della matematica.*

Piano	Federica	4 × (piano + 1) – (piano + 3)
1	4 × 2 – 4	4 × (1 + 1) – (1 + 3)
2	4 × 3 – 5	4 × (2 + 1) – (2 + 3)
3	4 × 4 – 6	4 × (3 + 1) – (3 + 3)
4	4 × 5 – 7	4 × (4 + 1) – (4 + 3)
5	4 × 6 – 8	4 × (5 + 1) – (5 + 3)
6	4 × 7 – 9	4 × (6 + 1) – (6 + 3)

I: Dovevo trovare un modo per trovare questi numeri. L'unico modo era quello di prendere il piano e aggiungere prima uno e poi tre. Quindi la formula generale del metodo della Federica è 4 × (p + 1) – (p + 3). Quale è meglio?[158]
C: Giuseppe!
I: Però possiamo usarle entrambe.
A (Laura): Sì però quella è più facile[159].
I: Abbiamo visto che là per venti piani mi servivano quanti fiammiferi?
G: 61.
I: Proviamo con questo. Ventesimo piano diventa... ?
C: 4 × (20 + 1) – (20 + 3).
A (Veronica): Aiuto prof, ma cos'è?[160]

Piano	
20	4 × (20 + 1) – (20 + 3) = 4 × 21 – 23 = 84 – 23 = 61

I: Ohhhh!
A (Veronica): Però è più complicato!
Varie voci confuse di commento.
I: Vedete che quindi non c'è sempre un unico modo, anche in quello dell'altra volta ce ne erano altri, noi abbiamo trovato il più semplice ma ce n'erano altri.
A: Davvero?
I: Non ve li ho detti perché volevo che li tiraste fuori voi e quindi sono rimasta con quello che mi avete dato voi. Qui ne avete trovati due, magari ce n'erano degli altri.
A (Veronica): Il mio andava bene!
A: Macchè!
I: Allora per lunedì ve ne do uno da fare a casa.
G: Noooooo!
G: Sììììììììì!
A: Ma nooo!
I: Funziona nello stesso modo, ma il grattacielo ha la forma diversa. Come l'altra volta però non limitatevi alla rispostine sì, no, forse. Spiegate come avete fatto, qual è il vostro ragionamento etc. In realtà quello che vi do è molto facilitato perché se guardate nella tabella, vedete che vi aiuta a trovare la formula generale. Quello che vi chiedo è di trovarne delle altre così come abbiamo fatto oggi, tutte quelle che vi vengono in mente le fate. Non limitatevi a quella che vi aiuta a fare, che è la più semplice. Vorrei che venissero fuori anche altre. Va bene, bravi. . .[161]

---

[158] *Il commento dell'insegnante non mi sembra dei migliori, forse era meglio spiegare che si sta cercando di osservare se esiste un collegamento generale (vero quindi per tutti i grattaceli) tra i piani ed i fiammiferi e tale collegamento consiste proprio nel fatto che nella prima parte della regola occorre aumentare di 1 il n° del piano - 4 × (p – 1) - dove p rappresenta il n° del piano del grattacielo, mentre nella seconda parte della regola il p (n° del piano) va aumentato di 3 unità. Guardando entrambe le regole quale preferite?*
[159] *È sempre opportuno chiarire collettivamente queste osservazioni degli alunni: esse rappresentano il **prodotto** di un pensiero, non il suo **processo**. Come tali sono **opache** di significato, e dobbiamo costruire **trasparenza** di pensiero, unica (speranza di) garanzia per costruire significati.*
[160] *Veronica non riconosce nella scrittura una espressione o c'è dell'altro?*
[161] *La formula generale, meglio una formula generale, altrimenti è contraddittorio chiedere ai ragazzi altre formule.*

. .[162]

[162] *1°) punto : gestione lezione*
A mio parere questa lezione si è articolata meglio rispetto alla precedente, con minore frammentazione e con una partecipazione più produttiva dei ragazzi. Probabilmente, anche la maggiore concretezza della problematica (possibilità di lavorare con materiale ad hoc) ha creato i presupposti per attivare interesse e produrre risultati.
Suggerirei a Francesca di coordinare meglio gli interventi dei singoli.
2°) punto: obiettivi a breve-lungo termine
Mi è parso che, anche questa volta, Francesca abbia privilegiato il raggiungimento dell'obiettivo "regola – formula" rispetto ad altri obiettivi intermedi (sviluppo delle capacità di osservazione, capacità di cogliere fino in fondo ciò che si può leggere in una raccolta di dati, la messa a confronto di informazioni) che sono propedeutici alla scoperta della regola e alla messa in formula.
Nel nostro caso specifico, la lettura critica incrociata delle due colonne (v. testo) porta alla individuazione della relazione tra numero del piano e numero dei fiammiferi necessari per la costruzione dei grattacieli.
3°) punto : il linguaggio specifico matematico – il linguaggio algebrico
Considerato il "fermento" suscitato, nella classe, con l'introduzione del vocabolo "ennesimo", vorrei di nuovo sottolineare quanto sia importante che l'insegnante si soffermi sui possibili diversi significati che una stessa parola può assumere a seconda del contesto in cui è inserita. In particolare è bene riflettere sul significato che diamo ad "ennesimo" quando parliamo per es. di errori fatti, di cioccolatini mangiati, ecc., l'ennesimo errore è l'ultimo di una serie di errori; nel contesto matematico l'ennesimo elemento, l'elemento n, è un generico elemento, un qualunque elemento per il quale può essere applicata quella legge. Per il ragazzino deve essere chiaro che n può essere anche il numero 2, cioè il numero che rappresenta il secondo piano / grattacelo, non solo quindi un numero grande per il quale la formula fa comodo.
Fare un simile chiarimento, costoso sia in termini di tempo che di energia, significa però anche mostrare la potenza del linguaggio algebrico.
ULTIMA OSSERVAZIONE: COME HO GIÁ SCRITTO, SAREBBE BELLO CHE FOSSERO I RAGAZZI AD ACCORGERSI CHE ESISTONO SITUAZIONI PROBLEMATICHE NON UGUALI MA CON FORTI ANALOGIE, TALI DA POTER CREARE DELLE CATEGORIE DI SITUAZIONI.

26 marzo 2007 Verbale 3 (ex 5) *(uso del registratore)*

I: Parliamone. Biagio.
A (Biagio): No!
I: Dimmi, spiegami cosa hai fatto, al di là di rispondermi alle singole domande, raccontami quello che hai pensato, raccontami il tuo ragionamento.
A (Biagio): Allora… come il ragionamento?
I: Cioè quello che, leggendo e facendo, ti è passato per la mente.
A: Ma bisognava vedere lo schema?
A: Posso io, posso io?
I: No.
A (Biagio): Allora devo rispondere alla 1?
I: No, dimmi… non voglio che mi fai una sintesi rispondendomi domanda dopo domanda[163]. Parlami di quello che hai fatto.
A (Biagio): Ehhh!
I: Biagio, dai, non fare lo spiritoso.
Risate.
I: La piantiamo? Adesso, smetti di fare lo stupido e voi smettete di ridere. Quello che hai fatto. Hai scritto senza pensare?
A (Biagio): Ho letto le domande.
I: Ho capito. Poi alle domande hai risposto pensandoci o hai messo parole a caso?
A (Biagio): Devo dire la verità?
I: Dai, Biagio, forza.
A (Biagio): Allora, devo spiegare lo schema?
I: Spiegami lo schema. Parti da lì.
A (Biagio): Allora in n = 3, come dire, ecco, ci sono tre file di mele e ogni fila ha lo stesso numero di meli. Quindi ci sono tre file di meli e in ogni fila ci sono tre meli. Dopo, le conifere sono messe in numero uguale.
I: Non ho capito[164].
A (Biagio): Fallo spiegare da un altro.
I: No, no, me lo spieghi tu. Ognuno spiega la sua. Allora leggimi la risposta alla domanda se non sei capace di fare un discorso.[165]
A (Biagio): Ok. Allora, al numero 1. Posso dire che i meli ogni fila sono il numero di meli. Come ci sono 4 file, in ogni file ci sono 4 meli. Per le conifere è la stessa cosa.
I: Beh, non ha detto una stupida, Lorenzo. Se continui, esci. Prendi la nota, chiamiamo la preside che tanto oggi viene e ti facciamo fare un bel giretto anche da lei.
A (Lorenzo): Non vado a Trecasali a piedi.
I: No, no, viene qua. Non ha detto una stupidata. Perché non ha detto una stupidata?
A: Perché è vero.
I: Magari l'ha spiegato un po' male, però ha ragione. Chi è che lo spiega meglio quello che ha detto lui?[166]
A (Riccardo): Io!
I: Riccardo.
A (Riccardo): Allora, in ogni fila per scoprire il numero totale di mele…
I: Lascia stare il numero totale di mele. Cerca di spiegare meglio quello che voleva dire Biagio.
A (Riccardo): Allora…
I: Cosa dico sempre?
A: (Riccardo): Se nella successione…
I: Cosa dico sempre? Di rispondere…
G: Alla domanda.
I: Alla domanda che ti viene fatta.
A (Riccardo): Ok.

---

[163] *Forse per Biagio era più facile rispondere per punti.*
[164] *L'interpretazione a tavolino consenti di capire che Biagio non ha neanche descritto male: in effetti nel terzo disegno ci sono tre file di meli, in ogni fila ci sono tre meli e attorno le conifere sono messe 'in numero uguale', nel senso che su ogni lato ce ne sono 7. A parte le quattro conifere in più, contandole come fa Biagio, le cose possono anche funzionare. Certo che il suo atteggiamento non è dei migliori.*
[165] *Troppo dura con Biagio!*
[166] *Avrei detto: c'è qualcuno che ha capito l'idea di Biagio e prova a spiegarla un po' più chiaramente?*

I: Non ad un'altra. Allora , spiegami meglio quello che ha voluto dire lui.
A (Riccardo): In ogni fila si va in una successione di… in ogni ordine che si va avanti si aggiunge una mela, un albero di mele, e una fila di mele con la stesso numero di mele della prima fila. Della prima fila di quel recinto lì.
A: Eh?
I: Provi a rispiegarlo?
A (Riccardo): In ogni… per andare avanti nella successione…
I: Qual è la successione?
A (Riccardo): La successione è: primo recinto, secondo recinto, terzo recinto… per scoprire chi è più grande, ogni volta aggiungere in ogni fila un melo e in ogni recinto una fila di mele con lo stesso numero di mele che ha la prima fila di quel recinto.
A (Giuseppe): Posso provare?
I: Giuseppe.
A (Giuseppe): Allora, prendiamo per esempio il 3, infatti n = 3. Ci sono tre file e in ognuna di queste file ci sono tre mele. Ecco. Poi cosa devo dire?[167]
I: Non lo so.
A (Giuseppe): Quando poi aumenta il numero, per esempio n = 4, si aggiunge…
I: Allora non farmi un esempio solo, dopo avere osservato attentamente la situazione di tutti i disegni, cosa puoi dire in generale. Tu stai dicendo tutti i vari casi, parti dal primo, vai avanti e poi cerca di generalizzare. Nel primo caso cosa succede?
A (Giuseppe): C'è un melo.
I: E... ?
A (Giuseppe): E... ?
I: Fai lo stesso ragionamento di prima ma per tutti i disegni. Nel primo cosa c'è?
A (Giuseppe): Un melo. Nel secondo…
I: Nel secondo cosa?
A (Giuseppe): Nell'n = 2.
I: Cosa vuol dire n = 2?
A (Giuseppe): Filari.
I: Allora? Ci sono…
A (Giuseppe): Due filari. Ci sono due file e in ogni fila due meli.
I: Quindi in n = 1 cosa avevi?
A (Giuseppe): Una fila, un melo.[168]
I: Oh! Sei partito da n = 3 e ti ho detto, guardali tutti! Quindi nel primo disegno hai una fila…
A (Giuseppe): ... e un melo. Nel secondo due file e due meli.
I: In tutto?
A (Giuseppe): In tutto quattro meli.
I: E allora 2 cosa è?
A (Giuseppe): Sono le file.
I: Eh no, tu mi hai detto due file, due meli.
A (Giuseppe): Ah no, ci sono due file e in ogni fila ci sono due meli.
I: Ok.
A (Riccardo): E io cosa avevo detto???[169]
I: Lo avevi detto male. Stavo cercando qualcuno che lo dicesse meglio. Siamo partiti da Biagio che ha detto la stessa cosa ma l'ha detta molto male, a te che hai cercato di spiegarlo, a lui che l'ha detto meglio. Andiamo avanti.[170]
A (Giuseppe): Nel terzo, ci sono tre file, in ogni fila tre meli. Totale 9 meli. Nella quarta figura ci sono quattro file, in ogni fila quattro meli, totale 16 meli.
I: Quindi cosa puoi dire?
A (Giuseppe): Ogni…
I: Cosa fa il contadino? Rossella… avevi la mano alzata? Sì?

---

[167] *La domanda di Giuseppe può essere indicativa di un atteggiamento dell'alunno verso l'insegnante; Giuseppe cerca non tanto (o non solo) di esprimere il suo pensiero quanto quello che vorrebbe l'insegnante.*
[168] *In effetti è difficile accettare l'idea che un melo costituisca una fila, ma Giuseppe non c'entra!*
[169] *Talvolta si ha l'impressione che non ci sia un'atmosfera realmente collaborativa nella classe – o, meglio,* costruttiva *- nel senso che l'insegnante è visto come perno-giudice della discussione, e quindi 'esterno' alla vitalità dello scambio, perché 'lui sa già'. La preoccupazione per l'obiettivo influenza spesso, in modo eccessivo, l'attività didattica, e il suo raggiungimento sembra più importante delle modalità sociali attraverso il quale esso viene realizzato.*
[170] *Mi sembra una gara sul piano linguistico! La cosa può essere positiva ma ci sono dei rischi, per esempio scoraggiare gli interventi dei ragazzi che si esprimono con difficoltà, perdita di attenzione perché subentra la noia...*

A (Rossella): Io ho notato che nelle conifere…
I: Aspetta, parliamo dei meli, poi passiamo alle conifere[171]. I meli. Cosa posso dire allora? Flavia.
A (Flavia): Che man mano che facciamo gli altri disegni aumenta il numero dei meli, aumenta di una fila e in questa fila ci sono tanti alberi quanti ce ne sono nelle altre file.
I: Quindi se aggiungo una fila… prendiamo l'ultimo, abbiamo quattro file, ne aggiungo un'altra, aggiungo quattro meli?
A (Flavia): Sì.
I: Arianna.
A (Arianna): Si aggiunge una fila e in ogni fila un melo.
I: Alessia.
A (Alessia): Non cambia mai la disposizione, è sempre quadrangolare.
I: I recinti sono sempre quadrati. Perché non cambia la forma?[172]
A: Perché li mettiamo in fila.
A (Alessia): Perché dopo non possiamo contarli[173].
I: E chi l'ha detto? Mi metto lì e 1, 2, 3… li conto.
A (Alessia): Quello che volevo dire io è che non possiamo fare una formula.[174]
A (Sabrine): Ne aggiungo una in verticale e uno in orizzontale.
I: Cosa aggiungo?
A (Sabrine): Aggiungo una fila in verticale e una in orizzontale.
I: Contemporaneamente?[175]
A (Sabrine): Boh.
I: Giuseppe.
A (Giuseppe): Qui c'è scritto che hanno la forma di un quadrato.
I: Sì, infatti lo sappiamo che hanno la forma di un quadrato. Federica tu cosa volevi dire? Avevi la mano alzata.
A (Federica): No, niente.
I: Ok, quindi cosa possiamo concludere?
A (Veronica): Che ogni volta che aggiungiamo una fila dobbiamo anche aggiungere uno in più in ogni fila. Perché se facciamo quattro e ce n'è tre, dobbiamo fare quattro. Allora se aggiungiamo una fila dobbiamo aggiungere in alto.
I: Giusto. Arianna.
A (Arianna): Eh, volevo dire quello.
I: Siete tutti convinti? Michael, cosa abbiamo detto?
A (Michael): Eh…
I: Adesso scattano le punizioni.
A (Michael): Eh… Non me lo ricordo.
I: Perfetto. Per domani, scrivere, prendi il diario, quante volte glielo facciamo scrivere?
C: Venti.
I: Venti volte, per domani, in classe devo stare sempre attento e non giocare con le forbici. Poi a qualcuno facciamo fare la colla magari. Da fare firmare.
G: Anche Andrei aveva il compito!
I: Ah, è vero. Me lo fai vedere.
A (Andrei): No prof. Non ce l'ho, me lo sono dimenticato.

---

[171] *Non sono molto d'accordo con l'intervento di I. Ho l'impressione che piloti troppo la riflessione della classe nella direzione che lei ha in mente (il famoso obiettivo). Diciamo – ispirandoci alle teorie costruttiviste – che gli alunni dovrebbero sentirsi più liberi di sbagliare, di scegliere le direzioni del ragionamento, di appoggiarsi l'un l'altro, costruendo il più possibile autonomamente i contenuti e i significati delle loro conoscenze. Ho l'impressione che per I tale costruzione sia un fatto eminentemente* oggettivo *('oggettive' le cose da capire/scoprire, 'oggettive' le modalità dell'esplorazione), come se essa (costruzione delle conoscenze) possedesse un ordine indipendente dall'osservatore. Mi sembra che gli alunni – come d'altro canto l'insegnante stesso – dovrebbero essere,* assieme, costruttori e ordinatori *della realtà che stanno analizzando, impegnati ad individuare un ordine* tra i tanti possibili, *quello più funzionale all'interpretazione dell'oggetto al centro della loro esplorazione. Quasi sempre la ricerca di tale ordine richiede fantasia, creatività, logica, e può anche risultare dispersiva. Ma qualunque ricerca possiede queste caratteristiche, soprattutto se non si sa a priori (come invece in questo caso sa l'insegnante), dove (e come) si va a parare.*
[172] *Nella consegna del testo i recinti hanno forma quadrangolare.*
[173] *Io ho capito: se cambia la forma non possiamo contarli.*
[174] *Se interpreto correttamente Alessia, l'osservazione dell'alunna è molto bella: se non esiste più regolarità nella costruzione dei filari, allora non riusciremo a produrre una generalizzazione, il legame tra filari di meli e conifere non sarà più costante, dunque non potremo esprimerlo attraverso una formula.*
[175] *Non capisco bene il senso di 'contemporaneamente'. Siamo in piena costruzione del* ***balbettio algebrico****. Suggerisco la lettura di questo termine nel Glossario ArAl (primo fascicolo della collana).*

I: Bene, allora all'intervallo chiamo a casa.
A (Andrei): No, prof.. .[176]
I: Allora, Justice, cosa abbiamo detto? A che conclusione siamo giunti?
A (Justice): Che per ogni melo…
I: Stesso discorso, per domani venti volte, in classe devo stare sempre attento e non giocare con la colla.
A (Justice): Non stavo giocando con la colla! È un'ingiustizia!
I: Non è vero. Christian.
A (Christian): Nooo!!!
I: Sì sì, dimmi quello che abbiamo detto.
A (Christian): Allora, praticamente la conclusione è che tutte le file… no.
I: Ho detto qualche cosa?
A (Christian): Allora, la conclusione è che abbiamo trovato tutti i meli… abbiamo trovato che tutte le file dei meli e delle conifere. Giusto?
I: No.
A (Christian): No, ma io ero attento. Io ero attento prof!
I: Mi dici cosa abbiamo detto allora?[177]
A (Christian): Allora…
I: Francesco.
A (Francesco): Allora, che per trovare la successiva dobbiamo aggiungere una fila di meli dello stesso numero delle altre file, una in orizzontale e una in verticale.
I: E così ti sei un po' salvato. In realtà abbiamo detto una cosa detta un po' meglio, cioè che nel momento in cui aggiungo una fila, devo anche aggiungere un melo per ogni fila, perché il numero di file, o meglio, il numero di meli in ogni fila è uguale al numero di file. Questo è quello che abbiamo detto. Allora. E invece delle conifere cosa possiamo dire? Alessia.
A (Alessia): Che ce n'è una sopra le file di meli e poi ce n'è una in mezzo. Ce n'è una sulla fila e una in mezzo alle file.
I: Basta?[178]
A (Alessia): Io ho trovato solo questo.
I: Quindi se ho quattro meli, ho sei conifere.[179] Giuseppe.
A (Giuseppe): Allora. Io ho scritto…
I: No, tu no, hai già parlato.[180] Eleonora.
A (Eleonora): Ho trovato che segue la tabellina dell'otto.
I: Hai trovato?
A (Eleonora): Cioè, tipo la prima è 8 × 1 che fa otto, poi ho fatto × 2 che fa sedici, poi × 3 e via di seguito.
I: Arianna.[181]
A (Arianna): Che in ogni filare per ogni melo si aggiungono due conifere.
I: Ripeti.
A (Arianna): Allora, in ogni filare, per ogni melo, per ogni colonna, nel recinto delle conifere se ne aggiungono due.
A (Riccardo): Però qui sono otto e poi sono sedici.
I: Allora, spiegalo un po' meglio.
A (Arianna): Nel numero uno ci sono tre conifere in alto e nel due ce ne sono cinque, quindi ne ho aggiunte 2. E in ogni fila ne aggiungo due.[182]
I: Per ogni filare? Cioè se consideriamo la fila in alto di conifere tu dici che nel primo disegno ce ne sono tre, nel secondo cinque, che è 3 + 2, giusto?
A (Arianna): Sì.
I: Nel terzo ce n'è 3 + 2 + 2 e via di seguito. Però non ce le abbiamo solo in alto.

---

[176] *L'atmosfera non mi convince. Bisogna chiarire il **contratto didattico**, c'è un rapporto di eccessiva dipendenza dall'insegnante, dalle sue punizioni, dai suoi divieti, dai suoi premi. Non concordo che sia la classe a decidere pubblicamente, assieme all'insegnante, la punizione. Sono molto, molto perplesso.*
[177] *Forse Christian non ha capito.*
[178] *In che senso 'Basta'? Cosa comprende l'alunna da questa parola? Perché non chiedere 'Cosa significa che ce n'è una' in mezzo'? Una 'sulla' fila? Una 'in mezzo' alle file? Alessia ha espresso, con poca chiarezza, quello che è stata capace di percepire della situazione. Perché I è così dura con lei? Mi sembra che, almeno in questa occasione, ci sia poca solidarietà fra insegnante ed alunni.*
[179] *Secondo Alessia le conifere sono 7.*
[180] *Ma se I gli ha appena dato la parola!*
[181] *Perché I non pone in discussione l'osservazione di Eleonora? Eleonora individua correttamente l'evolversi di una situazione.*
[182] *Va chiarito che Arianna sta confrontando i recinti rispetto alle conifere.*

A (Arianna): No, in tutte.
I: In tutte. Quindi i lati quanti sono?
A (Arianna): Quattro.
I: Quindi tu fai, per esempio nel secondo disegno, $3 + 2 \times 4$.[183]
A (Arianna): Sì.
I: $3 + 2$?
A (Arianna): 5.
I: $\times 4$?
A (Arianna): 20.
I: Quante sono le conifere nel secondo disegno?
C: Sedici.
I: E allora?
G: Non viene.
I: Perché non viene facendo $3 + 2 \times 4$?
A (Arianna): Perché le conifere in ogni lato non ce ne sono tre, perché quelle degli angoli sono le stesse.
I: Spiega, spiega.
A (Arianna): Eh… non… quelle degli angoli per due lati sono la stessa.
I: E quindi se fai $3 + 2 \times 4$ le conti più di una volta. Le conti per tutti e quattro i lati e quindi non va tanto bene.[184]
A (Arianna): No.
I: Flavia.
A (Flavia): Allora, ogni fila di conifere equivale a due filari.[185]
I: Sì, due file, due filari. Cosa vuoi dire? Spiega. Bisogna trovare il modo di mettere in parole quello che ci passa per la testa. Francesco cosa stai spiegando tu?
A (Francesco): Eh, che se contiamo la prima fila di conifere sopra, lo moltiplichiamo per due, $5 \times 2 = 10$. Le altre sei che rimangono fa sedici.
I: E quindi?
A (Francesco): Abbiamo trovato il numero di conifere.
I: Nel due. E negli altri casi?
A (Francesco): Facciamo $7 \times 2 = 14$, $+ 5 \times 2 = 10$, e sono 24.
A (Justice): Non ho capito.
I: Tu fai… lui prende le file orizzontali,[186] quindi la fila in alto e la fila in basso di conifere, quindi nel caso due, per esempio, in alto ce ne sono cinque e in basso ce ne sono cinque, quindi lui fa 5×2 e poi aggiunge quelle laterali, cioè tre e tre, quindi fai $5 \times 2 + 3 \times 2$ fondamentalmente.
A: Ma scusi prof…
I: E invece nell'$n = 3$, dice faccio $7 \times 2 + 5 \times 2$. Giusto?[187]
A (Francesco): Sì.
I: E nel quattro?
A (Francesco): Stessa cosa, $9 \times 2 = 18$ e $7 \times 2 = 14$, $18 + 14 = 32$.[188]
I: Dove ci porta tutto ciò?
A (Riccardo): A fare casino e basta.
I: Dove ci porta, ci porta da qualche parte?
A (Andrei): Nooo!!!
G: No.
I: Perché non ci porta da nessuna parte?

---

[183] *Se l'espressione è stata scritta alla lavagna, evidentemente c'è un errore perché manca una parentesi, ma penso che quella indicata sia solo la trascrizione di una espressione orale. Sarebbe stato meglio che fossero gli alunni a formulare quella* ***rappresentazione*** *in* ***linguaggio*** *matematico. Probabilmente molti non ne hanno colto il significato.*
[184] *Avendo per obiettivo una costruzione* ***sociale*** *delle conoscenze, I dovrebbe stimolare di più l'intervento dei compagni, cercando di limitare gli scambi - a due - insegnante-alunno. Sarebbe anche interessante sapere che cosa venga trascritto alla lavagna come supporto visivo per l'evolversi del discorso.*
[185] *Non ho capito l'equivalenza di Flavia. Nemmeno io.*
[186] *Sarebbe meglio invitare l'autore a spiegarsi più chiaramente; sarebbe importante anche che egli non si rivolgesse ad I ma al compagno che non ha capito (atteggiamento questo non spontaneo, soprattutto quando l'insegnante è tanto al centro dell'attività).*
[187] *Entro qualche battuta bisognerebbe chiedere al 'Mi scusi prof' cosa desidera.*
[188] *A questo punto avrei costruito uno schema, insieme ai ragazzi, perché cominciano a comparire regolarità e per dare la possibilità a tutti di seguire meglio.*

A (Justice): Ci porta ad un macello.
I: Perché dici così?
A (Justice): Perché ti complichi la vita.
. .[189]
I: Allora facilitiamocela.
A (Andrei): Lo so io prof.
I: Uno non può dire che mi complica la vita se non ha un'alternativa perché se quello è l'unico modo, può complicarti la vita finché vuoi, ma se è l'unico modo, te lo bevi. O no? Veronica.
A (Veronica): Devi fare…
I: No, dimmi perché non va bene.[190]
A (Veronica): Quello non lo so.
A: Perché ti devi complicare la vita se puoi fare sempre per otto? Hai otto e ci aggiungi otto e fa sedici, ci aggiungi otto e fa ventiquattro.
I: Ho capito, ma parti da quello che ha detto lui. Cosa ci obbliga a fare quello che ha detto lui? Dimmi Arianna.
A (Arianna): Ci fa contare le file verticale dei filari.
I: Quello che ci fa fare è contare albero per albero. Di andare a contare quanti ce ne sono nella prima fila, quanti ce ne sono nell'ultima, quanti ce ne sono di fianco e quanti ce ne sono di fianco dall'altra parte. Il problema è che lui dice nella prima fila io faccio $3 \times 2 + 1 \times 2$. Giusto Francesco?
A (Francesco): Sì.
I: Poi faccio:[191]

Filare		
n=1	$3 \times 2 + 1 \times 2$	9
n=2	$5 \times 2 + 3 \times 2$	16
n=3	$7 \times 2 + 5 \times 2$	24
n=4	$9 \times 2 + 7 \times 2$	32

Ma, al di là del $\times$ 2 che sono le due file orizzontali e le due verticali e quindi faccio $\times$ 2, ma quel 3, 5, 7 e 9 e quel 1, 3, 5 e 7…
A: Sempre più due.
I: Mi serve a qualche cosa? Cioè, ragionate come abbiamo fatto le altre volte, riusciamo a generalizzare?[192]
A (Justice): Sì. Facciamo più due.
A (Veronica): Nel primo possiamo fare $3 + 1 \times 2$.
A: È vero.
I: Così?

---

[189] *In effetti, rispetto alla scoperta di Eleonora, l'idea, il modo di procedere di Francesco è certamente più contorto, anche se le sue osservazioni sono comunque importanti. In questa fase è l'insegnante che deve decidere se dare la priorità alla osservazione di Eleonora che induce direttamente alla messa in formula della relazione tra filari di mele e numeri di alberi di conifere (relazione già* ***condivisa*** *dalla classe) oppure dare spazio a tutte le possibili* ***relazioni*** *tra le grandezze in gioco: filari di mele, numero di alberi di mele, numero di conifere. Mi sembra che l'insegnante abbia privilegiato la seconda possibilità cercando di esaurire al massimo le risposte alla prima domanda della scheda. Due osservazioni: una sul* ***contratto didattico****, e mi riallaccio alle osservazioni del Commento 176. Mi sembra che emerga da parte degli alunni una forma di distacco da ciò che dovrebbe coinvolgerli sulla quale bisognerebbe riflettere a fondo: qual è, in questo momento, il rapporto fra docente e classe? È* ***trasparente****? È* ***condiviso****? Se non lo fosse – né l'uno né l'altro – questo potrebbe/dovrebbe influire sulla conduzione dell'attività? E qui aggiungo la seconda osservazione, in merito alle schede. Dal mio punto di vista c'è il rischio che esse impongano un percorso, uno scadenzario che interferisce con i tempi della classe e con la personalità dell'insegnante. Credo che dal diario traspaia anche questa più o meno sotterranea interferenza.*

[190] *Ribadisco: I è troppo perentoria nella conduzione della* ***discussione****. Veronica non interveniva da un sacco di tempo, forse aveva qualcosa, a suo modo di vedere, interessante da proporre.*

[191] *Mi piace pensare che le scritte alla lavagna siano state organizzate dagli alunni coordinati da I.*

[192] *L'insegnante deve essere più chiara: cosa intende per 'generalizzare'? Capire qual è il comportamento delle "conifere"? Capire cioè come faccio per andare sempre più avanti, conoscendo il numero dei filari? Oppure mi sta chiedendo se riesco a scrivere una "formula"? Più in generale: nelle esperienze precedenti (queste con le schede PDTR o altre) I ha già ragionato assieme alla classe – anche in più occasioni – per cercare di costruire il concetto di 'generalizzare'?*

Filare		
n=1	(3 + 1) × 2	8

A (Veronica): Sì.
I: È la proprietà distributiva al contrario.[193] E quindi?
A (Veronica): È più semplice!
I: Proviamo ad andare avanti.
A (Veronica):

Filare		
n=1	(3 + 1) × 2	8
n=2	(5 + 3) × 2	16
n=3	(7 + 5) × 2	24
n=4	(9 + 7) × 2	32

I: Allora, generalizziamo, proviamo a vedere cosa è 3 + 1, cosa è 5 + 3...
A (Veronica): Eh… 4 × 2, 8 × 2, 12 × 2, 16 × 2.

Filare			
n=1	(3 + 1) × 2	4 × 2	8
n=2	(5 + 3) × 2	8 × 2	16
n=3	(7 + 5) × 2	12 × 2	24
n=4	(9 + 7) × 2	16 × 2	32

A: Non viene la terza.
A (Andrei): È la stessa cosa.
I: E 4, 8, 12, 16 cosa sono?[194]
A (Andrei): La somma di quelli là.
A (Giuseppe): Allora, io ne ho inventata un'altra.
I: No, io voglio una risposta a questo. Sempre per il discorso rispondiamo alla domanda che è stata fatta.
A (Federica): Prof, però quando faccio quando faccio la somma non viene.
A: Diventa quattro.
A (Giuseppe): Dobbiamo vedere cosa servono i 4 × 2?
I: No, dobbiamo vedere se riusciamo ad ottenere una formula che mi dia il numero di conifere. Quel × 2 è costante e quindi ce lo teniamo. Dobbiamo cercare di dare un nome, fra virgolette, [195] a quel 1, 8, 12, 16. Che cosa rappresentano? Rappresentano qualche cosa?
A (Riccardo): Se continui ad andare avanti, quando poi devi fare quaranta, dopo lì vai sempre avanti di… no, non ho capito.
I: Flavia.
A (Flavia): Rappresentano i due lati.
I: Rappresentano i due lati. Beh, nel primo in due lati ne ho cinque, non ne ho quattro. Se usi le conifere di un lato verticale e di uno orizzontale ne hai cinque, non ne hai quattro. Riusciamo a saltarci fuori?

---

[193] *Questo non doveva essere I a dirlo. La proprietà distributiva è delicatissima, e va costruita con grande pazienza approfittando di tutte le occasioni (e delle micro-occasioni) favorevoli. Anche le parole 'al contrario' risultano probabilmente* ***opache*** *sul piano* ***semantico****: gli alunni hanno una confidenza sufficiente con la proprietà da cogliere la sfumatura? Mi sorge il dubbio in questo senso anche perché nessuno interviene, in seguito, mostrando di aver riconosciuto la distributiva. Occasioni come questa sono assolutamente* <u>*preziose*</u> *per indagare sulla proprietà.*

[194] *Se I vuole sapere cosa rappresentano quei numeri la domanda mi sembra difficile, in ogni caso mi pare non opportuna in questo momento in cui si sta lavorando alla elaborazione, alla trasformazione di una scrittura che si tende a rendere più semplice e di cui si può vedere l'equivalenza con la relazione di Eleonora. Tabelle come questa costituiscono un supporto molto potente all'esplorazione di concetti come* ***forma canonica/non canonica, processo /prodotto, rappresentare/risolvere, trasparente/opaco*** *(v. Glossario).*

[195] *Il passaggio è delicato. Un maggiore coinvolgimento degli alunni sarebbe stato opportuno. Il '2 costante che va tenuto' e il 'nome fra virgolette' sono questioni di natura diversa, ma entrambe molto importanti. La prima questione (la costante) è di natura matematica; la seconda (il nome), di natura linguistica, assume una valenza didattica e culturale fondamentale nella costruzione del pensiero pre-algebrico e quindi nell'insegnamento della matematica come di un nuovo linguaggio. Il* ***nome*** *del numero conduce a concetti come* ***forma canonica/non canonica****.*

A: È impossibile.
I: Riusciamo a vederci qualche cosa?
A (Andrei): Io lo so.
I: Non è sbagliata in realtà, perché alla fine viene.[196]
A (Andrei): Allora, possiamo fare in altro modo. Ah, no, non va. Molto difficile. Perché non possiamo fare 8 × 1, 8 × 2?
I: Dimmi Alessia.
A (Alessia): Io lo faccio uguale, però lo risolvo. Io ho messo il numero di alberi di mele…
I: Noi però stiamo facendo le conifere.
A (Alessia): Ah, le conifere. Io però ho messo il numero di meli della prima fila…
I: Conifere. Stiamo parlando di conifere.
A (Giuseppe): Possiamo fare il numero di conifere e moltiplicarlo per…
I: Quindi non riusciamo a trovare niente in 3 + 1, 5 + 3 etc.
A: Ma non sappiamo cosa sono![197]
A (Veronica): No.
A (Christian): Io volevo dire che per trovare il 40 faccio 20 × 2.
I: Eh sì, e il 20 cosa è?
A (Christian): Boh.
A (Veronica): Il quattro, secondo me, il quattro perché sono quattro lati, poi nel numero due…
I: Sono quattro lati lo stesso.
A (Veronica): Eh lo so. Sono quattro lati però ce ne sono di più e quindi sono otto.
I: Beh, però non hai detto una stupidata, perché il quattro… lei dice quattro è il numero dei lati nel primo filare. Nel secondo il numero dei lati è sempre quattro ma scrivo otto e allora? Come lo ottengo otto sapendo che i lati sono quattro?
A (Veronica): Devi aggiungere degli altri numeri.
I: Devo fare 4 ×…
C: Due.
I: Dodici come lo ottengo? Facendo il numero dei lati, 4 ×…
C: Tre.

Filare				
n=1	(3 + 1) × 2	4 × 2	4 × 1 × 2	8
n=2	(5 + 3) × 2	8 × 2	4 × 2 × 2	16
n=3	(7 + 5) × 2	12 × 2	4 × 3 × 2	24
n=4	(9 + 7) × 2	16 × 2	4 × 4 × 2	32

A (Veronica): Ho capito prof! Sono le file di meli![198]
I: Quindi in realtà qui una formula generale possiamo trovarla.
A (Giuseppe): Numero lati ×…
A (Veronica): Il numero di file.
I: Il quattro come lo otteniamo? Facendo 4 ×…
G: Uno.
I: Quindi dobbiamo trovare… è questo che varia.

Filare				
n=1	(3 + 1) × 2	4 × 2	4 × 1 × 2	8
n=2	(5 + 3) × 2	8 × 2	4 × 2 × 2	16
n=3	(7 + 5) × 2	12 × 2	4 × 3 × 2	24
n=4	(9 + 7) × 2	16 × 2	4 × 4 × 2	32

I: Giusto? Cos'è?
A (Veronica): È il numero di file.
I: Quindi numero lati…
G: × numero file × 2.

[196] *Anche I ha qualche perplessità!*
[197] *L'insegnante ha contagiato gli alunni , anche loro vogliono dare un significato a quei numeri !*
[198] *L'osservazione di Veronica evidenzia un collegamento tra conifere e filari, questo, insieme alla permanenza degli altri due valori, permette la messa in formula della relazione. Forse anche Veronica spontaneamente poteva arrivare alla stessa conclusione di I.*

Numero conifere = numero lati × numero file × 2

A (Veronica): Cosa è due?
I: È un numero. È sempre lo stesso, è costante.[199]
A (Andrei): Perciò va bene.
A (Riccardo): È vero?
I: È vero che il numero di conifere lo trovo facendo numero lati × numero file × 2?
C: Sì.
I: Vi diceva di fare il filare cinque. Quante conifere c'erano nel numero cinque?
G: Quaranta.
I: Proviamo. Numero lati?
C: Quattro.
I: Numero file?
C: Cinque.
I: × 2. Quaranta.

Numero conifere = 4 × 5 × 2 = 20 × 2 = 40

A (Sabrine): Allora è vero.
I: Qualcuno ha provato a fare n=6?
A (Andrei): Sì, io, io.
I: Quante ce ne sono?
A (Andrei): Trentasei.
A (Laura): Per quante?
A (Andrei): No, no, ho sbagliato, quarantotto.
I: Numero di lati?
C: Quattro.
I: Numero file?
C: Sei.
I: × 2. Quarantotto.

Numero conifere = 4 × 6 × 2 = 24 × 2 = 48

I: Allora questa può essere una formula…[200]
C: Generale.
I: E ci siamo arrivati ragionando su quello che aveva detto lui, rimescolandolo un po' in realtà. Perché così com'era facevamo un po' fatica a trovare… Allora, altri modi di trovare il numero di conifere?
A (Andrei): Io, io, io.
I: Andrei.
A (Andrei): Allora, otto che è il numero del primo per 1 nel primo, poi 8 × 2 nel secondo, 8 × 3 e così via.[201]

Filare		
n=1	8 × 1	8
n=2	8 × 2	16
n=3	8 × 3	24
n=4	8 × 4	32

I: E quindi come la generalizzi? Otto cosa è?[202]
A (Andrei): Otto è il numero di…
A (Arianna): ... del primo filare.

---

[199] *A volte è difficile rispondere; se non sbaglio è il raddoppio delle piante per lato.*
[200] *Forse è una "regola", nel senso che abbiamo espresso in un linguaggio misto le istruzioni per calcolare il numero di conifere a partire dal numero dei filari; a questo punto si poteva passare alla traduzione della regola nel linguaggio algebrico dato che già nella scheda il filare viene indicato con n e visto anche il lavoro precedente sulle successioni.*
[201] *Forse Andrei ricorda l'idea di Eleonora.*
[202] *La domanda è difficile, anche perché i ragazzi, sulla base delle richieste (dell'insegnante) e dei comportamenti (degli alunni) precedenti, tendono ad associare il numero ad una quantità di filari, alberi, o altro, mentre in questo caso 8 rappresenta il rapporto costante tra n° di conifere e n° di filari di meli.*

I: Numero conifere del primo filare per... ?
A (Giuseppe): ... numero di file.
I: È giusto?
G: Sì.
A (Sabrine): Prof, non ho capito.
I: Qualcun altro?[203]
A (Veronica): Io ne so un altro!
I: Veronica.
A (Veronica): L'altro è che possiamo fare, per esempio nel primo, il numero… cioè in tutti, prendiamo la misura… ad esempio nel numero tre, sono sei in tutti gli alberi di meli…
I: Siamo alle conifere.
A (Veronica): Sì, sì, lo so. E quindi ho pensato di fare 5 + 4 × 4 perché praticamente ognuno… eh… non so cosa ho fatto….
I: 5 + 4 × 4?
A (Veronica): Sì perché ho preso 1, 2, 3, 4 e 5 anche qui 5, 5 e 5 e poi aggiungo quattro di lato.
I: Allora 5 × 4 + 4?
A (Veronica): Sì.[204]
A (Veronica): Sì.
I: Siccome gli angoli sono quattro… questo per quattro sono in numero di angoli… cinque è il numero di conifere e quattro sono i lati. Allora guardiamo un attimo nel numero quattro come verrebbe.
A (Veronica): Verrebbe 1 + 4 × 4. Sì, viene.

Filare		
n=1	1 × 4 + 4	8
n=2	3 × 4 + 4	16
n=3	5 × 4 + 4	24
n=4	7 × 4 + 4	32
n=5	9 × 4 + 4	40

A (Veronica): C'è sempre da aggiungere due.
I: Quindi, al di là del +4 che è sempre costante perché le conifere nei quattro angoli sono sempre quattro, ed il × 4 che è…
A (Veronica): Il numero dei lati.
I: Dobbiamo trovare il modo di rappresentare questo 1, 3, 5, 7, 9.[205]

Filare		
n=1	1 × 4 + 4	8
n=2	3 × 4 + 4	16
n=3	5 × 4 + 4	24
n=4	7 × 4 + 4	32
n=5	9 × 4 + 4	40

I: Alessia.
A (Alessia): Lo so che stiamo parlando delle conifere, ma io ho messo il numero di filari di meli per otto, che è il numero delle conifere.
I: Beh, il numero dei meli non c'entra niente.[206]
A (Alessia): Perché? A me viene così.
I: Se tu mi dici il numero di filari per otto, le mele dove stanno? Tu hai il numero di filari e hai otto.
A (Alessia): Enne.
I: Ok, ma io per numero di meli intendo il numero di alberi di meli dentro il recinto, mentre enne è il numero di filari. È diverso. Infatti nel numero due, hai quattro meli ma due filari. È diverso dire numero di filari e numero di meli.
A (Alessia): Perché?

[203] *E la povera Sabrine?*
[204] *Lei ha praticamente quante conifere ci sono in ciascun lato tranne gli angoli, giusto?*
[205] *Meglio: di rappresentare questo "cambiamento".*
[206] *Alessia parla correttamente dei filari e fa riferimento alla relazione di Eleonora, vero però che non segue l'insegnante nella sua indagine (perversa!) su una possibile nuova regola.*

I: Perché sono due numeri diversi, perché in ogni filare non hai solo un melo, quindi non è che se hai dieci filari hai dieci meli. Quindi se dico numero di filari dico una cosa, se dico numero di meli ne dico un'altra. È chiaro questo a tutti?
G: Sì.
A: Ahhh!
A (Alessia): Allora filari × 8.
I: Aspetta, adesso ci arriviamo. Nessuna idea per questi 1, 3, 5, 7, 9?
A (Giuseppe): Ehhh, sono… non lo so. 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7.
A (Justice): Uno serve per…
I: Ho capito, ma generalizziamo.
A (Flavia): È un lato senza gli angoli.
I: Io devo trovare una formula…[207] Francesco.
A (Francesco): Allora quei numeri sono le conifere che rimangono ai lati.
I: 1, 3, 5, 7, 9?
A (Francesco): Sì.
I: Il problema è che sempre andare a contare. Ho un campo e devo sempre andare a contare quante conifere ci sono in un lato? Devo trovare un modo per non dover andare tutte le volte nel campo a contare. Arianna.
A (Arianna): Sono i lati dove non ci sono gli angoli.
I: Nel numero uno? Hai un lato dove non ci sono angoli? Cosa vuol dire senza angoli?
A (Arianna): Cioè quello…
A (Veronica): Devo fare 1 + 2 che fa tre. Poi da tre devo aggiungere due che fa cinque e poi…
I: Quindi devo aggiungere due a cosa?
A (Veronica): Al numero che…
A: Al numero prima.
I: Al numero prima?
A (Veronica): Sì perché a uno aggiungo due che fa tre e poi aggiungo due…
I: Ho capito, ma come lo metto? Come lo scrivo? Come qui ho messo… vedete, qui non ho numeri, devo trovare un modo. Posso scrivere numero lati, numero angoli e qui cosa ci metto?[208]

Filare		
n=1	1 × numero lati + numero angoli	8
n=2	3 × numero lati + numero angoli	16
n=3	5 × numero lati + numero angoli	24
n=4	7 × numero lati + numero angoli	32
n=5	9 × numero lati + numero angoli	40

A (Arianna): Le conifere di un lato meno due.
I: Ma devi sempre andare a contare le conifere di un lato. È questo il problema, io non voglio doverle andare a contare. Io lì non devo andare a contare nulla, so quanti sono i filari, quanti sono i lati e moltiplico.

Numero conifere = numero lati × numero file × 2

A (Federica): Prof, secondo me sono il numero di conifere nei lati… però si aggiunge sempre due.
A (Veronica): Ho capito prof! Per esempio nel due, c'è il numero di meli meno 1 allora viene tre. E anche in quello dopo, 6 (9) – 1 fa 5.
I: Il numero di meli?
A (Veronica): Meno uno. È meno uno perché anche nel tre, 6 – 1 = 5 e nel quattro sono…
I: Ma il numero di meli? Nel numero uno i meli sono uno e 1 – 1 fa zero. Nel numero due i meli sono quattro, 4 – 2 = 2 e tu dovresti avere un tre.
A (Veronica): Ho detto meno uno. E viene tre.
I: E meno uno chi è?
A (Veronica): Ehhh, meno uno.
I: Nel primo però hai 1 – 1.
A (Veronica): Ehhh.
I: E poi nel numero tre hai 9 – 1 = 8 e invece dovresti avere nove.

[207] *Cerco, vediamo se riusciamo a tradurre le nostre idee in una formula.*
[208] *Non condivido questa fase del lavoro, mi chiedo anche: quanti sono i ragazzi realmente coinvolti? Non si rischia di avere un dialogo a due?*

A (Veronica): È vero.
I: Quindi, no, non va bene.
A (Flavia): Per ottenere sei, faccio cinque del posto prima…
Campanella.
. .[209]

[209] *Per quanto riguarda la conduzione del lavoro, mi pare ci sia ritorno alla prima esperienza, probabilmente la complessità del contesto "meli conifere" ha creato difficoltà sia all'insegnante che agli studenti.*
Osservo che Francesca ha dedicato molto del tempo a disposizione per rispondere al quesito 1, dove si chiede di mettere in relazione i meli e le conifere, per condurre poi la classe a studiare una sua eventuale messa in formula, sono stati invece tralasciati altri quesiti.
L'obiettivo dell'insegnante di sollecitare la classe a cogliere più relazioni sulla particolare configurazione di meli e conifere mi sembra di per sé ottimo ma, come già emerso in esperienze precedenti, finisce poi per essere controproducente ai fini della costruzione di una formula e quindi di una generalizzazione di una relazione.
In questo caso specifico, in tempi relativamente brevi, una alunna, Eleonora, intuisce la relazione di cui al punto 4, tale relazione può essere facilmente tradotta nel linguaggio specifico matematico ed ha il pregio di essere ben accetta dalla classe. Confesso che non ho capito perché l'insegnante non ha colto questa opportunità, lasciando aperta la possibilità di mettere in evidenza eventuali altre relazioni (equivalenti a quella di Eleonora) successivamente.
In pratica io ho visto una dispersione di tempo e di energie, anche degli studenti, causa una sistematica del lavoro che non condivido. Un piccolo appunto sul rapporto con alcuni ragazzi: a volte ho l'impressione che Francesca sia un po' troppo dura nel suo modo di mancano le parole finali.
In termini generali, vorrei sottolineare come la costruzione del sapere matematico *coincida necessariamente con la costruzione di* significati, *e come gli aspetti* sociali, psicologici *e* linguistici *siano fondamentali in questo senso. Forse l'attività è stata proposta ad una classe ancora 'cruda' per quanto concerne l'approccio al pensiero pre-*algebrico *e con una eccessiva preoccupazione da parte dell'insegnante di rispondere in modo esauriente ai quesiti della scheda (nei confronti di questo strumento sottolineo nuovamente la mia perplessità). La chiarezza del* ***contratto didattico*** *è altrettanto importante, ma deve essere costruita sulla* ***condivisione****, e in tale prospettiva il dialogo fra pari è per certi aspetti più importante e più delicato da stimolare del tradizionale rapporto dominante alunni-docente. Suggerisco di approfondire i riferimenti ai quadri teorici socio-costruttivista e dell'early algebra nella prospettiva indicata dal Progetto ArAl, tenendo presente comunque che entrambi i costrutti mantengono la loro validità anche in ambienti esterni a quelli dell'aritmetica e dell'algebra.*

27 marzo 2007 Verbale 5bis *(uso del registratore)*

I: Chi è che spiega alla Laura e alla Crinela che non c'erano, un po' il discorso che… cosa bisognava fare e dove siamo arrivati ieri? Giuseppe.
A (Giuseppe): Praticamente un agricoltore compra dei meli e mette delle conifere intorno. I pallini neri sono i meli, le x sono le conifere. Poi qui sotto abbiamo uno schema che rappresenta la disposizione degli alberi di mele e delle conifere per un numero qualsiasi n di filari di alberi.
I: Per filari si intende file.
A (Giuseppe): Allora, nel primo c'è soltanto un melo. In ogni fila c'è un melo. Nel secondo, ci sono due file, in ogni fila due meli. Nel terzo, tre file, tre meli. Nel quarto, quattro file e quattro meli in ogni fila. E così via.
I: Quindi la scheda diceva "dopo aver osservato attentamente la sistemazione degli alberi cosa puoi dire della disposizione dei meli e delle conifere nei diversi casi" e questo è quello che possiamo dire dei meli. Sulle conifere?
A (Giuseppe): Ecco…
A: Io non ho capito cosa sono le conifere.
I: Le conifere sono un altro tipo di albero, più grande, che proteggono i meli. Cosa abbiamo detto sulle conifere?
A (Veronica): Io!
I: Dimmi.
A (Veronica): Che praticamente le conifere sono messe nei quattro lati in tutte le quattro immagini. Naturalmente più sono i meli e più sono le conifere. E un'altra cosa che abbiamo visto, la fine di un lato, l'ultimo albero è come dentro un altro lato e poi c'è quel lato lì è dentro un altro.
I: Cioè la conifera d'angolo è in comune fra due lati.
A (Veronica): La fine fa da inizio all'altro lato.
I: Andrei, qualcos'altro?
A (Andrei): Eh sì, che ogni volta aumenta di otto conifere.
A: No, di una!
A (Andrei): Di otto! In totale.
I: Qualcos'altro?
A (Giuseppe): Poi la soluzione.
I: Queste erano le considerazioni fatte sulle conifere. A voi viene in mente qualche cosa d'altro? Dall'osservazione dei quattro disegni?
A (Veronica): Che le conifere sono sempre pari. Boh, io avevo scritto così.
A (Laura): Beh, ma uno non è pari.
A (Veronica): Va beh, a parte quello.
I: Non puoi dire sempre se c'è l'eccezione.
A (Arianna): C'è sempre un melo, cioè fra le conifere, c'è un melo sì e un melo no.
I: Spiegati meglio.
A (Arianna): A pari della conifera c'è un melo, poi no, poi c'è e così.
I: Cioè le conifere occupano tutti gli spazi e i meli uno sì e uno no. Qualcos'altro? Ok. Prova a riprodurre, avvalendoti di un disegno, la disposizione degli alberi di melo e di conifere quando n=5. Motiva la risposta. Cosa bastava fare?
A (Giuseppe): 5×5.
A (Rossella): Bastava aggiungere le conifere e i meli diventavano…
I: No, per fare il disegno cosa fai?
A (Rossella): Faccio un quadrato.
I: È sempre un quadrato, ma rispetto a n=4, cosa fai?
A (Rossella): Prendo più conifere.
I: Sono le conifere che determinano i meli o sono i meli che determinano le conifere? Cosa vuole il contadino, le mele o le conifere?
G: Le mele.
I: Le mele. Chi è enne in n=4?
A (Rossella): Le mele.
I: Chi è n=1, n=2, n=3, n=4? Non sono i meli, attenzione! Vai a vedere nel problema. Chi è enne?
A (Rossella):Ah! I filari di meli.
I: Il numero di file di meli, non il numero di alberi di mele. È diverso. Quindi, per fare un disegno in cui deve essere n=5, cosa ti bastava fare?
A (Rossella): Aggiungevo il numero di filari di n=5.
I: Cioè quanti?
A (Rossella): Undici.
I: Perché undici?

A (Rossella): No, no, ne aggiungevo cinque.
I: Sì, ma cosa bastava fare? Arianna.
A (Arianna): Aggiungevo una fila da cinque e in ogni fila un melo.
I: Esatto. Bastava aggiungere una fila e un melo in ogni fila. Aggiungevo una fila da cinque e dovevi aggiungere anche un melo in ogni fila, perché altrimenti non avevi lo stesso numero di alberi in ogni fila.
A (Veronica): Eh ma se aggiungo un melo ad ogni fila, poi ne ho una da sei!
I: No, aggiungi una fila da cinque e a quelle che c'erano già, aggiungi un melo.
A (Veronica): Ah, ok, pensavo…
I: Spiega come è possibile scoprire il numero totale degli alberi di mele conoscendo il numero dei filari. Allora, avevamo fatto la nostra solita tabella e avevamo messo nella prima colonna, vi ricordate?
A: 1, 2, 3, 4…
I: Sì, ma il nome della colonna?
G: Enne.
G: Numero di filari.
I: Numero filari enne. Quindi ho 1, 2…
C: ... 3, 4, 5.
I: Poi?
A: Numero meli.
I: Nel primo?
C: Uno.

Numero filari n	n° meli
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

A (Veronica): Prof, ma è vero che lì è sempre × 3? Ah, no, no, è 1 × 1, 2 × 2…

Numero filari n	n° meli	Veronica
1	1	1 × 1
2	4	2 × 2
3	9	3 × 3
4	16	4 × 4
5	25	5 × 5

I: Quindi come formula cosa possiamo scrivere?
A (Veronica): Eh, sempre il numero dei filari per se stesso.
A (Laura): È come scrivere 2^2!
A (Veronica): È vero!
A (Giuseppe): Possiamo usare le potenze?
I: Questo è come lo troviamo, generalizziamo.
A: 1^2!
I: Chi è uno?
A (Arianna): Il numero dei filari!
A: Enne!
I: E quindi possiamo scrivere qua?
A: n × 2.
A: n × n.
I: E quindi?
G: n × n!
I: Flavia, ti vedo sconcertata.
A (Flavia): No, no.
I: Quindi la formula generale che vale in qualsiasi caso, qual è?
G: n × n.
I: Il numero dei meli lo trovo facendo...
G: n × n.
I: Che, come diceva qualcuno, visto che le abbiamo fatte...

A (Veronica): 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2.
G: n^2.

Numero filari n	n° meli	n × n	n^2
1	1	1 × 1	1^2
2	4	2 × 2	2^2
3	9	3 × 3	3^2
4	16	4 × 4	4^2
5	25	5 × 5	5^2

I: Vale sempre?
A: No.
I: Se io voglio fare 20 filari, quanti meli ci vogliono?
G: 20^2!
I: Ok, altre formule? Questa sicuramente è la più semplice. Troviamo un'altra formula per i meli. Guardiamo se ci sono altri modi per ottenere quei numeri.
A (Andrei): Non ci sono.
I: Anche le altre volte avete detto "non ci sono" e poi invece c'erano. Come possiamo trovarli? Le uniche due informazioni che abbiamo sono il numero di filari ed il numero di meli.
A (Andrei): Io lo so.
I: Dimmi.
A (Andrei): 1 + 1 – 1.
I: Sì, e 4 + 4 – 4.
Risate varie.
I: Come arriviamo di solito a fare le formule? Adesso come abbiamo fatto per esempio? Siamo partiti da 4 e lo abbiamo…
A: Scomposto[210].
I: Proviamo a scomporli in modo differente e vediamo se riusciamo a trovare qualcosa. Riccardo, quello che butta le bombe e poi gli altri ci devono lavorare. L'altra volta c'eravamo riusciti.
A (Riccardo): Allora, per esempio, per n=4 ci sono 16 mele. Nel recinto le conifere sono il doppio.
I: No, aspetta, rimaniamo sulle mele, poi facciamo conifere e mele insieme.
A (Laura): Ma perché li chiama recinto?
I: Beh, perché le conifere sono messe a recinto. Nessuna idea?
A: Ci faccia pensare.
A (Laura): Per trovare tre, bisogna fare anche 2… quante mele ci sono nella seconda, cioè quattro, più altre quattro, che fa…
I: 4 + 4…
A (Laura): No, 4 + 5.
A: Cosa è il 5?
I: Ma il 4 e il 5 dove li prendo?
A (Laura): Allora il 4 lo prendo da quelli di prima e il 5 lo prendi dal restante che viene… togli 9 – 4…
I: Grazie tante, ma sul 5 mi devi dire qualcosa…
A: No, no, non è così.
I: Se voi guardate, se io prendo questo 4 e qui prendo il 9 e aggiungo 5, cosa ottengo?
A (Giuseppe): 16.
I: No, non ottengo 16.
A (Laura): No, ma non sempre + 5.
A: + 7 e poi + 9!
A: Sì, va beh…
I: Ma quel 5, 7 e 9 dove li tiro fuori? Il problema è quello.
A (Laura): fai 16 – 9 oppure 9 – 6…
I: Ma tu non lo puoi sapere. Se per esempio ti chiedo quanti meli devo comperare per fare un recinto di 18 file, tu non sai quanti meli ci sono in 17 file né in 19. Il problema è quello di trovare un numero totale senza sapere quello che c'è prima e quello che c'è dopo. Quindi non posso utilizzare qualche cosa che mi deriva da un altro filare, perché non è detto che io li costruisca tutti, non è detto che io faccia prima quello da uno, poi quello da due, quello da tre etc. Nessuna altra idea?
A (Andrei): La prima si fa… Perciò viene… No.

---

[210] *Anche questa è una situazione molto adatta per approfondimenti su **forma canonica / non canonica**.*

I: Quindi rimaniamo con l'unica formula n^2. Per le conifere, cosa abbiamo detto ieri? Qualcuno si ricorda? Allora, intanto guardiamo il numero di conifere.
A (Veronica): Lo so io. 8, 16, 24, 32, 40.

Numero filari n	n° conifere	
1	8	8×1
2	16	8×2
3	24	8×3
4	32	8×4
5	40	8×5

A (Giuseppe): Posso dire la regola? Si prendeva il primo che era 8 e… ecco, si moltiplicava per 2. No, no, $8 \times$ cioè n=1. $8 \times n$.
I: $8 \times n$?
A (Giuseppe): Sì, $8 \times n$. Tipo se facciamo 8×24…
I: Quindi 8×1. Che fa?
A (Giuseppe): 8×2 che fa 16, 8×3, 24.
A: Quella che ho detto io ieri.
A (Laura): Perché?
A (Veronica): Perché praticamente Laura, incomincia da qua, ce ne sono 8 e allora aggiungi sempre 8.
A (Andrei): Col 5, col 4, col 3, col 2 e con l'1.
A (Giuseppe): Sì, va beh.
I: Con il numero dei filari e quindi una formula era numero di conifere = $8 \times n$.

N° conifere = $n \times 8$

I: Giusto?
A (Giuseppe): Va bene.
I: Ne avevamo trovato delle altre però.
A (Veronica): Non me le ricordo.
A (Riccardo): Allora, per n=4, si contano il numero delle conifere che è 32, lo si divide per 2 e viene fuori 16, poi lo sommi con il numero di mele.
A (Andrei): Cosa?
A (Veronica): Non ho capito.
I: Sempre per il discorso di prima, tu non sai quante ne hai. Tu devi trovare… Io voglio fare un filare, vado al vivaio e devo dirgli che mi servono questo numero di meli e questo numero di conifere. Devo sapere… so quante file voglio fare, devo trovare un modo di calcolare quante piante mi servono, non posso piantarle e poi tornare al vivaio a prendere quelle che mancano. Non so quante ce ne vogliono, lo devo calcolare. Tu parti da un numero che in realtà non conosci.
A (Veronica): Non so se va bene. All'inizio, 1×8 viene 8 sempre, poi nella seconda $2 \times 2 + 8$ avevo pensato che fa 12.
A: Allora bisogna fare 4×2.
A (Veronica): $2 \times 4 + 8$, poi bisogna fare 3×4… che fa… 12, +16.
I: Che fa 28.
A (Veronica): Allora poteva rimanere 2×4 è 16. E poi $2 \times 4 + 24$.

n	n° conifere	
1	8	2×4
2	16	$2 \times 4 + 8$
3	24	$2 \times 4 + 16$
4	32	$2 \times 4 + 24$
5	40	$2 \times 4 + 32$

I: Sì ma il problema rimane. 8, 16, 24 dove li tiro fuori?
A (Veronica): Eh! Perché otto è nella fila prima.
I: Quindi il problema di prima rimane. Se io voglio sapere quanti meli e conifere ci vogliono per fare 30 filari, devo sapere quanti ce ne vogliono per farne 29, e per sapere quanto ce ne vogliono in 29, devo sapere quanti ce ne vogliono in 28 e così via. Io invece devo avere un canale diretto. In n^2 non ti serve nulla se non il numero di filari, in $n \times 8$ non ti serve nulla perché 8 rimane fisso. Devi solo sapere quanti filari vuoi fare. Non posso trovare una formula generale in cui mi serve un qualcosa che devo a sua volta calcolare. Siete d'accordo?

C: Sì[211].
A (Federica): Prof, oppure possiamo fare… per esempio prendo il numero 3 e possiamo fare 3 + 3 × 8.
I: 6 × 8 fa 48. Niente?
A (Andrei): Io. Si può fare così. Il numero 8 sempre per…
A: È uguale a quella.
A (Andrei): No, non quella.
A (Arianna): Prof, quella della Federica e poi diviso 2. 48 : 2 fa 24.
I: Qual era?
A (Federica): Allora, 3 + 3 × 8.
I: 3 × 2.
A (Federica): Sì, 3 × 2 × 8 : 2.
I: Proviamo le altre. 3 chi è?
A (Federica): Il numero di filari.
I: Quindi qui ne avrai 2.
A (Federica): 2 × 2 +…
I: +?
A (Federica): Allora lì…
A (Veronica): 4.
I: E chi è 4? E chi è 8?
A: Boh… numeri a caso.
A: Ma fai 4 × 4, 16 e 8 × 3, 24… boh…
A (Federica): Però potremmo provare 2 × 2 + 4.
I: Ma non puoi farle diverse, non puoi fare cinque formule diverse.
A: Scrivo 3 × 4.
A: No 3 × 2.
A: Guarda che 3 × 2…
A: Ma 2 × 2.
A: 3 + 3 × 4.
A: 4 + 4 × 4.
A: Eh, viene, prof.
A: Cosa è quel × 4.
I: Può essere un numero costante come là abbiamo × 8. Questo 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3… cosa sono?

n	n° conifere	
1	8	1 + 1 × 4[212]
2	16	2 + 2 × 4
3	24	3 + 3 × 4
4	32	4 + 4 × 4
5	40	5 + 5 × 4

A (Laura): Boh.
A (Veronica): n + n.
G: n + n × 4.
I: n + n come lo posso scrivere?
G: n^2!
I: Non è n × n!
A (Veronica): È vero!
A: Ah!
A (Andrei): n × 2.
A (Giuseppe): Eh, n × 2, e cosa ho detto io prima?
I: O ancor meglio, io lo posso scrivere come 2n. Due volte n. Quindi il numero di conifere lo posso anche trovare facendo 2n × 4.

[211] *Sembra un'altra classe. Tranquilli, ragionanti, collaborativi, e anche I, devo dire, conduce con maggiore serenità l'attività.*
[212] *Perché non inserite le parentesi?*

N° conifere = $2n \times 4$

A: Ci siamo arrivati.
I: Ma questo $2 \times n \times 4$ e questo $n \times 8$ sono diversi? Abbiamo trovato due formule diverse?
G: No.
G: Sì.
I: Chi dice che sono due formule diverse? Michael, perché dici che sono diverse?
A (Michael): Eh… perché… cambiano.
I: Cosa cambia? Bisogna anche saper motivare le proprie risposte. Non basta dire secondo me sì, secondo me no. Laura.
A (Laura): Se fai 2×4 dopo non viene… viene $8 \times n$… sì, sono uguali. Sì perché se fai 2×4 viene 8.
I: Allora perché hai detto che sono diverse?
A (Laura): Perché…
A (Veronica): Se scompongo l'otto, viene 2×4[213]. È la stessa cosa.
I: Quindi sono uguali, perché vale la proprietà commutativa, cioè posso cambiare l'ordine e dire $2 \times 4 \times n$, ma 2×4 fa 8 e quindi posso anche scrivere $8 \times n$, come nell'altra formula. Così come qui posso applicare la proprietà dissociativa[214] e 8 diventa 2×4 e poi la proprietà commutativa e viene $2 \times n \times 4$.

N° conifere = $2n \times 4 = 2 \times n \times 4 = 2 \times 4 \times n = 8 \times n$
N° conifere = $8 \times n = 2 \times 4 \times n = 2 \times n \times 4 = 2n \times 4$

Quindi vedete che è la stessa cosa, non cambia assolutamente niente. Altri modi?
A (Andrei): Sì sì, io.
A (Giuseppe): Basta Andrei!
A: Basta!
I: Allora o dici qualche cosa o poi non puoi più parlare perché hai stufato un po' tutti.
A (Andrei): Si potrebbe fare $8 \times 1 : 1$.
I: Va bene. Hai perso la possibilità di parlare.
A (Andrei): Perché?
I: Perché secondo te hai detto una cosa sensata?[215] Dividi per uno ottieni qualcosa di diverso?
A (Andrei): Eh, ma poi fai diviso 2…
I: Allora, torniamo alle nostre conifere. La domanda tre l'abbiamo fatta. La domanda quattro…
A: L'abbiamo fatta.
I: Spiega come è possibile scoprire in base al numero dei filari di meli il numero di alberi di conifere. Sì, l'abbiamo fatta. Supponi che l'agricoltore voglia ingrandire il frutteto con molti filari di alberi. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto che cosa aumenta più velocemente, il numero di meli o il numero di conifere?
A (Alessia): Io ho messo il numero di meli perché le conifere sono di più e ci metterà più tempo a piantarle.
I: Ti ha fatto una domanda diversa. Ti dice che l'agricoltore ingrandisce il frutteto e ti chiede se aumenta più velocemente il numero di meli che pianta o il numero di conifere.
A (Alessia): Conifere.
I: Perché?
A (Alessia): Perché sono di più.
I: Sicura? Chi è d'accordo sul fatto che sono di più le conifere? Otto. Chi è d'accordo sulla sua motivazione? Nessuno.
A (Arianna): Qual è la motivazione?
I: Perché ce ne vogliono di più.
A (Arianna): Sì è vero.
I: Qualcuno ha un'altra motivazione?
A (Giuseppe): Crescono entrambi.
I: Ho detto, chi è d'accordo con l'Alessia?
A (Giuseppe): Ah, no, io no.
I: Allora cosa alzi la mano a fare? Allora, di quelli che pensano che aumenti più velocemente il numero delle conifere, sono tutti d'accordo con la sua motivazione, cioè che ce ne vogliono di più? E chi non è d'accordo con lei? Arianna.

---

[213] *Altra occasione per **forma canonica/non canonica**.*
[214] *Attenzione: la proprietà dissociativa non esiste. Qui converrebbe parlare di sostituire la **forma canonica** 8 con la **non canonica** 2×4, più **trasparente** dal punto di vista della leggibilità del **processo**.*
[215] *Non so se sia il caso di Andrei, ma penso che lui abbia considerato* sensata *la cosa che ha detto (l'1 e lo 0 fanno spesso brutti scherzi). Cito a questo proposito un articolo di Booth (1986) in cui si afferma: 'Gli errori e le misconcezioni degli allievi spesso non sono né prese a cuor leggero né stupide, ma rappresentano il risultato di riflessioni e di tentativi* ragionevoli *per dare un senso ad espressioni matematiche altrimenti prive di significato'.*

A (Arianna): Io sono d'accordo con lei per le conifere, però ho un'altra motivazione. Perché i meli sono uno sì e uno no, invece le conifere ci sono sempre.
I: Quindi è come dice lei, ce ne vogliono di più.
A (Arianna): Sì, però è diverso.
I: Laura.
A (Laura): Perché più sono i meli e più sono le conifere.
I: La domanda è crescono gli uni o gli altri più velocemente? Il numero delle conifere diventa più grande più velocemente rispetto a quello dei meli o viceversa?
A (Veronica): Io ho messo che crescono più velocemente le conifere perché… cioè… come dice lei, però perché siccome i meli sono circondati e siccome le conifere sono molto vicine, aumentano molto di numero.
I: Chi dice invece che aumentano più velocemente i meli? Nessuno. E tutti gli altri?
A (Giuseppe): Aumentano insieme.
I: Contemporaneamente dello stesso numero?
A (Giuseppe): Sì.
I: Non è vero. Prova a guardare.
A (Arianna): Non è vero.
I: Numero di meli.
C: 1, 4, 9, 16, 25.
I: Numero di conifere.
C: 8, 16, 24, 32, 40.

N° meli	N° conifere
1	8
4	16
9	24
16	32
25	40

I: Allora, cosa vediamo dalla tabella.
A (Arianna): Che sono di più le conifere.
I: In tutti i casi?
G: Sì.
I: Quindi vuol dire che avete ragione, perché le conifere sono di più.
A (Veronica): Però da 4 a 9, ci sono + 8.
A (Justice): Io so perché! Crescono più le conifere perché hanno il sole.
I: Vi ricordo la forma, fuori le conifere, dentro i meli.
A (Federica): Ha ragione Justice! Perché le conifere fanno ombra ai meli!
G. È vero!
I: Ma secondo te, qui al centro la conifera fa ombra?
A (Federica): No.

Purtroppo è finito lo spazio nel registratore e non me ne sono accorta. Comunque non sono riusciti ad arrivare ad una conclusione[216] *se non proprio sul suono della campana, quando, con mille miei aiuti, solo Veronica è riuscita a saltarci fuori.*

[216] *A quale conclusione sono arrivati? Mi chiedo anche: con quali strumenti I pensava che potessero arrivarci? Probabilmente, mentre per tutta la lezione (ben condotta, nel complesso) gli alunni hanno avuto la sensazione che il compito fosse all'altezza delle loro possibilità di investigazione e quindi hanno investito in modo attivo le loro energie, in quest'ultima parte si sono trovati inadeguati, e sono partiti per la tangente (il sole, l'ombra). A parte un grafico, che evidentemente esula in questo momento dalla vostra attività, si sarebbe potuto considerare l'incremento di ogni gruppo di piante da una situazione all'altra e fare un confronto, ma mi pare che questa potrebbe essere 'un'altra storia'.*