

27 marzo 2019

1

**Commenti** *Insegnante di classe*

**Commenti** *Giancarlo Navarra*

**PRESENTAZIONE DELLA CLASSE:**

Il lavoro viene svolto con un gruppo di 14 alunni nell'ora di laboratorio a classi aperte con cadenza settimanale per n. 4/5 settimane. Il gruppo è formato da alunni provenienti dalle tre classi prime della scuola secondaria di primo grado di Monteroni d'Arbia delle quali io sono la docente di matematica. Il gruppo è stato formato in base ai risultati dei test di ingresso QIVATA sulle abilità trasversali quali comprensione da lettura, ragionamento ed abilità numerica ed ha già lavorato sulle successioni (1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> fase) con l'insegnante che completa il mio orario. Il livello di abilità evidenziato dal gruppo nei test d'ingresso è risultato mediamente buono.

**PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ:**

Ho proposto la situazione problematica a tutto il gruppo iniziando con un breve ripasso sulle successioni figurali e gli elementi che le caratterizzano, affrontate nel precedente laboratorio, per poi passare alle progressioni aritmetiche.

**IL PROBLEMA:** Dalle successioni modulari alle leggi di corrispondenza.

- I: Dopo aver fatto un ripasso sulle successioni e sugli elementi essenziali che connotano una successione, viene presentata alla LIM la diapositiva e l'insegnante chiede di rispondere alla prima domanda.:

- Ginevra F: La successione continua con 31, 35, 39, 43, e 47.
- I: Finisce qui?
- Ginevra F: No continua all'infinito e la distanza tra un numero e l'altro è 4.
- I: C'è qualcuno che ha trovato una successione diversa da quella di Ginevra?
- Alunni: No!
- I: Ginevra ci puoi spiegare cosa vuoi dire con la distanza tra un numero e l'altro è 4?
- Emma: Io direi che la differenza fra un numero e l'altro è 4.
- I: Quando dici tra un numero e l'altro, puoi essere più precisa?
- Emma: La differenza tra ogni numero è 4.
- I: Non mi è chiaro, mi soffermerei sulla parola ogni.
- Valentino: Si può dire che in questa successione la differenza fra il numero precedente e il suo successivo è 4.<sup>1</sup>
- I: Siete tutti d'accordo con Valentino?
- Alunni: Mhhh!
- I: Proviamo a scrivere per Brioshi ciò che ha detto Valentino.
- Ginevra C: Io prenderei l'11 e il 19.
- I: Non capisco, dobbiamo prendere per esempio un numero della successione e poi il suo successivo.
- Ginevra F: Sì, se ad esempio prendo il 15, il suo precedente è 11 e il suo successivo è 19.
- I: Ma Valentino non ha detto la differenza fra il precedente di un numero e il successivo del numero. Leggiamo alla lavagna la frase di Valentino e concentriamoci sui numeri che vogliamo prendere come esempio "La differenza fra il numero precedente e il suo successivo è 4".
- Ginevra F: Ah! Ho capito devo prendere due numeri vicini.

<sup>1</sup> La frase di Valentino viene scritta letteralmente alla lavagna.

21. I: Da che cosa l'hai capito?
22. Ginevra F: Dal fatto che dice un numero e il suo successivo.
23. I: Dai, fa un esempio.
24. Ginevra F: 11 e 15.
25. I: Ok allora proviamo a tradurre in linguaggio per Brioshi ciò che ha affermato Valentino.
26. Emma:  $11-15=?$  non torna, semmai  $15-11!$
27. I: E allora cosa non andava in quello che ha asserito Valentino?
28. Emma: Che doveva dire *"La differenza fra un numero e il suo precedente è 4"*.
29. Valentino: Allora potremmo dire che la relazione che c'è tra un numero e il suo successivo nella successione è 4.
30. I: **Dobbiamo dirlo meglio o più precisamente.**<sup>2</sup>
31. Valentino: La relazione che lega due numeri precedente e suo successivo è  $+4$ .
32. I: Perché secondo voi è importante specificare  $+4$ ?
33. Ginevra C: Perché altrimenti io potrei pensare anche  $-4$  e la successione sarebbe diversa.
34. I: Allora io ho scritto alla lavagna le vostre asserzioni. Proviamo ad analizzarle una per una, magari scrivendo per Brioshi.

1. La distanza fra un numero e l'altro è 4.
2. La differenza tra ogni numero è 4.
3. La differenza tra il numero precedente e il successivo è 4.
4. La relazione che lega un numero della successione e il suo successivo è  $+4$ .

35. Miriam: La prima frase è troppo generica non si capisce quale numero prendere quindi non si sa tra quali numeri fare la differenza.
36. Pietro: Nella seconda frase non torna l'italiano nel senso che c'è la parola ogni che non ci dovrebbe stare quindi non si può tradurre per Brioshi.
37. Emma: Nella terza frase dovrei fare il contrario di quanto detto  $15-11=4$  perché se seguo la frase farei  $11-15=$ .
38. Valentino: Nella quarta frase se prendo un numero qualsiasi della successione e ci aggiungo 4 ottengo il suo successivo nella successione.
39. I: Come potresti scriverla?
40. Valentino: Il successivo di un numero  $n$  è  $=n+4$ .
41. Emma C: Allora la differenza tra un numero della successione e il suo precedente è 4.
42. I: Come lo scriveresti?
43. Emma:  $n$ -il suo precedente= $4$ .
44. I: "Il suo precedente" così come il successivo sono concetti espressi in linguaggio naturale, cerchiamo di non usarlo altrimenti Brioshi non capisce. Forse dovremmo specificare qualche altra cosa della successione. Ritorniamo alla frase di Valentino: il successivo di un numero  $n$  è  $=n+4$ . Proviamo a verificare ciò che ha asserito Valentino.
45. Aurora: Se prendo ad esempio il numero  $n=19$ , allora il successivo nella successione sarà  $19+4=23$ . Se prendo  $n=23$  allora il suo successivo lo troverò facendo  $23+4$ .
46. I: Bene. Allora questo numero che io addiziono ad ogni numero della successione per ottenere il numero successivo si chiama ragione della successione ed è un numero accompagnato da un segno di operazione. C'è un elemento importante che va specificato bene nella successione, secondo voi qual è?
47. Susanna: Che la successione non finisce mai.
48. I: È vero, la successione è infinita, e questa è una caratteristica delle successioni, ma per individuare gli elementi, i numeri che costituiscono questa successione di che cosa ho bisogno oltre alla ragione?
49. Pietro: Dell'inizio. Del numero dell'inizio.
50. I: Ok, mi potreste dire una successione numerica con ragione  $+4$  però diversa da quella assegnata?
51. Emma T: 6, 10, 14, 18, 22...
52. I: Per specificare una successione sono necessari due elementi.
53. Ludovica: Primo numero della successione e ragione della successione.
54. I: Ok, allora volendo mandare il messaggio riguardo alla nostra successione a Brioshi concordiamo di scrivere così:

$7; +4$     o     $7^{+4}$

<sup>2</sup> Devo essere più precisa: la mia è ancora una affermazione vaga.

55. I: Chi analizza la seconda successione?<sup>3</sup>  
 56. Aurora: La relazione tra un numero della successione e il suo successivo è +11.  
 57. I: Usiamo i termini che abbiamo appena imparato.  
 58. Ginevra: La successione ha come numero iniziale 7 e ragione +11.  
 59. I: Scrivete a Brioshi.  
 60. Gli alunni: 7; +11.  
 61. Emma C. legge il terzo quesito della diapositiva.

3. Scrivi i numeri che mancano:  
 1 2 3 4 5 6 7  
 4 10 16 \_ \_ 34 ...

62. Ginevra F: 4, 10, 16, **22, 28, 34, 40**....  
 63. I: Come hai ragionato? Spiegalo ai tuoi compagni.  
 64. Ginevra F: Ad ogni numero ho sommato +6.  
 65. I: Cerca di essere più precisa usando il linguaggio appena imparato.  
 66. Ginevra F: Ho individuato il primo numero della successione che è 4 e poi la ragione + 6.  
 67. Valentino: **La relazione tra il numero superiore e il numero inferiore della progressione è  $\times 6 - 2$ , ho fatto come con la macchina sputa numeri.**<sup>4</sup>  
 68. I: Verificate ciò che ha detto Valentino riportando i numeri in tabella.  
 69. **Gli alunni costruiscono la tabella.**<sup>5</sup>

numero di posizione nella successione	Relazione fra numero di posizione ed elemento <sup>6</sup>	Elemento della successione in n <sup>a</sup> posizione
1	$1 \times 6 - 2$	4
2	$2 \times 6 - 2$	10
3	$3 \times 6 - 2$	16
4	$4 \times 6 - 2$	22
5	$5 \times 6 - 2$	28
.....		
200	$200 \times 6 - 2$	1198

70. I: Allora in una successione per individuare i numeri che la compongono devo conoscere il primo numero e la ragione, poi mi posso aiutare con il “ragionamento che fa la macchina sputa numeri per individuare i numeri della successione” che si trovano alla 200<sup>a</sup> posizione, alla 4000<sup>a</sup> posizione, cioè in ennesima posizione anziché individuarli per addizioni successive. Passiamo ora a questo quesito, cercate anche di dare una spiegazione di come avete fatto:

Scrivi i numeri che mancano :  
 \_ 8 15 \_ \_ 36 \_ ...

71. Aurora: I numeri che ho individuato in questa successione sono **1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57**..., ho capito che da 8 per arrivare a 15 mancava 7 quindi da 8 sono tornata indietro di 7 e da 15 sono andata avanti di + 7.  
 72. I: Usa i termini che abbiamo imparato oggi: primo numero della successione e ragione della successione.  
 73. Aurora: Allora ho guardato l'8 ed il 15 ed ho capito che la ragione della successione era + 7 così il successivo di 15 si trova con 15+7. Poi da 8 sono tornata indietro di 7 cioè 8-7 e quindi il primo numero della successione è 1.

<sup>3</sup> Nella prosecuzione dell'attività sarebbe interessante far evolvere la frase di Valentino “Il successivo di un numero  $n$  è  $=n+4$ ” (40) completando la sua traduzione in linguaggio matematico. Si otterrebbe la funzione - in cui  $s$  sia il successivo del numero -  $s=n+4$ . Gli alunni capirebbero che, fissata la variabile indipendentemente  $n$  (in questo caso un numero a caso), si trova il suo successivo. Si potrebbe anche passare alla sua rappresentazione sul piano cartesiano, anticipando un argomento che tradizionalmente viene affrontato in seconda o in terza.

<sup>4</sup> Bello!!! Valentino ha anticipato il passaggio successivo, nodale della relazione fra il numero di posto e l'elemento.

<sup>5</sup> Sarebbe valsa la pena che l'insegnante spiegasse brevemente come gli alunni sono arrivati all'introdurre la tabella (passaggio molto evoluto): era uno strumento già noto? In quali occasioni e a quali scopi era stato introdotto?

<sup>6</sup> Nella seconda colonna conviene scrivere anche i moltiplicandi, cioè i numeri delle posizioni, altrimenti non si capisce come si formano i numeri della terza colonna. Li inserisco io (in rosso).

3 aprile 2019

1

74. I: Facciamo un breve ripasso, osservate queste successioni numeriche sulla LIM. Individuate la ragione o il modulo della successione.

A) 6	7	9	10	11...
B) 3	7	11	15	19...
C) 5	7	9	11	13...

78. Pietro: La ragione della successione A) è +1,

79. Emma: Nella successione B) la ragione fra il 3 e il 7 è +4.

80. I: Solo fra il 3 e il 7 la ragione è +4? Come dici tu sembra che se io prendo un'altra coppia di numeri 15 e 19 ad esempio, la ragione sia diversa.

81. Emma: No.

82. I: Allora come potresti dire?

83. Emma: La ragione della successione è +4 perché se io prendo un numero della successione, ottengo il suo successivo aggiungendo 4 al numero scelto.

84. Ginevra: Nella successione C) la ragione tra un numero e il suo successivo è +2.

85. I: Allora se io vi scrivo: 6; +5 o  $6^{+5}$  voi che successione scrivereste?

86. Alunni: 6    11    16    21    26...

87. Miriam L: In questo caso avendo una ragione +5 si potrebbe dire che, se ci si sposta in una successione di figure il modulo è formato da 5 figure.<sup>7</sup>

88. I: E allora i numeri 6, 11, 16, ecc. che significato hanno?

89. Valentino: Il 6 indica il primo elemento del secondo modulo della successione.

90. I: Per farci capire meglio, disegna la successione di figure che hai in testa e spiegaci.

91. Valentino disegna:



92. Valentino: Ogni elemento ha il numero corrispondente di posizione nella successione: 1, 2, 3, 4, 5 posizione... Il modulo è formato da cinque elementi, il triangolo è il primo elemento del modulo, e lo ritroviamo in posizione 1, 6, 11, 16, 21... Quindi  $6=5+1$ ,  $11=5+5+1$ ,  $16=5+5+5+1$ .

93. I: E se volessimo esprimere diversamente tutte queste addizioni ripetute?

94. Pietro:  $11=5 \times 2 + 1$ ,  $16=5 \times 3 + 1$ .

95. I: E il 6?

96. Valentino:  $6=5 \times 1 + 1$ .

97. I: Ok, da qui abbiamo capito perché la ragione di una successione numerica viene anche chiamato modulo. Ora analizziamo anche il secondo gruppo di successioni:

D) 2	4	6	8	10	12...
E) 3	5	7	9	11	13...
F) 7	9	11	13	15	17...

97. Miriam L: La ragione di tutte queste tre successioni è sempre +2.

98. I: Hanno tutte lo stesso modulo, ma sono uguali?

99. Alunni: No!

100. I: Allora pur avendo lo stesso modulo ho successioni diverse, che cosa le rende diverse?

101. Miriam: L'elemento iniziale<sup>8</sup>. Nella prima successione l'elemento iniziale è 2, nella seconda è 3 e nella terza è 7 per cui, pur avendo stesso modulo ma primi elementi differenti, ottengo successioni diverse.

102. I: A questo punto se voglio indicare una successione numerica senza elencare gli elementi che la compongono come posso fare?

103. Miriam: Definisco il primo elemento e la ragione.

104. I: Scrivete per i vostri compagni dei messaggi per la costruzione di una successione che avete pensato.

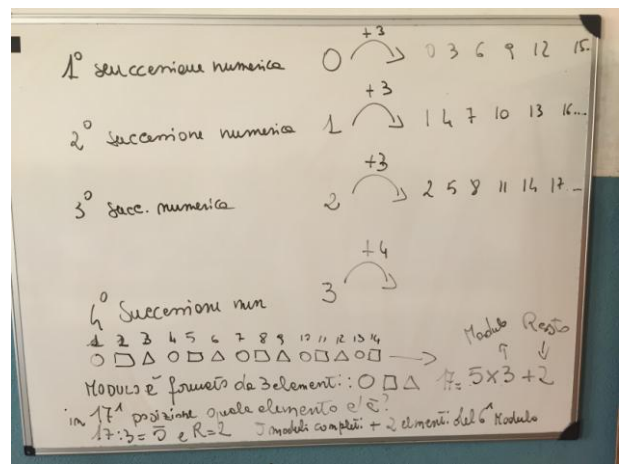
<sup>7</sup> Bellissima osservazione. Sposta in avanti l'attività come ha fatto nell'altro incontro Valentino (67).

<sup>8</sup> Trattandosi di successioni aritmetiche, sarebbe meglio parlare di numero anziché di elemento.

105. *Gli alunni ne costruiscono diverse:*  
 Emma scrive: 3 8 13 18... e poi  $3+5=8$ ,  $8+5=13$ .  
 Flavio scrive: 6 9 12 15..., cioè  $6+3=9$ ,  $9+3=12$ .
106. I: Ho dei dubbi che Brioshi capisca cosa deve fare se gli spedite il messaggio:  $3+5=8$ ,  $8+5=13$  o  $6+3=9$ ,  $9+3=12$ . Pensate di non aver partecipato a questa lezione, voi cosa potreste capire da queste operazioni?
107. Flavio: Forma canonica e non canonica.
108. I: Ok, ma voi dovete dire a Brioshi di costruire la successione numerica che avete pensato, non esempi numerici che rappresentano un caso particolare, cosa gli inviereste?
109. Emma: Il primo elemento e il modulo cioè per la mia  $3 \xrightarrow{+5}$
110. *I ragazzi si scambiano messaggi per la costruzione di successioni in linguaggio per Brioshi, le successioni sono tutte corrette e preferiscono indicare la successione con primo elemento seguito da freccia.*
111. I: adesso io vi mostro queste tre successioni. Proviamo ad analizzarle.

1) 0	3	6	9	12	15...
2) 1	4	7	10	13	16...
3) 2	5	8	11	14	17...

112. Ludovica: Tutte e tre le successioni hanno ragione +3.
113. Miriam L: Se guardiamo le successioni in verticale possiamo vedere che si parte da 0 poi si scende a 1, poi a 2, poi si passa alla seconda colonna partendo con 3 ecc... si va avanti sempre contando sempre +1 i numeri sono in ordine. **Si può dire che la ragione è +1.**<sup>9</sup>
114. I: Attenta, siamo partiti affermando che nelle tre successioni la ragione o modulo è +3 com'è possibile che ci sia una ragione diversa? C'è qualcosa che non torna. **Tu stai mettendo insieme tre successioni!**<sup>10</sup> Invece devi tenerle distinte.
115. Miriam L: Ha ragione!
116. Miriam B: Le tre successioni diverse hanno lo stesso modulo ma elemento iniziale diverso.
117. I: Vedete altro? Provate a leggere gli elementi di ogni successione, ad esempio 3, 6, 9, 12...
118. Miriam L: Si alternano **elementi pari a dispari.**<sup>11</sup>
119. I: È giusto, ma possiamo notare ancora un'altra caratteristica.
120. Pietro: **La prima successione numerica è la tabellina del 3.**<sup>12</sup>
121. I: C'è qualcuno che ha notato ancora qualche altra caratteristica in analogia alle successioni figurali?
122. Alunni: No.
123. I: Vediamo se ci possiamo arrivare. Miriam ha detto che le tre successioni hanno la stessa ragione o modulo, provate a collegare quanto ha detto Miriam con le successioni figurali sorelle.
124. Miriam L: Allora anche le successioni numeriche che hanno modulo uguale sono sorelle.
125. I: Adesso proviamo a fare una rappresentazione tabulare delle tre successioni.



<sup>9</sup> Questa situazione è 'classica'. Quando gli alunni cominciano a condurre le prime esplorazioni sulle successioni alla ricerca di regolarità ne individuano di molti tipi diversi perché non possiedono ancora gli strumenti per capire quali siano regolarità 'produttive'. È una fase molto ricca e delicata del balbettio algebrico.

<sup>10</sup> Potevo aspettare che fosse Miriam a trarre da sé le conclusioni.

<sup>11</sup> Anche qui sarebbe meglio usare 'numeri' che 'elementi'. V. Commento 8/r101.

<sup>12</sup> Un alunno, che non si è accorto di essere registrato, dice rivolto ad una compagna "Cosa diresti a Brioshi?" La compagna risponde: "Direi di imparare l'italiano!". 😊😊😊

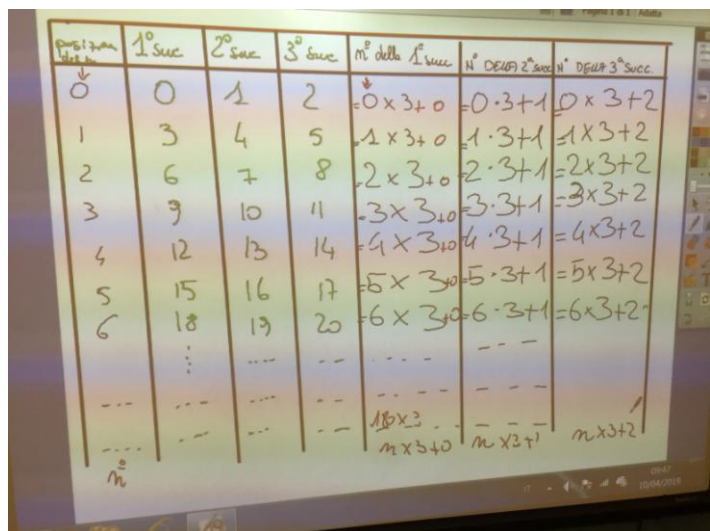
secondo questa tabella:

n. di posizione dell'elemento	Successione 1	Successione 2	Successione 3	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 1)	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 2)	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 3)
<b>1</b> <sup>13</sup>	0	1	2	0= <sup>14</sup>	1=	2=
<b>2</b>	3	4	5			
<b>3</b>	6	7	8			
	....	...	...			

126. Alunni suggeriscono:

n. di posizione dell'elemento	Successione 1	Successione 2	Successione 3	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 1)	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 2)	Elemento in posizione n <sup>^</sup> (successione 3)
<b>0</b>	0	1	2	0=	1=	2=
<b>1</b>	3	4	5			
<b>2</b>	6	7	8			
	....	...	...			

127. La tabella corretta viene poi riempita:



128. I: Guardate bene la tabella, in particolare le ultime tre colonne che riportano la divisione euclidea per 3 di un numero ennesimo:  $n = n^{\circ 15} \times 3 + r$  per tutte e tre le successioni. Per aiutarvi concentratevi sui resti delle tre successioni.
129. Miriam: Nella successione 1, si forma la tabellina del tre, ogni numero è espresso nella forma non canonica e il resto è sempre 0, nella successione 2 il resto è sempre 1 e nella successione 3 il resto è sempre 2.
130. I: Come puoi spiegare che hai resti diversi?
131. Miriam: Perché ho elementi iniziali diversi.
132. Valentino: Se inizia con 0 ho la tabellina del 3, se l'elemento iniziale è diverso da zero posso avere resto 1 o 2.
133. I: E perché non resto 3?



<sup>13</sup> I ragazzi hanno lavorato e mi hanno fatto notare che nella prima colonna a sinistra i numeri non potevano partire da 1 perché in questo modo non potevano trovare le "operazioni" (le relazioni) per esprimere il primo elemento della successione, allo stesso tempo hanno suggerito di inserire lo 0 in prima posizione della prima colonna. *Ottima osservazione. Aggiungo che non avrei inserito tutti gli '=' nella tabella, condividendo naturalmente con la classe il fatto che le rappresentazioni all'interno delle colonne 5, 6 e 7 sono equivalenti ai rispettivi numeri nelle colonne 2, 3 e 4. L'uguale lo riserverei per le rappresentazioni finali delle funzioni.*

<sup>14</sup> Non mi sono chiari i segni '=' dopo i numeri.  
<sup>15</sup> Suggesto per 'numero' di scrivere n e non n°.



134. Valentino: Perché così aggiungo un modulo in più e otterrei un numero che è multiplo del 3 cioè della tabellina.<sup>16</sup>
135. I: Per le tre successioni numeriche abbiamo definito rispettivamente tre possibili classi di resto:  $r=0$  per la prima successione,  $r=1$  per la seconda,  $r=2$  per la terza. E se io avessi successioni numeriche così fatte:
- 0, <sup>+4</sup>  
 1; <sup>+4</sup>  
 2; <sup>+4</sup>  
 3; <sup>+4</sup>
- sapreste indicarmi le possibili classi di resto?
136. Alunni:  $r=0$ ,  $r=1$ ,  $r=2$ ,  $r=3$ .
137. I: Cercate di essere più precisi, quale successione è di classe di resto 0? Quale di classe 1?
138. Flavio: La prima successione che è la tabellina del 4 è classe 0, la seconda classe 1, la terza classe 2 e la quarta classe di resto 3.<sup>17</sup>
139. I: Adesso provate a risolvere il seguente quesito:

Gli abitanti dell'atollo sanno che il loro ambiente è molto fragile e quindi lo tengono in modo davvero ordinato.  
 Le stelle marine abitano in casette numerate 1, 2, 3 e così via.  
 Le casette dei granchi sono a loro volta numerate a cominciare da 4: 4, 6, 8, 10 e così via.  
 Ogni stella è dirimpettaia di un granchio e le rispettive case sono separate da una strada tracciata sul fondo della laguna dell'atollo.

	1	2	3	4	5	6...
	•	•	•	•	•	•
	4	6	8	10	12	14...

1) Che numero ha la casa del granchio dirimpettaio della prima stella? Della terza? Della sesta?  
 2) Che numero di casa ha il granchio dirimpettaio della stella nella 57ª posizione?  
 3) Individua una 'legge' che permette di trovare il numero della casa di un granchio dirimpettaio di una stella qualsiasi.  
 Argomenta le tue risposte.

140. Emma C: Il numero della casa del granchio dirimpettaio alla prima stella è 4, della terza stella è 8 e della sesta è 14.
141. I: Bene, le prime domande erano di riscaldamento, adesso provate a rispondere alla seconda domanda della diapositiva. Ognuno provi a trovare la soluzione con la strada che ritiene più opportuna o a lui più congeniale, l'importante è che poi sappiate spiegarne il perché.
142. Emma T: Io ho fatto così  $(57 \times 2) + 2 = 116$ .
143. I: Come sei arrivata a questa soluzione?
144. Emma T: Non lo so, ho fatto così e torna, poi ho anche fatto  $(57 + 1) \times 2 = 116$ .<sup>18</sup>
145. Valentino: Io ho fatto uguale ma ho utilizzato la macchina sputa numeri.

<sup>16</sup> Davvero molto interessanti le questioni poste dall'insegnante e notevole la capacità degli alunni di argomentare su questioni matematiche piuttosto raffinate come l'interpretazione del resto nella rappresentazione euclidea della divisione.

<sup>17</sup> Qui avrei dovuto continuare la discussione con i ragazzi facendo notare il processo inverso: ad esempio scegliendo un qualsiasi numero, moltiplicandolo per 4 ed aggiungendo 3 è uguale ad un numero della successione  $3; \curvearrowright^{+4}$ . L'insegnante può essere soddisfatta del livello raggiunto dalla classe. Mi sembra molto matura e dotata delle competenze necessarie per proseguire verso gli stadi successivi dell'attività. Direi di più: possiedono un'importante metacompetenza, che definirei come 'capacità e sensibilità di capire come e quando usare le proprie competenze per individuare direzioni nuove nell'attività'. Poco importa che solo alcuni per ora le possedano; se esse si manifestano all'interno di una sviluppata intelligenza sociale si favorisce comunque, anche per gli alunni più deboli, la costruzione collettiva della conoscenza.

<sup>18</sup> Sarebbe stato interessante chiedere a Emma T come fa ad essere sicura che 'torna'. Ha fatto delle verifiche? Sarebbe 'più furba che santa' perché non si trovano per caso addirittura due rappresentazioni diverse (142, 144), entrambe corrette, delle relazioni che si dovevano individuare.

146. I: E come sei arrivato a capire che il numero civico del granchio che abita di fronte alla 57<sup>a</sup> stella è 116? O, meglio, da dove hai dedotto che dovevi moltiplicare per 2 e poi aggiungere 2? Cerchiamo di capire come hai... avete ragionato.<sup>19</sup>
147. Aurora: Io invece ho fatto:
- n. civ. granchio:  $1 \times 3 + 1 = 4$
  - n. civ. granchio:  $2 \times 3 + 0 = 6$
  - n. civ. granchio:  $3 \times 3 - 1 = 8$
  - n. civ. granchio:  $4 \times 3 - 2 = 10$
  - n. civ. granchio:  $5 \times 3 - 3 = 12$
  - n. civ. granchio:  $6 \times 3 - 4 = 14$
  - n. civ. granchio:  $7 \times 3 - 5 = 16$
148. Prendiamo in considerazione il ragionamento di Aurora e cerchiamo di dare un significato alle operazioni che ha fatto. Aurora...
149. Aurora: Ho visto che se moltiplicavo per 3 il n. civico della prima stella e aggiungevo 1 ottenevo il primo granchio, se moltiplicavo per 3 il n. civico della seconda stella e aggiungevo 1, no! 0, ottenevo il secondo granchio, se moltiplicavo per tre il n. civico della terza stella e sottraevo 1 ottenevo il terzo granchio, se moltiplicavo per tre il n. civico della quarta stella e sottraevo 2 ottenevo il quarto granchio, così via...
150. I: Ma se io ti dico trova il n. civico del granchio dirimpettaio alla 57<sup>a</sup> stella tu come faresti a rispondermi?
151. Aurora: Ehm... dovrei fare le prove fino a 57.
152. I: Direi che il sistema è un po' troppo dispendioso, ovvero poco efficiente. Nonostante tutto potremmo guardarlo meglio per trovare delle regolarità che ci permettono di calcolare direttamente il n. civico del granchio senza fare tutti i passaggi intermedi. Provate a dare un significato logico ai numeri delle espressioni scritte da Aurora.
153. Aurora: Il primo numero dell'espressione è il n. civico della stella che moltiplico per 3 sempre, poi per arrivare a 4 che è il n. civico del granchio dirimpettaio, aggiungo 1.
154. I: Vai avanti.
155. Aurora: Per trovare la casa del secondo granchio prendo il n. civico della seconda stella lo moltiplico per 3 ma devo aggiungere 0, e così via...
156. I: Allora intanto potremmo scrivere una regola generale del tipo n. civico della stella  $\times 3 + 1$ , o  $+ 0$ , o  $- 1$ , o  $- 2$ , o  $- 3$ ... ma io vi sottopongo il problema di nuovo: come faccio a sapere quale numero sommare o sottrarre al prodotto del n. civico della stella per 3? Fammi capire e fai capire ai tuoi compagni come vengono fuori i numeri  $+1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$ ...
157. Aurora: Se prendo il n. civico della stella e gli tolgo 2, infatti  $3-2=1, 4-2=2, 5-2=3$ .
158. I: Se questa è la regolarità che ci vedi, deve funzionare anche per la prima e la seconda espressione (a. e b.).
159. Aurora: Ah, già!
160. I: Comunque non hai sbagliato a ragionare, dobbiamo solo spiegare meglio le relazioni tra i numeri all'interno dell'espressione.<sup>20</sup> La prima parte è spiegata bene, ed anche come ottieni i numeri della colonna C, ma cosa succede ai primi due numeri della colonna C?

A		B	C	D
a.	n. civ. granchio: $1 \times 3 + 1 = 4$	a. $1 \times 3 +$	a. <b>1</b>	...?...
b.	n. civ. granchio: $2 \times 3 + 0 = 6$	b. $2 \times 3 +$	b. <b>0</b>	...?...
c.	n. civ. granchio: $3 \times 3 - 1 = 8$	c. $3 \times 3 -$	c. 1	(3-2)
d.	n. civ. granchio: $4 \times 3 - 2 = 10$	d. $4 \times 3 -$	d. 2	(4-2)
e.	n. civ. granchio: $5 \times 3 - 3 = 12$	e. $5 \times 3 -$	e. 3	(5-2)
f.	n. civ. granchio: $6 \times 3 - 4 = 14$	f. $6 \times 3 -$	f. 4	(6-2)
g.	n. civ. granchio: $7 \times 3 - 5 = 16$	g. $7 \times 3 -$	g. 5	(7-2)
n <sub>57</sub> .	n. civ. granchio: $57 \times 3 - ? = ?$	n <sub>57</sub> . $57 \times 3 -$	n <sub>57</sub> . 55	(57-2)
		<b>n. civ stella <math>\times 3 -</math></b>		<b>n. colonna C = (n. civ. stella - 2)</b>

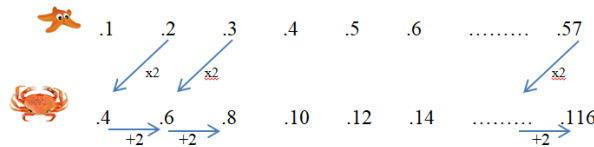
<sup>19</sup> Ho trovato difficoltà a far spiegare ad Emma come aveva ragionato, e dopo vari stimoli, sempre di natura simile, ho provato ad estendere a tutti gli altri la proposta di esplicitare il ragionamento che poteva aver fatto Emma. Peccato che Valentino non sia potuto tornare sul suo utilizzo della Macchina Sputanumeri. Credo che sarebbe potuto diventare uno stimolo molto efficace (v. Commento 29 al punto 4.).

<sup>20</sup> Ho fatto fatica a gestire questo punto, tanto che li ho aiutati dicendo loro di scomporre le espressioni in una tabella in analogia con l'esempio precedente. Hanno collocato bene la prima parte della espressione nella colonna B, notando che poi proseguivano con il segno - della sottrazione tranne nelle prime due espressioni. Ho detto loro di non considerarle per il momento e di concentrarsi dalla terza in poi suggerendo di riportare, sempre nella colonna B, anche il segno - perché dalla terza espressione in poi si ripeteva. Successivamente, una volta trovata la regola, saremmo andati a verificare cosa accadeva nelle prime due espressioni.



21

161. Valentino: Dovrei fare meno (il n. civ della stella: 1 meno 2).  
 162. I: Provate a scriverlo in linguaggio per Brioshi.  
 163. Alunni: 1-2, 2-2.  
 164. I: e 1-2 a cosa è uguale? Anche se noi non abbiamo trattato questi numeri, e 2-2?  
 165. Valentino ed altri alunni:  $1-2=-1$ ,  $2-2=0$ .<sup>22</sup>  
 166. Ginevra C: Io ho trovato il numero così: n. civico stella  $\times 2 + 2$ , perché se guardo le due successioni:



ad esempio il granchio che sta di fronte alla stella di n. civico 3 ha come numero di casa quello della stella 3 moltiplicato per 2 e poi gli devo aggiungere 2, lo stesso devo fare per il granchio di dirimpettaio alla stella n. 4. Quando moltiplico per 2 ottengo sempre il n. civico del granchio precedente a quello che voglio trovare, poi, poiché tra un granchio e il suo successivo c'è sempre 2, al prodotto devo aggiungere 2.

167. I: Quindi se volessi trovare la relazione fra n. civico della stella e del granchio prescindendo dall'esempio numerico, come potreste fare? Provate a dare un significato ai numeri che avete utilizzato quando avete calcolato il n. civico del granchio che sta di fronte alla stella n.3.  
 168. Ginevra C: n. civico del granchio =  $3 \times 2 + 2$   
 169. I: Ok, ma diciamolo a parole, che cosa è il 3, il 2 e l'ultimo 2 nella espressione che hai dato prima?  
 170. Ginevra C: Il n. civico del granchio è uguale al n. civico della stella dirimpettaia (3) moltiplicato per 2 (il primo 2) e sommato a 2, dove il 2 rappresenta il modulo della seconda successione perché i numeri civici dei granchi vanno di due in due.<sup>23</sup>  
 171. I: Osserviamo da un altro punto di vista le due successioni numeriche, confrontatele e vediamo se possiamo aiutare Emma a spiegare il suo ragionamento<sup>24</sup>:

*21 Propongo una tabella più pulita, conseguente ad alcune domande che, immaginando di venire a lavorare nella tua classe, porrei ai (bravissimi) alunni mostrando la tabella che loro hanno costruito: "Cosa significano per voi A., B., C e D in testa alle colonne?" Mi risponderebbero probabilmente che sono semplicemente i 'nomi' delle colonne nelle quali vengono evidenziati dei passaggi delle scritture. Allora chiederei "Cosa significano le lettere a., b., c., d., eccetera prima dei numeri civici?" Anche qui mi risponderebbero in modo simile che sono 'i nomi delle righe'. Proporrei allora di porsi da un altro punto di vista e pensare di collocare dentro ogni colonna 'semplicemente' dei numeri, come avete fatto nelle tabelle precedenti (pag. 6). Aggiungerei che se una strategia si rivela efficace conviene continuare ad usarla adattandola alla nuova situazione. Assieme a loro quindi produrrei un po' alla volta una nuova tabella, interpretando la loro; per esempio:*

n. civico stella	n. civico granchio dirimpettaio			
1	4	$1 \times 3 + 1$		
2	6	$2 \times 3 + 0$		
3	8	$3 \times 3 - 1$		
4	10	$4 \times 3 - 2$		
5	12	$5 \times 3 - 3$		
6	14	$6 \times 3 - 4$		

*La mia impressione è che voi abbiate usato lo strumento tabella in un modo certamente produttivo in questo caso, ma non penso che la strategia non sia riproducibile in altri casi simili, perché nelle colonne che avete completato sinora evidenziate dei passaggi che riguardano questo particolare caso, diverso da altri. Questo che espongo qui è un dubbio di metodo, potrei essere smentito dai fatti.*

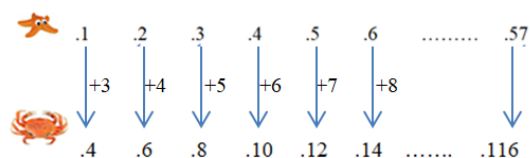
<sup>22</sup> *Qui mi sono trovata in difficoltà perché facendogli ricomporre l'espressione a. ottenevano:*

$$\text{n. civ. granchio: } 1 \times 3 + (-1) \neq 4$$

*e quindi dovevano gestire il doppio segno +(-); allora ho chiesto loro di correggere in  $1 \times 3 - (-1) = 4$  in analogia con le successive espressioni (dalla c. in poi) il problema del doppio segno -(-) rimaneva. Ho chiesto loro di rimandare il problema a quando affronteremo le operazioni con i numeri relativi. Al momento non sapevo come affrontare con loro questo argomento se non pensando a come di solito lo affronto in classe terza secondaria.*

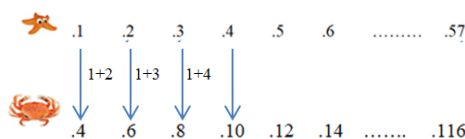
<sup>23</sup> *Qui non ho spinto i ragazzi a passare da una visione procedurale a quella relazionale del problema.*

<sup>24</sup> *Vorrei aiutare Emma a esplicitare il suo ragionamento per capire se si è mossa come esposto nell'unità 12, pag 105, esempio d).*



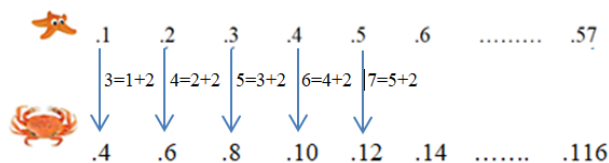
che cosa notate?

- 172. Miriam: Che la successione della stella ha modulo +1, quella del granchio ha modulo +2.
- 173. I: E poi non ne vedete altre?
- 174. Pietro: Poi c'è quella tra la stella e granchio che parte da 3 e ha ragione +1.
- 175. I: Bene, allora come potrei esprimere in altro modo il +3, +4, +5, +6 ... della successione numerica che avete appena trovato?
- 176. Alunni: Mmh....
- 177. I: Pensate ad una rappresentazione non canonica di 3 o del numero 4 ecc.
- 178. Pietro: 3=1+2.
- 179. I: E 4?
- 180. Pietro: 1+3.
- 181. I: Allora potrei scrivere:



Ma anche in questo modo al n. civico della stella sommo quantità che variano ogni volta e che quindi gestisco male, sono a parte il +1 nella stessa condizione di partenza<sup>25</sup>. Provate a cercare altre forme non canoniche di +3, +4, +5, +6 ... che però presentino delle regolarità.<sup>26</sup>

- 183. Alunni: Boh!
- 184. Pietro: 3=1+2, 4=2+2.
- 185. I: Continuiamo, provate ad esprimere il 5.
- 186. Pietro: 5=2+3.
- 187. I: Adesso proviamo a rimettere queste forme non canoniche nell'esempio di prima ed osserviamo bene:



che cosa notate? Scrivete in forma non canonica i numeri civici dei granchi osservando lo schema fatto alla lavagna (disegno sopra).<sup>27</sup>

- 188. Alunni:
  - granchio 4=1+1+2
  - granchio 6=2+2+2
  - granchio 8=3+3+2
  - granchio 10=4+4+2
  - granchio 12=5+5+2
- 189. I: E allora? Scrivete la relazione senza esempi numerici, cioè dando il significato logico ai numeri che usate per questi esempi.
- 190. Emma T: n. civico del granchio = n. civico della stella + n. civico della stella +2, oppure n. civico del granchio = n. civico della stella ×2 +2, ah!!
- 191. I: E la spiegazione per (57+1)×2=116, cioè ....
- 192. Valentino: Civico del granchio = (n. civico della stella +1)×2

<sup>25</sup> Solo dopo la trascrizione del diario mi sono resa conto che potevo indirizzarli alla relazione n. civico granchio=( n. civico stella+1) ×2 così come aveva già trovato Emma T.

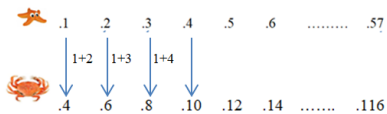
<sup>26</sup> La mia richiesta è davvero oscura. Non sono stata in grado di essere più chiara.

<sup>27</sup> So di averli aiutati troppo.

193. I: Come la possiamo spiegare? <sup>28</sup>

<sup>29</sup>

<sup>28</sup> Ho finito la lezione altrimenti avrei ripreso l'esempio:



per discutere loro la seconda soluzione proposta da Emma T. Purtroppo non avrò più tempo per continuare le osservazioni, il prossimo anno ripartirò da questa situazione problematica.

<sup>29</sup> Alcune osservazioni di fondo, partendo dalla considerazione che comunque l'insegnante è uno dei pochi che si è spinta così in avanti, affrontando situazioni problematiche che arricchiscono le sue competenze professionali proprio perché si è dovuta confrontare con i più importanti nodi di questa attività. Siccome è evidente che conosce molto bene l'Unità 12 mi limiterò a poche osservazioni, rimandando all'Unità stessa per gli approfondimenti.

A mio avviso i nodi sono questi:

- 1) È necessario porre gradualmente in luce che bisogna esprimere il numero della casa del granchio (per ora variabile dipendente) in funzione di quella della casa della stella (variabile indipendente); la conseguenza di questa scelta di base è che bisogna analizzare delle coppie di numeri: 1-4; 2-6; 3-8; 4-10 e così via; di conseguenza
- 2) nella tabella, come ho scritto nel Commento 21, si scrivono sin dall'inizio dei numeri che si dovranno porre in relazione fra loro, coppia dopo coppia.
- 3) Le relazioni contengono parti stabili e parti che cambiano: è necessario fissare le prime e mantenerle, ed esprimere le altre attraverso delle forme canoniche che riprendano le parti fisse delle prime. Siccome bisogna esprimere i numeri della casa dei granchi in funzione dei numeri delle case delle stelle (in pratica: la successione dei naturali a cominciare da 1), è necessario che questi ultimi diventino i 'protagonisti' delle rappresentazioni.
- 4) La relazione fra i numeri delle coppie è unica, indipendentemente dalla varietà formale delle sue possibili rappresentazioni; in questo senso andava supportata la frase di Valentino sulla Macchina Sputanumeri (145), che è capace di applicare una sola funzione fra i due numeri in entrata e in uscita. Questo avrebbe portato a guidare la classe a notare che la proposta di Aurora (147) non andava bene così com'era stata da lei formulata perché ogni scrittura era diversa dalle precedenti. Allo stesso tempo però la proposta conteneva numerosi spunti di interesse, che giustamente l'insegnante ha 'messo in frigorifero' e che io riprenderò nelle colonne viola.
- 5) La tabella che ho inserito nel Commento 21 si può quindi continuare in questo modo (non considerare per ora le ultime due colonne):

n. civico stella (s)	n. civico granchio dirimpettaio (g)						
	Aurora	Ginevra e Emma T (142)	Emma T (144)	Pietro (188)	Aurora		
1	4	1×3+1	1×2+2	(1+1)×2	1+1+2	1×3+1	1×3-(1-2)
2	6	2×3+0	2×2+2	(2+1)×2	2+2+2	2×3+0	2×3-(2-2)
3	8	3×3-1	3×2+2	(3+1)×2	3+3+2	3×3-(3-2)	3×3-(3-2)
4	10	4×3-2	4×2+2	(4+1)×2	4+4+2	4×3-(4-2)	4×3-(4-2)
5	12	5×3-3	5×2+2	(5+1)×2	5+5+2	5×3-(5-2)	5×3-(5-2)
...	...	...	...	...	...	...	...
57	116	?	57×2+2	(57+1)×2	57+57+2	57×3-(57-2)	57×3-(57-2)
...	...	...	...	...	...	...	...
s			s×2+2	(s+1)×2	s+s+2	s×3-(s-2)	s×3-(s-2)

- 6) Gli alunni dovrebbero capire che la scrittura finale si ottiene riflettendo sull'analogia strutturale fra le scritture.
- 7) Come hanno iniziato a fare gli alunni attraverso il linguaggio naturale (190, 192) bisogna completare le scritture conclusive della tabella inserendo il soggetto della frase (la variabile dipendente):  $g = s \times 2 + 2$ ,  $g = s + s + 2$ .
- 8) Si confrontano le due scritture, si fanno emergere i termini 'additivo' e 'moltiplicativo' e si conclude che sono equivalenti.
- 9) Si proporgono alcune particolarizzazioni, ad esempio: trovare, applicando la funzione, il numero di casa del granchio dirimpettaio della stella numero 864 (si applica il concetto di 'sostituzione').
- 10) Riprendendo ora la proposta di Aurora, il prossimo anno potreste ripartire da una tabella come questa ed esprimere i numeri non costanti in forma non canonica in funzione dei numeri di posto (v. penultima colonna viola).
- 11) Potreste poi ricavare, per analogia strutturale, le scritture delle prime due righe (v. ultima colonna viola) trovando che la seconda scrittura diventa strutturalmente identica alle altre nella forma  $2 \times 3 - 0$  (al posto di  $2 \times 3 + 0$ ) e ritrovando nella prima il numero relativo che avete già trovato:  $1 \times 3 - (-1)$ .
- 12) La ciliegina sulla torta potrebbe essere la 'dimostrazione' (anche con il tuo aiuto) che:  $s + s + 2 = s \times 3 - (s - 2)$ .  
 $s + s + 2 = s \times 3 - s + 2 \rightarrow s + s + 2 = s \times 3 - s + 1 + 2 \rightarrow s + s + 2 = s \times (3 - 1) + 2 \rightarrow s + s + 2 = s \times 2 + 2 \rightarrow s \times 2 + 2 = s \times 2 + 2$ .  
 Lo stesso potreste farlo per  $(s + 1) \times 2 = s \times 3 - (s - 2)$ .