Trenino: Dalla bilancia a piatti all'equazione

(Scuola Primaria: classe quarta-quinta – Scuola Secondaria: classe prima, seconda e terza)

Questo 'Trenino' è frutto di un lavoro collettivo, tra un gruppo di insegnanti di scuola primaria e secondaria dell'IC di Monteroni d'Arbia (SI) e alcuni esperti del progetto ArAl, avente l'obiettivo di trasferire alla didattica digitale principi teorici ed esperienze maturati nell'ambito del Progetto ArAl.

Il trenino affianca l'Unità 6: Navarra G., Giacomin A. 2003, *Dalla bilancia a piatti all'equazione.* Revisione scientifica di Nicolina Malara. Pitagora Editrice Bologna. Riferimenti teorici o di metodo concernenti il Progetto ArAl si trovano nelle Unità della Collana ArAl e nel sito www.progettoaral.it.

Tutte le attività sono accompagnate dalla richiesta ad ogni alunno di argomentare il proprio pensiero. Questa è la vera chiave di volta del Progetto e, come si vedrà in questa Guida, man mano che il grado di difficoltà delle situazioni proposte aumenta, ci si aspetta che l'argomentazione diventi sempre più articolata e completa. Per ogni situazione proponiamo due tipi di commenti:

- *Indicazioni di metodo per l'insegnante (in corsivo)*;
- una possibile argomentazione-tipo, che non tiene conto dell'età dell'alunno o degli alunni che la organizzano. Invitiamo l'insegnante a confrontarsi in precedenza con l'argomentazione che ritiene più 'desiderabile' relativamente alle competenze che intende verificare e a scegliere poi liberamente i modi che ritiene più adatti alla classe e all'età degli alunni.

Anche questo trenino, come gli altri del Progetto ArAl-DDI, fa riferimento ad una locomotiva costituita da un piccolo video che introduce le attività catturando la curiosità e l'attenzione degli alunni. Si invitano gli insegnanti a:
(1) presentare agli alunni, e far commentare, il video-locomotiva prima di passare ai vagoni;
(2) leggere la Guida per l'insegnante prima di portare i vagoni nelle classi

Attraverso le prime esperienze con la bilancia a piatti reale l'insegnante curerà che gli alunni comprendano che il suo uso non è mirato alla ricerca dell'equilibrio (tra l'altro molto difficile da ottenere sperimentalmente) ma che essa viene proposta come supporto per una rappresentazione simbolica che crei i presupposti semantici per l'introduzione del formalismo algebrico. La bilancia reale potrà essere messa da parte e sostituita, per esempio, con due pile di libri di uguale altezza o, addirittura, con due fogli di carta disposti a poca distanza l'uno dall'altro su un tavolo, che significheranno che *l'equilibrio, reso percepibile dall'orizzontalità, è la caratteristica saliente di tutta l'attività*. La bilancia e i suoi principi saranno, a questo punto, un modello di riferimento per rappresentare prima, e risolvere poi, situazioni problematiche sempre più articolate. Col tempo, l'insegnante guiderà a capire che l'equazione elaborata per risolvere un certo problema, in realtà, è un modello che rappresenta *una classe di problemi strutturalmente analoghi*. In questo modo la bilancia avrà svolto il ruolo di *traghetto semantico verso la generalizzazione*.

Occorre tener presente che, almeno nelle prime fasi di attività con la bilancia, sia essa artigianale o virtuale, gli aspetti matematici, che portano all'approccio alle equazioni, sono strettamente intrecciati a questioni che riguardano il mondo delle misure. Sarà quindi necessario trattare con accortezza alcuni passaggi delicati, quali l'uso delle 'marche' e il suo progressivo abbandono, il significato da attribuire alle lettere nelle rappresentazioni matematiche (la lettera non rappresenta un oggetto, ma un numero), la necessità, che deve essere riconosciuta dagli alunni, di isolare su un piatto della bilancia il peso sconosciuto per poterne determinare il valore.

Sarà opportuno aprire con gli alunni una riflessione collettiva anche sul fatto che l'incognita si può trovare indifferentemente sia a destra che a sinistra dell'uguale; a questo scopo si curerà anche il significato relazionale dell'uguale.

Per un approfondimento dell'impostazione metodologica di questi materiali rimandiamo al Progetto ArAl-DDI.

Locomotiva: Video

Si osserva il video.
Si chiede di descrivere accuratamente il suo contenuto.
Si chiede di interpretarlo spiegando quello che succede.
Possibili risposte (separare la descrizione dall'interpretazione)

1. Descrizione:

   Il video è diviso in due parti.

   Parte 1: 14 persone sono in piedi sui due bracci di un lungo tronco che fa da dondolo. Il tronco è inclinato verso sinistra: 8 sono sul braccio sinistro, 6 su quello destro. Parte di quelli che stanno sul braccio sinistro si sta spostando lentamente verso la parte destra del tronco, che sta più in alto.

   Parte 2: sono passati alcuni secondi. Il dondolo ha cambiato inclinazione: le 7 persone a destra ora sono in basso. Alcune di loro si stanno spostando lentamente verso sinistra e, quando quella più vicina alla metà la supera di poco, il dondolo cambia bruscamente inclinazione: la parte destra si alza provocando la caduta rovinosa di 10 persone.

2. Interpretazione:

   Nella prima parte il peso maggiore è distribuito sul braccio di sinistra (8 persone) e quindi il dondolo si inclina da quella parte; man mano che le persone si spostano verso destra si raggiunge l'equilibrio (questa situazione si può solo immaginare perché il video si interrompe; dovrebbero esserci 7 persone per parte, cioè i pesi dovrebbero essere più o meno uguali). Nella seconda parte, a causa dello spostarsi delle persone che stanno sul braccio destro verso sinistra, il peso si sposta, seppur di poco, fino a quando la persona più vicina alla metà sposta un piede a sinistra del fulcro e il baricentro viene a trovarsi così alla sua sinistra. La parte destra del dondolo si alza bruscamente e 6 persone cadono trascinando con sé altre 4.

Vagone 1: Il principio fondamentale della bilancia

<u>Obiettivo</u>: avvicinare gli alunni ad un equilibrio visibile attraverso la percezione dell'orizzontalità fra i piatti per arrivare all'enunciazione del principio fondamentale.

V1-1. I funghi raccolti da Ugo

"Sappiamo che i funghi pesano 200 grammi, quindi se si posano i funghi sul piatto di sinistra e il peso di 200g su quello di destra la bilancia deve stare in equilibrio, cioè i piatti devono essere orizzontali. Quindi la situazione è riprodotta dalla rappresentazione A".

V1-2. I funghi raccolti da Gina.

"Gina pesa i propri funghi: mette 4 funghi sul piatto di sinistra e un peso da 200 grammi su quello di destra. Poiché la bilancia è inclinata verso sinistra, non si sa quanto pesino esattamente i funghi di Gina, ma si sa che il loro peso è superiore a 200 grammi".

Se, prima di mostrare il vagone, l'insegnante ha già lavorato sulla rappresentazione delle situazioni con la bilancia, può chiedere la rappresentazione di questa situazione:

(f = peso dei funghi) f=200 (come si chiarisce nell'Unità nella scrittura dell'equazione non si inserisce la marca.

V1-3. Chi è il miglior raccoglitore di funghi?

"Dalle esperienze precedenti si sa che il peso dei funghi di Gina è maggiore di quello dei funghi di Ugo, quindi Gina fa bene ad essere sicura di vincere".

V1-4. Si pesano i funghi raccolti

"Rappresento una bilancia inclinata con il piatto di Ugo (7 funghi a destra) più in alto di quello di Gina (4 funghi a sinistra).

Ho disegnato la bilancia in questo modo perché sappiamo che i funghi di Ugo pesano 200 grammi e quelli di Gina pesano più di 200 grammi. Per questa ragione la bilancia pende verso il piatto di Gina".

V1-5. Ugo è uno che vuol sapere come stanno le cose

"Siccome il peso di 50 grammi mette in equilibrio la bilancia, significa che (*ci sono più risposte possibili*):

- la differenza tra i due pesi è di 50 grammi;
- i funghi di Gina pesano 50 grammi più di quelli di Ugo;
- il peso dei funghi di Gina è uguale alla somma fra il peso dei funghi di Ugo e 50 grammi.

In conclusione: Siccome si sa che i funghi di Ugo pesano 200 g, il peso dei funghi di Gina sarà di 250 g".

Ci si aspetta che gli alunni possano concludere che a maggior quantità (intesa come numerosità di funghi) non corrisponda un maggior peso.

Eventuale rappresentazione in linguaggio matematico (u = peso dei funghi di Ugo, g = peso dei funghi di Gina):

- g-u=50;
- g=u+50;
- g=u+50.

Con gli alunni più grandi si può anche presentare la scrittura u<g+50 e chiedere di interpretarla traducendola in linguaggio naturale.

V1-6. Ci si mette anche il papà

"Sappiamo che i funghi di Gina pesano più di quelli di Ugo. Quindi per raggiungere l'equilibrio i 50 grammi vanno aggiunti al piatto di Ugo".

Eventuale rappresentazione in linguaggio matematico (u = peso dei funghi di Ugo, g = peso dei funghi di Gina): Pensiero di Ugo: u+50=g; pensiero di Gina: u<g+50.

V1-7. Sul dondolo al parco

L'obiettivo di questa situazione è di consolidare sperimentalmente le basi del principio fondamentale: se la bilancia è in equilibrio allora i pesi dalle due parti sono uguali.

Gli amici dovrebbero mettersi in modo che la somma dei pesi di quelli che stanno a sinistra sia uguale alla somma dei pesi di quelli che stanno a destra.

Gli amici dovrebbero mettersi in modo che la somma dei pesi di quelli che stanno a sinistra sia uguale alla somma dei pesi di quelli che stanno a destra.

Il problema ammette più soluzioni, corrispondenti alle diverse distribuzioni degli amici sul dondolo:

a) 0 e 6: soluzione impossibile;
b) 1 e 5: soluzione discutibile o poco probabile: un amico dovrebbe pesare quanto 5 amici insieme;
c) 2 e 4: soluzione possibile;
d) 3 e 3: soluzione possibile purché la somma dei pesi di un gruppo sia uguale alla somma dei pesi dell'altro gruppo;
e) non si riesce a trovare l'equilibrio perché nessuna combinazione dei pesi, e quindi di distribuzione di questi sul dondolo, permette di raggiungere l'equilibrio. In questo caso, se l'argomento è stato trattato con gli alunni, si può ampliare la riflessione facendo ricorso alle leve di primo genere.

Stabilito che A = peso del ragazzo A, B = peso del ragazzo B, eccetera, la rappresentazione in linguaggio matematico delle situazioni potrebbe essere, ad esempio:

b) A=B+C+D+E+F
c) A+B=C+D+E+F
d) A+B+C=D+E+F

V1-8. I pesi nascosti

Anche questa situazione contribuisce ad introiettare il principio fondamentale: è l'orizzontalità del dondolo che permette di risalire all'equilibrio e quindi all'uguaglianza dei pesi.

Le relazioni sono: 1) A>B; 2) C=D; 3) E<F.

V1-9. Chi ha ragione?

"Alba fa bene ad essere sicura, anche se non vede cosa c'è dietro i paraventi, perché sa che, se l'asta è in equilibrio, per il principio fondamentale della bilancia i pesi alle estremità sono uguali".

V1-10. Cosa c'è dietro ai paraventi?

"Alba non è stata imbrogliata da Ivan. Il principio fondamentale dice che se un'asta è in equilibrio i pesi alle estremità sono uguali. Alba si è fatta ingannare dal diverso volume dei due oggetti e ha stabilito una sorta di proporzionalità diretta secondo cui a maggior volume corrisponderebbe un maggior peso. Il loro peso 'deve' essere uguale".

V1-11. Riflettiamo assieme

Alla fine di ogni vagone una slide propone una riflessione sul percorso svolto.

Scopo del docente in questo caso è quello di far ricostruire agli alunni il principio fondamentale della bilancia: se la bilancia è in equilibrio, allora nei piatti ci sono pesi uguali.

Possibile argomentazione:

"Entrambe le affermazioni sono vere, ma Mario non tiene conto che la bilancia si usa quando si vuole scoprire un peso che non si conosce, mettendolo a confronto con altri pesi noti ed è l'equilibrio della bilancia che permette di stabilire se i pesi sono uguali, come afferma Lucia".

Vagone 2: Il primo principio della bilancia

Obiettivo: favorire la comprensione del primo principio attraverso situazioni in cui si simula l'atto di spostare, togliere o aggiungere pesi.

V2-1. Il peso della pera

Tutte le situazioni di questo trenino poggiano su un supporto iconico in cui l'incognita è riferita, di volta in volta, visivamente, a funghi, a barattoli di salsa, a sacchetti di sale, ad un frutto, eccetera; è probabile quindi che, almeno inizialmente, gli alunni non facciano distinzione tra l'oggetto (per esempio un barattolo) e il suo peso. Questo punto, assai delicato, non va sottovalutato ma va sottolineato, in modo da rendere chiaro il significato del simbolo usato, iconico o letterale che sia. A questo scopo, quando si arriva, come in questa slide, alla rappresentazione simbolica delle situazioni esplorate, sarà importante che gli alunni indichino sempre e con precisione il significato della lettera usata (in questo caso p = peso in grammi della pera e non, genericamente, p = pera).

"Per il principio fondamentale della bilancia i due pesi sono uguali".

Eventuale rappresentazione in linguaggio algebrico: p=176.

V2-2. La bilancia si complica

È importante che l'insegnante faccia esplicitare ogni volta i principi applicati o sostituzioni effettuate.

"Poiché la bilancia è in equilibrio, il peso dei funghi sommato al peso di 50 g è uguale alla somma dei due pesi sul piatto di destra. Per trovare il peso dei funghi tolgo il peso da 50 g da entrambi i piatti, vedo che la bilancia è in equilibrio e scopro che i funghi pesano 200 g".

Eventuale rappresentazione e soluzione:

Ricordarsi di far esplicitare il significato della lettera: f = peso dei funghi

f+50=200+50 Per il primo principio tolgo 50g da entrambi i piatti. *Al momento opportuno si può parlare del 'principio di cancellazione', derivante dall'applicazione del primo principio della bilancia.*
f+50-50=200+50-50 Riscrivo quello che rimane
f=200".

V2-3. Confronto di strategie

"Laura vuole dire che Piero prima deve sostituire nel piatto di sinistra a 570 grammi due pesi, rispettivamente di 485 e 85 grammi, e in questo modo poi può applicare il primo principio della bilancia e togliere lo stesso peso di 85 g".

Si potrebbe anche guidare a dire che si sostituisce la forma canonica 570 con una sua forma non canonica, la somma 485+85. Questa nuova rappresentazione deve essere 'furba', fatta in modo cioè che uno dei due addendi sia uguale al peso nell'altro piatto.

Eventuale rappresentazione e soluzione:

Ricordarsi di far esplicitare il significato della lettera: b = peso delle banane

570=b+85 Sostituisco570 con 485+85
485+85=b+85 Applico il principio di cancellazione
485+~~85~~=b+~~85~~ Riscrivo quello che rimane
485=b.

È importante che gli alunni sappiano spiegare la ragione per cui si debbano togliere da entrambi i piatti 85g. In altre parole, devono avere chiaro che, siccome l'atto del misurare consiste nel mettere a confronto una grandezza sconosciuta con un'altra nota, che si assume come 'misura campione', per scoprire il valore di un peso sconosciuto è necessario ottenere l'equilibrio della bilancia isolando su un piatto solo l'oggetto di cui non si conosce il peso e ponendo sull'altro piatto solo pesi noti. Analogamente, e non a caso, la risoluzione di un'equazione comporta di isolare l'incognita. Solo in questo caso applicare delle sostituzioni o i principi di equivalenza (il primo e il secondo principio della bilancia), potrà acquistare un senso per gli alunni e non sarà l'applicazione meccanica di una regola.

V2-4. Il peso della farina

"Prima si sostituisce il peso di 120 g con due pesi, uno da 70g e uno da 50g, poi, applicando il primo principio, si tolgono i pesi da 50g da entrambi i piatti. Per il principio fondamentale della bilancia i pesi rimasti devono essere uguali, quindi il sacchetto di farina pesa 70g".

Eventuale rappresentazione e soluzione:

f+50=120 Sostituisco 120 con 50+70
f+50=50+70 Applico il primo principio
f+50-50=50+70-50 Riscrivo quello che rimane.
f=70.

V2-5. Barattoli di pomodoro

"Su un piatto della bilancia in equilibrio ci sono due barattoli uguali di pomodori, sull'altro c'è un barattolo di pomodori e un peso da 450g.

Sapendo che i barattoli di pomodori hanno tutti lo stesso peso, per il primo principio della bilancia è possibile togliere un barattolo da entrambi i piatti, questo vuol dire che i pesi rimanenti sono uguali, quindi un barattolo di pomodori pesa 450g".

Eventuale rappresentazione e soluzione:

p+p=450+p Applico il primo principio
p+p-p=450+p-p Riscrivo quello che rimane
p=450.

V2-6. Ancora barattoli di pomodoro

"Applicando il primo principio si toglie un barattolo di pomodoro dai due piatti, sul piatto di sinistra rimangono un barattolo e un peso da 50 g, su quello di destra un peso da 420g. Ora si sostituisce il peso da 420 g con due pesi, uno da 50g e uno da 370g. A questo punto, applicando ancora una volta il primo principio della bilancia, si toglie il peso da 50 g da entrambi i piatti, sulla bilancia in equilibrio rimangono il barattolo da una parte e un peso da 370 g dall'altra, quindi il barattolo pesa 370g".

Eventuale rappresentazione e soluzione:

p+p+50=420+p	Applico il primo principio
p+p+50-p=420+p-p	Riscrivo quello che rimane
p+50=420	Sostituisco 420 con 50+370
p+50=50+370	Applico nuovamente il primo principio
p=370.	

V2-7. Chi avrà ragione: Lietta o Mario?

Questa situazione intende verificare la comprensione del primo principio: Lietta si lascia ingannare dalla presenza di due pesi conosciuti nel piatto di sinistra e applica erroneamente il primo principio. Mario invece capisce che è sufficiente sommare i due pesi del piatto di sinistra e che in questo modo il problema è praticamente già risolto.

"Lietta sbaglia nell'applicare il primo principio e toglie 142g dal piatto di sinistra pensando di fare altrettanto da quello di destra con i pistacchi, senza rendersi conto che li toglie da un peso sconosciuto".

V2-8. Quanto peserà il modellino di automobile?

1. Un alunno in accordo con Alvise applicherebbe anche lui meccanicamente il primo principio. In realtà eseguirebbe semplicemente una sottrazione, lasciandosi fuorviare dal fatto che 320 sia maggiore di 285 senza comprendere né la situazione né il primo principio.

2. Un alunno in accordo con Roberto capisce che la bilancia non può stare in equilibrio poiché su un piatto c'è un peso da 285 e sull'altro la somma fra il peso della macchina e 320 non può essere uguale a 285g.

"Alvise applica il primo principio in una situazione impossibile. Non si accorge che la bilancia non potrebbe stare in equilibrio perché il peso a destra è maggiore di quello di sinistra. L'osservazione di Roberto è dunque corretta".

Eventuale rappresentazione (M = peso del modellino) 285<320+M oppure M+320>285.

V2-9. Una bella sfida

"Applicando il primo principio della bilancia tolgo un cubo per parte. Rimangono tre palline a sinistra e un cubo a destra. Un cubo pesa come tre palline".

Alcuni alunni potrebbero non saper rispondere alle domande b) e c) in quanto non individuano e non sanno esprimere le relazioni fra le due variabili.

a) Deduco che il peso di una pallina è un terzo del peso del cubo.
b) Il peso di un cubo è il triplo di quello di una pallina.
   Eventuale rappresentazione
   (c = peso del modellino): c=3p, p=1/3 c, p=c:3

V2-10. Gina e Ugo riflettono sul primo principio della bilancia

"La spiegazione di Gina è quella corretta, infatti è l'uguaglianza dei pesi a determinare l'equilibrio della bilancia. Ugo non tiene conto che oggetti uguali possono avere pesi diversi, ad esempio un barattolo di nutella vuoto pesa meno di un barattolo uguale, ma pieno".

Vagone 3: Il secondo principio della bilancia

<u>Obiettivo</u>: favorire la comprensione del secondo principio attraverso situazioni in cui si divide per uno stesso numero il contenuto di entrambi i piatti.

V3-1. Una costruzione di legno

Quando si tratta di applicare il secondo principio della bilancia può capitare che gli alunni, dovendo dimezzare, per esempio, il peso di due sacchetti di sale, o tripartire quello di tre barattoli di salsa o, come in questo caso, quadripartire il peso di 4 barattoli di nutella, procedano per sottrazione (tolgano gli oggetti dalla bilancia). Questa situazione è concepita proprio per indurre l'idea che è necessario dividere, in questo caso per 27, il peso di entrambi i piatti e distogliere l'attenzione dalla possibilità di togliere pesi.

"Il peso dei 27 cubetti è uguale a 1730 grammi. Per trovare il peso di un cubetto devo applicare il secondo principio della bilancia e dividere per 27 entrambi i pesi. Trovo che un cubetto pesa 64,07 grammi (o poco più di 64 grammi)".

V3-2. Gina e Ugo cuochi

"Se 150 bustine di sale pesano 2250 grammi perché i piatti della bilancia sono in equilibrio, per scoprire il peso di un sacchetto Gina e Ugo dividono il peso 2250 per 150".

V3-3. Ugo pesa la nutella

La situazione è strutturalmente simile alla precedente.

"Applico il secondo principio della bilancia e divido per 4 il contenuto di entrambi i piatti.

n = peso di un vaso di Nutella

4×n=1900 applico il secondo principio

4×n:4=1900:4 ricopio quello che rimane

n=475

Un vaso di Nutella pesa 475 grammi".

Potrebbe verificarsi che alcuni alunni che non hanno interiorizzato il secondo principio risolvano il problema in modo aritmetico dividendo per 4 il peso di 1900g.

Allo stesso modo accanto a scritture moltiplicative ('4×n=1900') è del tutto possibile che, nelle rappresentazioni degli alunni, compaiano scritture additive ('n+n+n+n=1900'). Occorrerà misurarsi anche con questi aspetti, ricercando insieme la rappresentazione migliore.

V3-4. Gina e i cetrioli

"Per trovare il peso di un vasetto di cetrioli applico il primo principio e tolgo un vasetto da entrambi i piatti. In questo modo rimangono il peso di 1360 grammi a sinistra e due barattoli a destra. Poi applico il secondo principio e divido per 2 il contenuto di entrambi i piatti.

c = peso di un vasetto di cetrioli

c+1360=c+c+c applico il primo principio

~~c~~+1360=c+c+~~c~~ scrivo quello che rimane in forma moltiplicativa

1360=2×c applico il secondo principio

1360:2=2×c:2 ricopio quello che rimane

680=c".

Gli alunni che continuano a vedere il problema da un punto di vista aritmetico potrebbero dividere 1360 per 3.

V3-5. Gina e Ugo golosi di gelati!

1) *Soluzione in cui si argomenta senza rappresentare:*

“Ugo e Gina devono applicare il primo principio e tolgono due barattoli di gelato per parte. Rimangono a sinistra 1075g e a destra due barattoli e 125g. Sostituiscono il peso di 1075g con due pesi, uno di 950g e uno di 125g. Applicano nuovamente il primo principio e tolgono 125g da entrambi i piatti. Rimangono 950g a sinistra e due barattoli a destra. Applicano il secondo principio e dividono per 2 il contenuto di entrambi i piatti. Rimangono a sinistra 475g e a destra un barattolo di gelato”.

2) *Rappresentazione algebrica:*

G = Peso di un barattolo di gelato
G×2+1075=G×4+125 Sostituisco 1075 con 950+125
G×2+950+125=G×4+125 Applico il primo principio (o il principio di cancellazione
G×2+950=G×4

a) Prosecuzione con passaggio ad una rappresentazione additiva:

G+G+950=G+G+G+G	Applico nuovamente il primo principio
~~G~~+~~G~~+950=G+G+~~G~~+~~G~~	Trascrivo quello che rimane
950=G+G	Inserisco le parentesi e applico il secondo principio
950:2=(G+G):2	Trascrivo quello che rimane
475=G	

a) Prosecuzione con mantenimento di rappresentazioni moltiplicative:

G×2+950=G×4	Applico il primo principio
G×2:2+950=G×4:2	Riscrivo ciò che rimane
950=G×2	Applico il secondo principio
950:2=G×2:2	Riscrivo ciò che rimane
475=G	

V3-6. Gina e Ugo discutono animatamente

“Gina non considera che, se in una bilancia in equilibrio, si modifica il peso di un solo piatto, la bilancia non potrà più essere in equilibrio, perché i pesi nei due piatti non saranno più uguali.
Ugo ha enunciato correttamente il Secondo Principio della bilancia: Se si dividono per uno stesso numero i contenuti dei piatti di una bilancia in equilibrio, essa rimane in equilibrio”.
Inoltre si aggiunge un ampliamento al secondo principio perché gli alunni si rendono conto che esso mantiene la sua validità anche quando si moltiplicano per numeri uguali il contenuto di entrambi i piatti.

Vagone 4: La rappresentazione della bilancia

Obiettivo: rappresentare la situazione problematica della bilancia per giungere all’organizzazione dell’equazione.

V4-1. Quale scrittura manderemo a Brioshi?

“Analizzo le rappresentazioni:
Aldo: Non usa una lettera per il peso sconosciuto dei funghi ma un gruppo di abbreviazioni; indica con la marca il peso di destra, e questo è sbagliato.
Rita: Usa la lettera ma indica anche lei con la marca il peso 200.
Piero: Non rappresenta l’equilibrio fra i piatti ma somma i pesi dei due piatti.
Serena: Usa correttamente una lettera per il peso sconosciuto dei funghi e non inserisce la marca nel piatto di destra.
f = peso dei funghi.
f = 200”.

V4-2. Il peso dei libri

"L = peso dei libri
A: L=1850 La bilancia è in equilibrio
B: L>1850 La bilancia non è in equilibrio perché i piatti della bilancia non sono allineati orizzontalmente; i libri hanno un peso maggiore perché il piatto su cui appoggiano è posto più in basso dell'altro
C: L<1850 La bilancia non è in equilibrio perché i piatti della bilancia non sono allineati orizzontalmente, i libri hanno un peso minore perché il piatto su cui appoggiano è posto più in alto dell'altro".

Sarà compito del docente concordare con gli alunni quando e come abbandonare l'unità di misura in rappresentazioni come questa.

V4-3. Tonno e fagioli

"Nella situazione in alto applico il primo principio e tolgo due scatole di tonno da entrambi i piatti. Rimangono una scatola di fagioli sul piatto di sinistra e tre scatole di tonno in quello di destra. In questo modo posso rispondere alla domanda.
T = Peso di una scatola di tonno
F = Peso di una scatola di fagioli"

(a) Rappresentazione additiva

F+T+T=T+T+T+T+T Applico il primo principio
$F+\cancel{T}+\cancel{T}=T+T+T+\cancel{T}+\cancel{T}$ Ricopio quello che rimane
F=T+T+T

(b) Rappresentazione moltiplicativa

F+2×T=5×T Applico il primo principio
F+2×T-2×T =5×.T-2×T Ricopio quello che rimane
F=3×T
Una scatola di fagioli pesa come tre scatole di tonno.

V4-4. Tonno e pomodoro

(a) Rappresentazione moltiplicativa

f = peso di un barattolo di fagioli
t = peso di una scatola di tonno
3×f=6×t Applico il secondo principio
3×f:3=6×t:3 Ricopio quello che rimane e applico a destra la proprietà distributiva
3f/3=6c/3 (rappresentazione alternativa)
f=2×t
Una scatola di fagioli pesa come due scatole di tonno".

(b) Non conviene ricorrere ad una rappresentazione additiva come questa:

f+f+f=t+t+t+t+t+t Inserisco le parentesi e applico il secondo principio
(f+f+f):3=(t+t+t+t+t+t):3
Il passaggio f=2×t risulterebbe del tutto opaco.

V4-5. Cubetti, sfere e zaino

1) *Soluzione in cui si argomenta senza rappresentare:*

"Dalla prima bilancia capisco che ai tre cubetti a sinistra corrisponde un peso di 600g, quindi ogni cubetto pesa 200g.
Nella seconda bilancia applico il primo principio e tolgo una sfera per parte. Rimangono due cubetti a sinistra e una sfera a destra. Siccome un cubetto pesa 200g, una sfera pesa 400g.
Nella terza bilancia a sinistra ci sono tre sfere che pesano in tutto 1200g. Concludo che, per il principio fondamentale, lo zainetto pesa 1200g".

2) *Rappresentazione algebrica:*

1^a bilancia:

c = peso di un cubetto

$c+c+c=100+500$	Utilizzo una rappresentazione moltiplicativa a sinistra e sostituisco 100+500 con la loro somma
$3\times c=600$	Applico il secondo principio
$3\times c:3=600:3$	Ricopio quello che resta
$c=200$	

Un cubetto pesa 200 grammi

2^a bilancia:

s = peso di una sfera

$s+c+c=s+s$	Applico il primo principio
$\cancel{s}+c+c=s+\cancel{s}$	Ricopio quello che rimane
$c+c=s$	Sostituisco c con il valore noto 200
$200+200=s$	
$400=s$	

Una sfera pesa 400 grammi

3^a bilancia:

z = peso dello zainetto

$3\times s=z$	Sostituisco s con il valore noto 400
$3\times 400=z$	
$1200=z$	

Lo zainetto pesa 1200 grammi.

L'insegnante potrebbe proporre un problema supplementare e chiedere di esprimere le relazioni fra i pesi in gioco che siano diverse da quelle precedenti. Gli alunni esplorerebbero la relazione diretta e inversa fra i pesi di:

- *Un cubetto e una sfera*
  Dalla seconda bilancia si ricava che il peso di una sfera è doppio di quello di un cubetto e che quello di un cubetto è la metà di quello della sfera
  Rappresentazioni algebriche: $s=2\times c$ *o* $c=s:2$ *o* $c=s/2$ *o* $c=\frac{1}{2}s$*… ecc.*
- *Un cubetto e lo zainetto*
  Poiché il peso di una sfera è doppio di quello di un cubetto, lo zainetto pesa come 6 cubetti e un cubetto pesa un sesto del peso dello zainetto.
  Rappresentazioni algebriche: $6\times c=z$ *o* $c=z:6$ *o* $c=z/6$*… ecc.*