

28/01/2021

1

Commenti [Insegnanti di classe](#)

Commenti [Insegnanti di classe \(AR+CS\)](#)

Commenti [Giancarlo Navarra](#)

### Presentazione della classe

Classe II (30 alunni) della scuola Secondaria I grado di Murlo dell'Istituto Comprensivo R. Fucini. La classe ha visto l'ingresso di tre nuovi alunni arrivati a novembre di cui uno straniero a cui è destinato un percorso di alfabetizzazione di base. Il gruppo si attesta generalmente su un buon livello sia nei confronti degli apprendimenti che delle relazioni interpersonali tra pari e con gli adulti.

### Descrizione della situazione proposta

Continuazione dell'attività sulla macchina sputanumeri iniziata da G. Navarra nella videolezione via meet del 20/01/2021.

Il focus dell'attività verte sulle diverse parafrasi di traduzione nel linguaggio naturale nel caso in cui la macchina sputanumeri associ al numero in entrata i seguenti valori:

input	output
1	5
2	9
3	13
10	41
...	...


Ai ragazzi viene consegnata una scheda che riporta tutte le formulazioni in linguaggio naturale da loro proposte, della generalizzazione "output=4\*input+1"; tale generalizzazione è stata individuata e condivisa in una lezione precedente alla registrazione.

Ambra	Il numero in entrata moltiplicato per 4 e sommato a 1 è il numero in uscita
Riccardo D.	Il numero di entrata viene moltiplicato per 4 e sommato a 1
Matilde	L'output è uguale all'input moltiplicato per 4 e sommando 1
Maya	Il numero in uscita è il quadruplo del numero in ingresso sommato a 1
Lyuba	Il numero in uscita è uguale al numero in entrata che forma il risultato
Flavio	L'output è uguale al quadruplo sommato a 1 dell'input
Edoardo	Il numero in uscita è il quadruplo del numero in entrata a cui aggiungo 1
Vahidin	Il numero d'uscita è uguale al numero di ingresso moltiplicato per 4 e aggiungendo 1 al risultato
Alice	Il numero in uscita è il risultato della moltiplicazione per 4 per il numero in entrata aggiungendo 1
Federico	Il numero in uscita è il numero in entrata moltiplicato per 4 e sommato a 1
Francesco	Il numero in uscita è il quadruplo sommato a 1 del numero in entrata
Rachele	Il numero in uscita è il quadruplo del numero in entrata a cui viene sommato 1
Walid	Il numero in uscita è il numero in entrata modificato 4 più 1
Giulia	Il numero in uscita è il quadruplo sommato a 1 del numero in entrata
Adnan	L'output è l'input moltiplicato 4 volte aggiungendo 1
Caterina	Il numero in uscita è il numero in entrata moltiplicato per 4 e sommato a 1
Carlotta	L'output è il quadruplo dell'input sommato a 1
Riccardo I.	Il numero in uscita è quattro volte il numero in entrata più 1
Francesca	Il numero in uscita è la somma tra il prodotto del numero in entrata e 4 e 1
Chiara	Il numero in uscita è una unità maggiore rispetto al quadruplo del numero in entrata

1. I: Ragazzi, come vedete non abbiamo riportato le **formulazioni**<sup>1</sup> nell'ordine in cui le avete dettate ma **abbiamo operato dei raggruppamenti**<sup>2</sup>; siete in grado di individuarli?

1 Il confronto tra le varie parafrasi dei ragazzi è proposto come strumento di riflessione e di miglioramento delle abilità di traduzione nel registro del linguaggio naturale.

2 L'intento è stato quello di velocizzare il lavoro senza appesantirlo con l'obiettivo di focalizzare l'attenzione sulle parafrasi migliori. Di fatto, gli alunni devono confrontare venti frasi, non poche. In generale, la mia esperienza mi porta a nutrire delle perplessità quando vengono proposte **tutte** le loro frasi perché il confronto, per molti, rischia di diventare pesante e quindi gestibile a fatica. In questi casi, in genere, suggerisco di proporre una o più selezioni formate da cinque o sei frasi, programmate dal docente secondo obiettivi in parte intrecciati e in parte diversificati. In questo caso i vostri obiettivi, così come emergono dal diario, sono: far riflettere (a) sulla relazione fra numero in entrata e numero in uscita,

 progetto <b>ArAl</b>		2020/21	Macchina sputanumeri						1	
Monteroni (SI)	I	1	2	3	4	5	1	2	3	Alfonso Riva, Claudia Santoni

2. Andrea: Quasi tutte iniziano con “Il numero in uscita è...”
3. Aurora: Però ce ne sono due che iniziano con “il numero in entrata è...”<sup>3</sup>
4. I: Effettivamente il primo criterio che abbiamo seguito è stato quello di separare le formulazioni che iniziano con partenze diverse. E tra le formulazioni che iniziano con “il numero in uscita è...” o “l’output è...” ce ne sono alcune migliori di altre?<sup>4</sup>
5. Vahidin: Quella di Francesca usa “la somma...”
6. I: Bravo! Leggi la formulazione per intero.
7. Vahidin: Il numero in uscita è la somma tra il prodotto del numero in entrata e 4 e 1.
8. I: Ci piace questa formulazione perché è una formulazione da grandi. Invece che dire “faccio il quadruplo e poi aggiungo uno” o simili, preferiamo la dicitura: la somma tra quattro volte il numero in entrata e 1<sup>5</sup>... C’è un’altra scrittura un po’ diversa dalle altre... si è prenotato sempre Vahidin.
9. Vahidin: Quella di Chiara! “Il numero in uscita è una unità maggiore rispetto al quadruplo del numero in entrata”.
10. I: Sentite... “è di una unità maggiore”; vi viene in mente un altro modo per esprimere la formulazione di Chiara?
11. Vahidin: Una unità maggiore del quadruplo.

e loro posizione all’interno della frase; (2) su definizioni relazionali e procedurali; (3) sull’importanza di usare termini alti come ‘quadruplo’. Ritorno su questi tre obiettivi nel Commento 4 (riga 4).

3 A posteriori, proprio nella trascrizione del microdiario, ci si accorge che non è stata colta la possibilità di far riflettere i ragazzi su due aspetti:

- 1) l’implicita intenzione dell’insegnante di optare per traduzioni “più fedeli” alla scrittura in linguaggio matematico, che leggono l’uguaglianza da sinistra verso destra;
- 2) l’opportunità di esplorare la differenza tra variabile indipendente e variabile dipendente.

4 Sarebbe stato interessante guidare la classe a riflettere sui due diversi punti di vista – anche nominandoli in quanto tali: relazionale e procedurale - in modo da far vedere come le descrizioni procedurali siano riconoscibili in quanto tali perché sono sequenziali, cioè rispettano l’ordine di esecuzione delle operazioni; per esempio le prime due:

(Ambra) “Il numero in entrata moltiplicato per 4 e sommato a 1 è il numero in uscita”.

(Riccardo D) “Il numero di entrata viene moltiplicato per 4 e sommato a 1”.

Le altre diciotto si concentrano sul numero in uscita, riconoscendo in esso il soggetto della frase. Non so però se sia chiaro agli alunni che questa scelta deriva non tanto da una lettura sinistra → destra, quanto dalla necessità di esprimere il numero in uscita (soggetto della frase) in funzione di quello di entrata (predicato della stessa frase) e non viceversa. Questo porterebbe a far emergere i concetti di variabile indipendente e dipendente, come avrebbe voluto fare l’insegnante.

Inoltre, sarebbe importante far riflettere che queste diciotto frasi, pur avendo come soggetto l’output, sono solo parzialmente relazionali, in quanto molte di esse esprimono, a ben guardare, un retro-pensiero procedurale; ad esempio:

(Lyuba): “Il numero in uscita è uguale al numero in entrata che forma il risultato”.

(Edoardo): “Il numero in uscita è il quadruplo del numero in entrata a cui aggiungo 1”.

(Vahidin): “Il numero d’uscita è uguale al numero di ingresso moltiplicato per 4 e aggiungendo 1 al risultato”.

(Alice): “Il numero in uscita è il risultato della moltiplicazione per 4 per il numero in entrata aggiungendo 1”.

In realtà, come correttamente mette in evidenza Vahidin (5), solo la frase di Francesca è relazionale ‘in senso stretto’ in quanto esprime l’oggetto come ‘somma’: “Il numero in uscita è la somma tra il prodotto del numero in entrata e 4 e 1”.

In questo caso sarebbe stato effettivamente preferibile che l’insegnante (che esprime questo rammarico nel Commento 5, r.8), anziché chiarire lui l’importanza dell’osservazione di Vahidin, invitasse l’alunno stesso a provare ad argomentare perché la frase di Francesca è la ‘migliore’. In questo modo, esaltando collettivamente, come passo successivo, le frasi contenenti il termine ‘quadruplo’, la classe sarebbe giunta alla definizione più ‘colta’: “Il numero in uscita è il consecutivo del quadruplo del numero in entrata”, anticipando l’osservazione di Chiara (16). Sulla differenza tra ‘successivo’ e ‘consecutivo’ intervengo nel Commento 10 (r. 29).

Un’ultima considerazione (per la mia esperienza non marginale): una rappresentazione formale del prodotto con il simbolo ‘×’, invece che con il puntino, favorisce l’individuazione del prodotto. Forse perché il ‘×’ è annidato nell’epistemologia matematica degli alunni. Inoltre mi chiedo perché la rappresentazione formale si sia fermata alla forma linguisticamente ibrida ‘output=4•input+1’ e non sia proseguita verso una come ‘o=4×i+1’, preceduta naturalmente dall’esplicitazione dei significati di ‘o’ e ‘i’. (AR+CS) Gli alunni sono abituati, nella parte esplicita del contratto didattico con gli insegnanti, ad utilizzare il simbolo ‘•’ per l’individuazione del prodotto fin dalla classe I della Scuola Secondaria di I grado; all’inizio si cavalca il gioco “siamo diventati grandi”, con il passare del tempo l’uso del nuovo simbolo permette di evitare sovrapposizioni o confusioni con l’utilizzo della lettera ‘x’ per indicare numeri nascosti, generalizzazioni presenti fin da subito nel libro di testo “Contaci”. I ragazzi sembrano non trovare difficoltà a sostituire la nuova simbologia proposta. Effettivamente è mancata la rappresentazione formale nel linguaggio algebrico ‘o=4×i+1’.

5 Non è stato chiesto a Vahidin di motivare la sua scelta (andava fatto), perché d’istinto si è scelto di distinguere le due formulazioni preferendo quella relazionale a quelle più procedurali. Qui e più avanti (riga 26) viene fatto riferimento alla distinzione tra parafrasi più “da piccoli” e più “da grandi”, con l’intento di indurre una riflessione metacognitiva.

12. I: Se la macchina facesse solo il quadruplo avrei... (l'insegnante scrive alla lavagna):<sup>6</sup>

Con 1 avrei 4 Con 2 avrei 8 ecc.
--

Invece la macchina cosa fa? Quali sono i numeri in uscita?

13. Vahidin: Con 1 se faccio solo il quadruplo ho 4; aggiungo 1 e ho 5; con 2 se faccio solo il quadruplo ho 8; aggiungo 1 e ho 9...

14. I: Ottengo una tabella di questo tipo:

<b>n</b>	$4n+1$
4	5
8	9
12	13
...	...

15. I: Torniamo alla riflessione sulla formulazione di Chiara; possiamo dirlo in un altro modo? La domanda è per tutti. Guardate... il quadruplo è questo, invece la macchina sforna quest'altro numero. Chiara, cosa dici?

16. Chiara: Il successore... il successivo.<sup>7</sup>

17. I: Brava, è il successivo... è il successivo di 4, è il successivo di 8, è il successivo di 12. Seguiamo il suggerimento di Chiara, provate a riformulare tutta la frase completa: "il numero in uscita è ..."<sup>8</sup>

18. Lavoro degli alunni.

19. I: Victoria leggi la frase che hai fatto. Hai sfruttato la parola 'successivo'?

20. Silenzio.

21. I: Proprio niente... Emmanuel? Andrea?... Oddio... Ambra?... Enrica?

22. Enrica: Il numero in uscita è il successivo del quadruplo del numero in entrata.

23. I: Allora... è molto buona questa formulazione!<sup>9</sup> Guardando là (nell'altra parte dell'aula rispetto ai tre ragazzi che non hanno risposto) l'hanno scritta in parecchi, pensavo venisse naturale; Victoria, Emmanuel o Andrea con questa formulazione vi ritrovate?

24. Ragazzi: Sì.

25. I: Perché... guardate, posso dire un'altra cosa? Se nascondete 'è il successivo' viene che 'il numero in uscita è il quadruplo del numero in entrata' ma la macchina non fa questo. Sappiamo, come ci ha suggerito Chiara, che 'il numero

<sup>6</sup> La risposta di Vahidin mi induce a fermare (purtroppo) troppo presto la sua proposta e a disegnare alla lavagna la rappresentazione tabulare di una macchina che faccia solo il quadruplo, per rendere ancora più evidente la differenza su come agisce la macchina oggetto della lezione; ascoltando le registrazioni mi rendo conto di catalizzare troppo il centro dell'attenzione della lezione forse anche con il timore che ci siano deviazioni rispetto all'obiettivo a discapito dello scambio tra pari. Mi sembra che, oltre a quelli evidenziati dall'insegnante, ci siano altri tre aspetti riferibili a diversi livelli di criticità: (1) nella tabella, così com'è scritta, c'è una contraddizione tra il scrittura generale  $4n+1$  e i valori sottostanti 5, 9, 13, che corrispondono a  $n+1$ , e non a  $4n+1$ . (AR+CS) Nella prima colonna della tabella menzionata, la cui intestazione è stata erroneamente indicata con  $n$ , sono riportati i valori del quadruplo del numero in ingresso (l'intestazione corretta sarebbe stata  $4n$  o  $4i$ ); concordiamo che ciò che ci è sembrato funzionale in quel momento (frazionamento delle operazioni della macchina) possa aver distolto l'attenzione dalla visione della legge nella sua globalità. Gli alunni hanno colto il 'carattere provvisorio' di questi numeri? Non ne sono sicuro; (2) ritengo necessario che gli alunni capiscano un po' alla volta che devono cercare di esprimere il numero in uscita in funzione di quello di entrata; non so se sia efficace spezzettare, per così dire, quello che fa la macchina. È più potente il controllo sperimentale effettuato dagli stessi alunni: facendo fare alla Macchina quello che suggerisce uno di loro si ottiene l'output indicato? Se sì, allora potrebbe essere la risposta giusta (salvo verifiche), se no i ragazzi, autonomamente, capiscono che devono continuare a cercare; (3) concordo sulla catalizzazione. Credo che possano essere state non sufficienti le indicazioni su cosa dovessero trovare gli alunni, e quindi che l'insegnante sia intervenuto in modo forse eccessivo, pilotando l'attenzione della classe e impoverendo l'aspetto della devoluzione, cioè che non abbia favorito l'assunzione di responsabilità da parte degli alunni nei confronti del problema proposto.

<sup>7</sup> La risposta di Chiara lascia solo intravedere che lei ha dei ricordi sul nome del numero 'che viene dopo'; in realtà, però, il termine corretto è 'consecutivo' (problema che fra poco (28) aprirà Francesco).

<sup>8</sup> Ritengo che l'insegnante 'piloti' in modo eccessivo gli alunni verso la sua linea di pensiero, spostando così la loro riflessione dal problema matematico (esprimere l'output in funzione dell'input) allo sforzo di interpretare le attese dell'insegnante. Questo equivoco, secondo me, spiega lo smarrimento degli alunni (e dell'insegnante) (18-21).

<sup>9</sup> Anche qui inviterei a coinvolgere la classe nell'interpretazione della frase di Enrica, chiedendo per esempio ad uno solo di loro alla volta: "Cosa ne pensi della frase di Enrica? Ti pare corretta?". Sappiamo che le domande collettive del tipo "Vi ritrovate?", aventi come risposta corale "Sì", rassicurano ma sono poco significative.

		2020/21	Macchina sputanumeri						1	
Monteroni (SI)	I	1	2	3	4	5	1	2	3	Alfonso Riva, Claudia Santoni

in uscita è una unità maggiore...'; questo modo di esprimersi direi che è un po' più da scuola elementare, quando lavoriamo con unità, decine ecc; alle scuole medie sappiamo benissimo che dato un numero, per esempio il numero 4, il suo successivo è 5, mentre 3 che numero è?

26. Ragazzi: Precedente.

27. I: Benissimo, questi termini ce li dobbiamo ricordare: 'Successivo' aggiungo 1 ad un numero, 'precedente' tolgo 1. C'era Francesco che voleva fare una domanda.

28. Francesco: 'Consecutivo' va bene per indicare un numero successivo?

29. I: È una domanda tosta<sup>10</sup>, nel senso che mi viene da pensare che può essere considerato come un sinonimo se lo usi al singolare; il consecutivo è il numero che viene immediatamente dopo un altro; normalmente in aritmetica si usa il termine "successivo" come stiamo facendo noi. Oppure possiamo utilizzare il termine consecutivo al plurale: consecutivi sono i numeri... che ne so... 13-14-15. Più spesso il termine consecutivo viene utilizzato in ambito geometrico: un lato consecutivo ad un altro, intendendo che viene immediatamente dopo... etc.... però direi di sì. Troviamo la conclusione di questo lavoro. Siamo arrivati alla buona formulazione "Il numero in uscita è la somma tra il quadruplo del numero in ingresso e uno" oppure, una formulazione più elegante "Il numero in uscita è il successivo del quadruplo del numero in entrata". Siamo contenti se siete entrati dentro a questo lavoro che abbiamo sviscerato abbastanza bene. Intendo che arrivare a dire "Il numero in uscita è il successivo del quadruplo del numero in entrata" non è una cosa banale.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> Direi che in aritmetica la questione possa essere impostata in modo chiaro facendo anche riferimento al linguaggio naturale, ricco di sfumature ma anche di incertezze. Per esempio: se un collegio docenti è fissato per 'il giorno successivo alla fine della scuola', e la scuola finisce di giovedì, si intende parlare del giorno seguente, cioè del venerdì. Spesso però, per chiarezza, si preferisce aggiungere un 'immediatamente': per 'i giorni immediatamente successivi al primo del mese' si intende parlare, genericamente, del 2, del 3, o anche del 4. Ma si può anche dire: "Ci sentiamo lunedì o uno dei giorni successivi", e qui la questione è più sfumata, perché ognuno può interpretare il termine 'successivi' a modo suo. In matematica – si può dire agli alunni - si preferisce la chiarezza, quindi: se parliamo di 15, tutti i numeri naturali maggiori sono ad esso successivi; tra questi, solo 16 è definibile come suo consecutivo. Ma - potrebbe continuare l'insegnante - questo termine è polisemico: è usato anche – come ricorda l'insegnante - con i segmenti, oppure con i termini di una proporzione. Gli alunni sono educati a capire che il significato di un termine va posto in relazione al contesto in cui lo si usa in quel momento.

<sup>11</sup> **Concordo del tutto con questa conclusione, ma aggiungo una considerazione.** In termini generali, ritengo che non dovrebbe essere l'insegnante a tirare le fila della lezione; dico questo facendo riferimento ad un costrutto importantissimo della teoria delle situazioni di Brousseau, il concetto di validazione: è il momento in cui l'insegnante attiva opportune pratiche per raggiungere la convinzione che un certo esito risponda davvero agli obiettivi che si era prefigurato. La validazione avviene quando un alunno manifesta alla classe ciò che gli è rimasto una volta compiuta l'esperienza; la chiave di volta di questa fase è la capacità di argomentare su questi aspetti accettando l'invito dell'insegnante a farlo pubblicamente, spiegando cioè ai compagni la propria idea. In questo modo l'alunno si impegna a trasformare – in base alle sue capacità – un sapere personale, per così dire privato, in qualcosa di comunicabile, che diventa quindi pubblico. In didattica della matematica questa fase è di straordinaria importanza: senza di essa – afferma Brousseau - l'apprendimento matematico non è realizzabile. (AR+CS, riferimento alle parti dei commenti di Navarra evidenziati in celeste) Come ravvisato nel commento 6, nella trascrizione del diario ci è risultata evidente una conduzione eccessivamente pilotata che ha ostacolato gli alunni nel prendersi la responsabilità delle proprie affermazioni impedendo la validazione delle stesse. (Rif. commenti 8 e 11).

22/03/2021

1

Commenti [Insegnanti di classe \(AR+CS\)](#)

Commenti [Giancarlo Navarra](#)

### Descrizione della situazione proposta

Lavoro sulla MSN che fornisce in uscita il successivo del quadrato del numero in ingresso.

L'attività verte sull'individuazione per tentativi della legge, la sua formulazione in linguaggio matematico e naturale.

1. I: Ecco la nuova MSN (viene mostrata ai ragazzi la rappresentazione tabulare). Realizzate la solita tabella sul quaderno; per ora abbiamo che il numero in entrata è 0 e il numero in uscita è 1; fate le vostre ipotesi.
2. Riccardo viene alla lavagna a proporre la sua ipotesi:  $o=i+1$ .
3. I: Riccardo ricordi come abbiamo lavorato? **Prima della generalizzazione verifichiamo con dei calcoli.**<sup>12</sup>
4. Riccardo scrive alla lavagna due ipotesi:  $0+1=1$  e  $0 \cdot 0+1=1$ .
5. Vahidin e altri studenti propongono:  $0^2+1$ .
6. I: Fatemi capire meglio, questa qui che ha proposto anche Vahidin, ' $0^2+1$ ', è un'altra?
7. Aurora, Vahidin e altri studenti: È la stessa.
8. I: La devo scrivere?
9. Riccardo: Secondo me no.
10. I: Ci sono altre ipotesi?
11. Gabriele:  $0 \cdot 1+1$  (viene a scrivere alla lavagna).

<b>i = n. in ingresso</b> <b>o = n. in uscita</b>	<b>i</b>	<b>o</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

$0+1=1$     $0 \cdot 0+1=1$   
 $0^2+1=1$

12. I: **Ok, allora provo ad andare avanti: entra 1, esce 2.**<sup>13</sup>
13. *Brusio.*
14. I: Ci si prenota alzando la mano, direi che si viene qui, così si può scrivere alla lavagna e si parla a tutti; Riccardo ti sei prenotato, vieni.
15. Riccardo: Volevo soltanto dire che potrebbe essere una di quelle sopra.
16. I: Ok, ma come abbiamo fatto prima verifichiamo intanto se con 1 in ingresso funzionano le vostre ipotesi.
17. Riccardo *scrive alla lavagna*: Funzionano.
18. I: Abbiamo verificato le vostre tre ipotesi; anche per il numero 1, vanno bene tutte e tre.

*12 Riccardo è partito immediatamente dalla generalizzazione; l'indicazione data è stata quella di esplorare prima i valori in gioco. Sugerirei, in casi come questo, quando un alunno propone subito la generalizzazione, di chiedergli di spiegare come ha fatto ad arrivarci. Molto spesso la 'fretta di arrivare alla generalizzazione' opacizza il processo mentale e nasconde una comprensione debole del concetto di generalizzazione. In base alla nostra esperienza questo succede con i ragazzi più 'veloci', che pensano di non dover perdere tempo e si limitano ad esibire il prodotto mentale. Se la risposta assomiglia a pur corretti "Il numero in uscita è uguale alla somma fra il numero in entrata più 1" oppure "Il numero in uscita è il successivo del numero in entrata" Riccardo ha le idee molto chiare, e allora l'insegnante può chiedere la sua collaborazione per far capire anche ad altri ciò che lui ha capito. Se risponde qualcosa di superficiale come "Aggiungo 1 a 0" allora vale quello che ho scritto prima.*

<sup>13</sup> *La riflessione collettiva sui linguaggi e le rispettive traduzioni, in particolare da (38) in poi, si svolge ad un livello alto, frutto di competenze ben costruite dagli insegnanti in chiave early algebra. Ma vorrei fare delle considerazioni sul modo in cui la classe è arrivata alla legge generale ' $o=i^2+1$ '.*

*Com'è noto, lo scopo dell'uso della MSN è quello di scoprire come essa opera sul numero in ingresso per produrre il numero in uscita: gli alunni devono quindi esprimere la relazione che collega le due variabili. La relazione che si evince dalle proposte di Riccardo, Vahidin e altri (4) e (5) dovrebbe essere rappresentata nella parte centrale della MSN con il solo '+1', perché è così che 'funziona' la MSN: Cosa 'fa'? Emerge una prima ipotesi '+1'. Essi, invece, intuiscono sì la relazione '+1' ma non la isolano come rappresentazione dell'operato della MSN (come richiederebbe il 'protocollo del suo funzionamento'), ma la inseriscono subito all'interno di frasi complete ( $0+1=0$ ,  $0 \cdot 0+1=1$ ,  $0 \cdot 1+1=1$ ). Qui cominciano a confondersi le acque perché, l'attenzione si sposta – in modo improprio - dalla relazione tra le variabili ai modi diversi di rappresentare la variabile '0' in ingresso; questo non solo opacizza ciò che fa la macchina ma, nel prosieguo dell'attività, influenzerà negativamente la conquista della legge ' $o=i^2+1$ '. Inoltre: perché mantenere tante ipotesi uguali nella sostanza di ciò che fa MSN ('+1'), e diverse soltanto per le forme del numero in entrata, che però ora non interessano, e sulle quali invece si è concentrata l'attenzione della classe? (Fine prima parte. Proseguo nel commento 15).*

i = n. in ingresso o = n. in uscita	i		o
	0	$0+1=1$ $0 \cdot 0+1=1$	1
	1	$0+1+1=1$ $1+1=2$ $1 \cdot 1+1=2$ $1 \cdot 1+1=2$	2
	-		-
	-		-

19. I: Andiamo a scoprire che cosa succede facendo entrare un altro numero: entra 2 esce 5.  
 20. *Esultazione di Riccardo.*  
 21. I: Scusate, volevo suggerire di aiutare la leggibilità attribuendo colori diversi ai numeri in ingresso e ai numeri in uscita.<sup>14</sup>  
 22. *Gabriele viene alla lavagna e aiuta il cambiamento dei colori proposto.*  
 23. I: Evidenziamo anche le tre ipotesi con colori diversi.  
 24. Gabriele: Per la prima ipotesi  $2+1=3$  e non va bene. Ci si mette una x sopra. Anche per la terza  $2 \cdot 1+1=3$  e non va bene.  $2 \cdot 2+1=5$ , questa va bene.<sup>15</sup>

i = n. in ingresso o = n. in uscita	i		o
	0	$0+1=1$ $0 \cdot 0+1=1$	1
	1	$0+1+1=1$	2
	2	$1+1=2$ $1 \cdot 1+1=2$ $1 \cdot 1+1=2$	5
	-	<del><math>2+1=3</math></del> <del><math>2 \cdot 1+1=3</math></del> $2 \cdot 2+1=5$	-
	-		-

25. I: Se entra 3, esce? Facciamo altre verifiche:  
 26. Vari: Se entra 3 esce 10; se entra 4 esce 17; se entra 5 esce 26.  
 27. *Gli studenti tutti assieme centrano i numeri in uscita.*

*14 Le scritture monocolori rendevano difficile l'attribuzione dei calcoli alle tre diverse ipotesi.*

*15 Qui si manifesta l'influenza negativa dell'impostazione data al lavoro alla quale ho accennato nel commento 13. Quando viene proposta la terza coppia (2→5) la classe esclude due ipotesi ('2+1=3' e '2·1+1=3') e ne mantiene solo una ('2·2+1=5'). Ma in base a quale ragionamento la mantiene? Perché vede una somiglianza con '0·0' e '1·1':*

$0+1=1$	$0 \cdot 0+1=1$	$0 \cdot 1+1=1$
$1+1=2$	$1 \cdot 1+1=2$	$1 \cdot 1+1=2$
$2+1 \neq 5$	$2 \cdot 2+1=5$	$2 \cdot 1+1 \neq 5$

*In altre parole: il prodotto '0' emerge non come operazione che fa MSN prima di aggiungere 1, ma come caratteristica interna ad una delle rappresentazioni del numero d'ingresso. Questo si ripete con '1' e con '2'.*

*Un corretto svolgimento del compito avrebbe portato a queste rappresentazioni:*

Coppia	Cosa fa MSN	verifica
$0 \rightarrow 1$	$+1$	$0+1=1$
$1 \rightarrow 2$	"	$1+1=2$
$2 \rightarrow 5$	"	$2+1 \neq 5$
	$\times 2+1$	$2 \times 2+1=5$
	"	$0 \times 2+1=1$
	"	$1 \times 2+1=3$
$3 \rightarrow 10$	"	$3 \times 2+1 \neq 10$
	"	$3^2+1=10$
$i \rightarrow o$		$i^2+1=o$

*Ipotesi iniziale '+1'. La si verifica con una seconda coppia.*

*L'ipotesi è confermata. La si verifica con una terza coppia.*

**L'ipotesi non è confermata, se ne formula un'altra.**

*L'ipotesi '×2+1' sembra confermata, la si verifica sulle coppie precedenti:*

*Verifica sulla coppia 0, 1: OK.*

*Verifica sulla coppia 1, 2: OK. La si verifica per sicurezza con una quarta coppia.*

**L'ipotesi non è confermata, se ne formula un'altra.**

*L'ipotesi 'numero moltiplicato per se stesso' o 'quadrato del numero' funziona per tutte le coppie.*

*Si ricava per analogia strutturale la legge generale (può essere anche 'i·i+1=o').*

*In conclusione: la legge come prodotto del numero per se stesso (o come quadrato) è corretta, ma il processo degli alunni per individuarla è concettualmente sbagliato.*

28. I: Un altro numero che non sia ora subito nella successione dei naturali?  
 29. Vahidin: Se entra 10 esce 101.  
 30. I: Se entra genericamente il numero  $i$ , cosa esce?<sup>16</sup>  
 31. Gabriele:  $i \cdot i + 1$  oppure  $i^2 + 1$ .  
 32. I: Bene, vieni a scrivere.  
 33. Gabriele scrive sotto il numero 101:  $o = i \cdot i + 1$ .  
 34. I: Però  $o$  è già nell'intestazione della colonna; aspetterei a scriverlo.<sup>17</sup>  
 35. Gabriele *corregge*:  $i \cdot i + 1$  e sotto  $i^2 + 1$ .

$i = n$ . in ingresso $o = n$ . in uscita	$i$		$o$
	0	$0 + 1 = 1$ $0 \cdot 0 + 1 = 1$	1
	1	$1 + 1 = 2$	2
	2	$1 + 1 = 2$ $1 \cdot 1 + 1 = 2$	5
	3	$1 \cdot 1 + 1 = 2$	10
	4	<del><math>2 + 1 = 3</math></del> $2 \cdot 2 + 1 = 5$	17
	10	<del><math>2 + 1 = 3</math></del>	101
	$i$		$i \cdot i + 1$ $i^2 + 1$

36. I: Formuliamo correttamente la legge prima in linguaggio matematico. Ragazzi igienizziamo le mani!  
 37. Aurora scrive alla lavagna:

$$o = i^2 + 1.$$


38. I: Io a quella 'o' ci faccio sempre una svirgolina per distinguerla chiaramente dal numero 0.  
 39. Aurora segue il suggerimento e scrive:<sup>18</sup>

Il numero in uscita è uguale alla somma tra il quadrato del numero in ingresso e il suo successivo.

$o = i^2 + 1$   
 IL NUMERO IN USCITA È UGUALE  
 ALLA SOMMA TRA IL QUADRATO  
 DEL NUMERO IN INGRESSO E IL  
 SUO SUCCESSIVO

40. I: si sono alzate tre mani contemporaneamente (Enrica, Francesca, Riccardo); propongo a questi tre di uscire un attimo e accordarsi su uno o più interventi.<sup>19</sup>  
 41. Si avvicinano i tre.  
 42. Enrica: Il numero in uscita è uguale al successivo del quadrato del numero in ingresso.<sup>20</sup>  
 43. I: Scriviamo e confrontiamo... Si è bloccata la LIM.  
 44. Ilarità diffusa.

<sup>16</sup> Gli studenti hanno individuato nella seconda ipotesi il funzionamento della MSN; si è ritenuto necessario invitarli a passare già alla generalizzazione. Sarebbe opportuno mettere in evidenza che la legge si ricava per analogia strutturale. Si evidenzerebbero così ciò che rimane costante (la funzione di MSN), e ciò che varia (numeri in ingresso e in uscita).  
<sup>17</sup> Il rilievo non mi è chiaro. Suggestisco comunque di scrivere in alto alle due colonne, per esteso, 'numero in ingresso' e 'numero in uscita', altrimenti la lettera rischia di essere intesa come 'etichetta' perdendo il suo significato di numero.  
<sup>18</sup> Si lascia Aurora procedere in autonomia alla condivisione scritta sia del linguaggio matematico che naturale della legge. Ottima decisione.  
<sup>19</sup> Il far uscire i ragazzi per arrivare ad una conclusione comune aveva l'obiettivo di far continuare il ragionamento senza intervento da parte degli insegnanti.  
<sup>20</sup> Enrica, portavoce del gruppo dei tre, verbalizza correttamente la traduzione nel linguaggio matematico. Purtroppo da qui non siamo riusciti più a coinvolgere la classe nella sua totalità, vuoi per la numerosità degli alunni, vuoi per la difficoltà di ascoltarsi data l'ampiezza dell'auditorium in cui la classe è ospitata a causa della pandemia, vuoi perché intenti a seguire i loro ragionamenti. Abbiamo lasciato andare i ragazzi che partecipavano spontaneamente (circa una decina) a discutere con autonomia.

		<b>progetto ArAl</b>		<b>2020/21</b>		<b>Macchina sputanumeri</b>				<b>1</b>	
<b>Monteroni (SI)</b>		<b>I</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>Alfonso Riva, Claudia Santoni</b>

45. Francesca: Non tornerebbe nel linguaggio matematico.<sup>21</sup>
46. Enrica: Sembra la somma tra il quadrato del numero in ingresso e il successivo del quadrato del numero in ingresso.
47. I: Come volete procedere?
48. Francesca: Si potrebbe scrivere “Il numero in uscita è uguale al successivo del quadrato del numero in ingresso”.
49. I: Se vi può aiutare vi aiuto scrivendo il testo dalla tastiera.
50. I: Potremmo mantenere anche una formulazione con la parola somma?
51. Enrica: Il numero in uscita è uguale alla somma tra il quadrato del numero in ingresso e 1.
52. I: Allora che c’è da dire? Bravi a tutti e quattro e a tutti quelli che hanno partecipato. Però pensavo alla formulazione di Aurora che secondo voi ha un errore... perché, scusate, ma allora la formulazione di Aurora come si tradurrebbe nel linguaggio matematico? Quelle giuste che avete proposto le lascio in verde e metto in evidenza in nero la formulazione di Aurora scritta tutta in riga.
53. Francesca: Sappiamo come si può dire il successivo del numero ingresso, intendo in base al... cioè se 1 è il numero in ingresso...
54. Enrica: Facciamo la generalizzazione!
55. Francesca:  $o=i^2+(i+1)$ .
56. Enrica:  $i^2+1!$
57. Alla lavagna Francesca scrive:  $o=i^2+(i^2+1)$ .
58. I: E da qui  $o=i^2+(i^2+1)$ , traduzione della proposta di Aurora, potete scriverla in un altro modo?
59. Vahidin: Viene una cosa infinita.
60. I: No, non viene una cosa infinita. Proponete un altro modo ancora della traduzione sbagliata di Aurora.
61. Riccardo scrive alla lavagna  $o=i+i(i$  **refuso?**
62. Enrica: Questo sarebbe il doppio di i, non il quadrato; il quadrato è i “per” i, non “più”...
63. I: Mettetevi d’accordo, spero che stiate seguendo.
64. Enrica e Francesca insieme: Cancella il “+”, metti il “.”; cancella questo “+” e metti il “.”... e li ‘+1’ ... no qua... tra parentesi...  $i \cdot i+1$ .
65. Riccardo scrive  $o=i \cdot i(i+i+1)$ .
66. I: Allora, siamo proprio sicuri? Ma non ho capito tra queste due,  $i \cdot i$  e  $i \cdot i+1$ , cosa c’è?
67. Enrica: “+”.
68. Francesca: Basterebbe mettere il “+” qui.
69. Francesca scrive  $o=i \cdot i+(i \cdot i+1)$ .
70. I: Ok, c’è un +, sennò non mi torna. E voglio dirvi una cosa, da questa prima formulazione,  $o=i^2+(i^2+1)$  potrei passare a  $i^2+i^2+1$ , togliendo le parentesi?
71. Riccardo: Prima devi fare  $i^2$  più  $i^2$  e poi aggiungere 1.
72. Enrica: **manca l’intervento**
73. I: Se tolgo le parentesi cambia?
74. Riccardo: No, perché c’è la moltiplicazione.
75. Aurora: Dove è la moltiplicazione?
76. Francesca: No, non cambia nulla, perché se quell’1’ si aggiunge a questi due questi due o solamente a questo, non cambia niente.
77. I: Esatto, non cambia nulla; E  $i^2+i^2+1$  si può scrivere ancora in un altro modo e poi andiamo via?
78. Francesca:  $i^2 \cdot 2$ .<sup>22</sup>
79. I: Infatti, è il doppio di  $i^2$ .
80. La proposta di Aurora che non era corretta ci ha portato ad un’altra situazione; se sostituiamo dei valori troviamo tutt’altra Macchina Sputanumeri. **Ciao, grazie!**<sup>23</sup>

<sup>21</sup> Si è colta l’occasione offerta da Francesca di validare la traduzione corretta, provando a tradurre dal linguaggio naturale a quello matematico la formulazione di Aurora. Tutto lo scambio successivo verte su questa parte. Hanno capito che la scrittura di Aurora non tornava e proprio per aiutarli a validare il loro lavoro si è agevolata questa strada per aumentare l’autonomia.

<sup>22</sup> Suggesto di scrivere  $2 \cdot i^2$ , che prepara anche alla rappresentazione  $2 \cdot i^2$ .

<sup>23</sup> Ottima la discussione. Gli insegnanti possono essere davvero soddisfatti.



Monteroni (SI)

I

1

2

3

4

5

1

2

3

Alfonso Riva, Claudia Santoni

$o = n^2 + 1$   
 IL NUMERO IN USCITA È UGUALE  
 ALLA SOMMA TRA IL QUADRATO  
 DEL NUMERO IN INGRESSO E IL  
 SUO SUCCESSIVO

$o = n^2 + (n^2 + 1)$   
 $o = n \cdot (n + 1) + 1$   
 $n^2 + n^2 + 1$   
 $n^2 \cdot 2 + 1$

Il n. in uscita è uguale alla somma tra il quadrato del n. in ingresso e il suo successivo  
 Il n. in uscita è uguale al successivo del quadrato del n. in ingresso  
 Il n. in uscita è uguale alla somma tra il quadrato del n. in ingresso e 1