

Data (8 aprile 2022)

1

Commenti **Insegnante di classe**

Commenti **Giancarlo Navarra**

NB. Chiarisco una sigla: ad es: c.15/r51 significa: 'commento 15 al rigo 51'.

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 1E è composta da 24 alunni, 12 femmine e 12 maschi. Sono presenti 4 alunni di origine cinese, di cui una con livello di alfabetizzazione A1 per la quale è stato stilato un PDP. Sono presenti 2 alunni con DSA per i quali è stato predisposto un PDP.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: L'insegnante ha proposto le situazioni problematiche a tutto il gruppo classe. Gli alunni si avvicinano per la prima volta al progetto Aral e hanno partecipato a due lezioni tenutesi, rispettivamente, nei mesi di gennaio e marzo dal Prof. Navarra. Da circa un mese il gruppo classe affronta situazioni problematiche ricorrendo all'uso metaforico della bilancia. A partire dall'inizio di Dicembre la classe ha realizzato le esperienze n.1,2,3,4 e 5 della prima fase e tutta la seconda fase dell'unità 6 "Dalla bilancia all'equazione". La situazione problematica è stata presa da "Allenamento in bici" del 25 RMT, prova 1, Gennaio-Febbraio 2017, il cui ambito è equazioni, sistemi lineari., ed opportunamente modificata.

IL PROBLEMA:

Testo originale

14. ALLENAMENTI IN BICI (Cat. 7, 8, 9, 10)

Il ciclista Giovanni si allena per la sua prossima gara. I suoi allenamenti si svolgono sempre su tre percorsi, uno lungo, uno medio e uno corto. Nell'allenamento di ieri, Giovanni ha effettuato due volte il percorso lungo, due volte il percorso medio e una volta il percorso corto, per un totale di 42 km. Oggi invece ripercorre cinque volte il percorso medio per un totale di 5 km in meno rispetto a ieri. Il suo programma di allenamento per domani prevede un totale di 48,8 km, che otterrà effettuando quattro volte il percorso lungo e una volta quello corto. Per l'ultimo allenamento prima della gara, quello di dopodomani, Giovanni percorrerà una volta il percorso lungo, tre volte quello medio e due volte quello corto. Quanti chilometri farà Giovanni nel suo ultimo allenamento? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Testo proposto alla classe

Il ciclista Giovanni si allena per la sua prossima gara. I suoi allenamenti si svolgono sempre su tre percorsi, uno lungo, uno medio e uno corto. Nell'allenamento di ieri, Giovanni ha effettuato due volte il percorso lungo, due volte il percorso medio e una volta il percorso corto per un totale di 42 km. Oggi invece ripercorre cinque volte il percorso medio per un totale di 5 km in meno rispetto a ieri. Domani percorrerà due volte il percorso medio e due volte il percorso corto per un totale di 26 chilometri. Per l'ultimo allenamento prima della gara, quello di dopodomani, Giovanni percorrerà una volta il percorso lungo, tre volte quello medio. Quanti chilometri farà Giovanni nel suo ultimo allenamento? ¹

1. L'insegnante proietta il testo alla lim e chiede ad un alunno di leggere il testo della situazione problematica.

¹ Prima di leggere il diario preferisco organizzare una pur sintetica analisi a priori del problema, che viene proposto come un sistema di equazioni.

Sul piano matematico gli alunni dovrebbero avere cominciato a prendere confidenza con questi concetti: (a) significato e uso della lettera per rappresentare un numero che non si conosce; (b) rappresentazione canonica e non canonica di un numero; (c) rappresentare / risolvere una situazione problematica; (d) tradurre dal linguaggio naturale al matematico e viceversa; (e) Brioshi; (f) la bilancia a piatti e i principi della bilancia; (g) almeno in embrione: differenza fra pensiero procedurale e pensiero relazionale.

Sul piano del contratto didattico dovrebbero essere condivise l'importanza dell'argomentazione e della devoluzione.

(L = percorso lungo, M = percorso medio, C = percorso corto)

$$(1) 2 \times L + 2 \times M + C = 42$$

$$(2) 5 \times M = 42 - 5$$

$$(3) 2 \times M + 2 \times C = 26$$

$$(4) L + 3 \times M = ?$$

Il mio percorso (velocizzo per praticità alcuni passaggi):

$$(2) 5 \times M = 42 - 5 \quad 5 \times M = 37 \quad M = 37/5 \quad M = 7,4$$

$$(3) 2 \times M + 2 \times C = 26 \quad 2 \times 7,4 + 2 \times C = 26 \quad 14,8 + 2 \times C = 26 \quad 2 \times C = 26 - 14,8 \quad 2 \times C = 11,2 \quad C = 5,6$$

$$(1) 2 \times L + 2 \times M + C = 42 \quad 2 \times L + 2 \times 7,4 + 5,6 = 42 \quad 2 \times L + 14,8 + 5,6 = 42 \quad 2 \times L + 20,4 = 42 \quad 2 \times L = 42 - 20,4 \quad 2 \times L = 21,6$$

$$L = 10,8$$

$$(4) L + 3 \times M = 10,8 + 3 \times 7,4 = 10,8 + 22,2 = 33.$$

2. Pasquale: Faccio 42-5 e trovo i chilometri del percorso medio.
3. Asia: Ma c'è scritto che il percorso medio lo fa 5 volte, non sono d'accordo.
4. Pasquale: Vero! Non avevo letto, quindi il risultato lo divido per 5.
5. I: Prova a spiegarti meglio. Qualcuno vuole intervenire?
6. Asia: Sì, prof, ha detto bene. Non trovo errori.
7. Gabriele L: Allora, faccio $42-5=37$ e poi $37:5$.²
8. I: Gabriele, prova ad esprimere il senso delle operazioni. Perché dividi per 5?
9. Gabriele L: Divido per 5 perché 37 è 5 volte il percorso medio.
10. I: Quindi stai dicendo che $37:5$ è il percorso medio. Non vi sembra che la frase sia mal posta?³
11. Carlotta: Ah, posso? $37:5$ che è 7,4 chilometri è la lunghezza del percorso medio.
12. I: Siete d'accordo? Bene, procediamo. Proviamo a rappresentare la situazione a Brioshi?⁴
13. Duccio: $5m=37$.⁵
14. I: Cosa è m?
15. Duccio: Il percorso medio.
16. I: Percorso medio? Possiamo provare a dare una descrizione migliore?⁶
17. Duccio: In che senso?
18. I: Provo a spiegarmi meglio. Abbiamo detto che 7,4 chilometri è la lunghezza del percorso medio, giusto? Proviamo ad esprimere meglio m.
19. Duccio: Sì.⁷ m è la lunghezza del percorso medio.
20. I: Allora concordiamo tutti che m rappresenta la lunghezza del percorso medio?
21. Classe: Sì.
22. I: Abbiamo altre due relazioni. Rileggiamo ancora una volta il testo.
23. Eva: 42 è la somma dei tre percorsi.
24. I: Sicura?⁸
25. Gabriele C: No, c'è scritto il doppio del percorso lungo, il doppio del percorso medio e il percorso corto.
26. I: Quindi? Come pensi di rappresentare a Brioshi ciò che hai letto.
27. Gabriele: Posso venire alla lavagna così mi aiuto con un disegno?⁹
28. I: Potresti provare a usare gessetti colorati e far corrispondere a ciascun percorso lo stesso colore.¹⁰
29. L'alunno è perplesso.
30. I. Gabriele, come non detto. Prova a spiegare alla classe il tuo modo di procedere.
31. Gabriele: Ho disegnato due segmenti che rappresentano il percorso lungo, altri due segmenti più piccoli, che rappresentano il percorso medio e un segmento corto che rappresenta il percorso corto.

² La proposta di Gabriele è procedurale ("Faccio"). Sta eseguendo in sequenza delle operazioni. Sarebbe importante guidarlo ad esprimere ciò che sta dicendo da un punto di vista relazionale in forma di rappresentazione di relazioni: $5 \times M = 42 - 5$ $5 \times M = 37$ $M = 37/5$ $M = 7,4$. Questo significherebbe, anche, saper applicare il secondo principio di equivalenza.

³ Li vedo abbastanza persi e provo a ripetere quanto emerso con tono diverso. Capisco cosa intende l'insegnante quando parla di 'frase mal posta', che desidera sentir parlare di 'lunghezza del percorso' invece che di 'percorso'. L'impressione iniziale è che il 'clima' sia procedurale. Non credo che gli alunni sappiano interpretare le parole 'frase mal posta'.

⁴ Siccome il concetto di rappresentare un numero o una situazione problematica è nodale nella prospettiva in cui l'insegnante sta guidando la classe, ed è tutt'altro che è intuitivo, mi chiedo quali siano le competenze della classe in questo senso. Non so se l'insegnante intenda una rappresentazione qualsiasi, o una in linguaggio matematico.

⁵ Duccio alla lavagna ha scritto questa relazione. Un'osservazione 'laterale': credo che, sino a quando gli alunni hanno una competenza limitata sui significati della lettera (v. successivo c.12/38), sia opportuno che si utilizzino rappresentazioni trasparenti ($5 \times m$ invece di $5m$) che evidenzino che la scrittura rappresenta un prodotto).

⁶ Mi sembra che anche questa domanda non chiarisca cosa chiede l'insegnante: 'migliore' (come chiede Duccio (17)) in che senso? Comprendo l'incertezza dell'alunno.

⁷ Nonostante l'intervento di Carlotta, Duccio è titubante.

⁸ Domande come "Sicura?" sono spontanee e apparentemente sono un aiuto per l'alunno, ma la mia esperienza mi porta a non esserne così sicuro. In questi casi suggerisco di porre domande più 'orientanti' del tipo: "Ci spieghi da cosa capisci che 42 è la lunghezza dei tre percorsi?". Eva (23) non ha capito, e dovrebbe essere guidata a riflettere e ad argomentare su quello che dice in modo da autocorreggersi; invece è Gabriele, che ha colto il senso del "Sicura?", a dare la direzione di marcia.

⁹ Gabriele, alla lavagna, disegna cinque segmenti: i primi due della stessa lunghezza, gli altri due della stessa lunghezza e un ultimo segmento di lunghezza minore dei precedenti.

¹⁰ Forse non mi sono espressa bene perché lo vedo perplesso e quindi faccio un passo indietro.

32. I: Pensi di aver descritto per bene ciò che hai disegnato? Non aggiungi nulla sulla lunghezza dei segmenti? ¹¹
33. Gabriele: Ah, i segmenti che rappresentano lo stesso percorso hanno uguale lunghezza.
34. I: Bene! Ancora una volta provate a rappresentare la situazione a Brioshi.
35. Duccio: Dobbiamo scegliere una lettera.
36. I: Cioè?
37. Duccio: No, tre lettere perché i percorsi sono tre.
38. Eva: Posso usare a, b e c? ¹²
39. I: Del percorso medio ne abbiamo già parlato.
40. Asia: Sì, era m.
41. I: Bene. Rileggiamo il testo e proviamo a capire in che modo procedere ma non dimentichiamo che tutto deve essere chiaro a Brioshi. ¹³
42. Samuele: Sappiamo che il percorso di domani è lungo 26 Km.
43. Carlotta: Sì, e che corrispondono a 2 percorsi medi e 2 corti
44. I: Esatto.
45. Gabriele L: Però già abbiamo capito il percorso medio.
46. I: La lunghezza del percorso medio.
47. Pasquale: Faccio (26-14,8) e divido per 2.
48. I: Sei stato procedurale o relazionale?
49. Pasquale: Procedurale. ¹⁴
50. I: Concordo!! Rappresentiamo la situazione a Brioshi. Potete aiutarvi con un disegno come fatto prima.
51. Carlotta: Disegno due segmenti e poi altri due segmenti e sotto scrivo 7,4.
52. I: Perché?
53. Carlotta: Perché 7,4 è la lunghezza del percorso medio.
54. Duccio: Però i due segmenti sono uguali.
55. Asia: Ma anche i percorsi medi.
56. I: Esattamente. Allora? Come vogliamo rappresentare ciò che Carlotta ha detto?... Che simbolo vogliamo utilizzare per la lunghezza del percorso corto? ¹⁵
57. Gabriele: $7,4+7,4+c+c=26$.
58. I: Oppure?
59. Gabriele: $2c+14,8=26$.

¹¹ Riascoltandomi ho pensato che avrei potuto evitare di puntualizzare visto che il disegno era corretto. Mi sembra che la questione ruoti attorno al concetto di 'percorso' e di 'lunghezza del percorso'. Rifletto nuovamente sulla domanda dell'insegnante "Pensi di aver descritto bene...?" riferendomi ad altre due domande "Possiamo dare una descrizione migliore?" (16) e "Sicura?" (24). Nel progetto ArAl descriviamo questo tipo di domande, apparentemente dubitative di fatto asseverative così: "Sono domande 'false amiche'. Vorrebbero provocare un dubbio ed invitare l'alunno a correggersi ma difficilmente si lasciano interpretare: "Sei proprio sicuro?", "Davvero?", "Pensi realmente che"? L'alunno coglie il tono, talvolta sottilmente sanzinatorio ("Sicura?"), più che il significato delle domande. Una sola cosa gli è chiara: indipendentemente da quello che potrebbe rispondere, quello che sta dicendo, o che ha scritto, è sicuramente sbagliato. Questo lo mette in uno stato d'ansia e non lo predispone alla revisione di ciò che ha detto".

¹² La domanda rivela un controllo debole sul significato e sull'uso delle lettere. Siccome ritengo che Eva esprima un'incertezza diffusa, direi che la sua domanda rappresenta un campanello d'allarme: l'alunna non si sente sicura di essere lei a poter scegliere il simbolo e chiede l'approvazione dell'insegnante, esprimendo una dipendenza nei suoi confronti che costituisce un limite per la sua autonomia di pensiero. Di fronte a micro-episodi come questo suggerisco di non proseguire (come fa l'insegnante subito dopo (39) parlando del 'percorso medio), ma di interrompersi e chiedere all'alunna perché pone una domanda di questo genere.

¹³ Mi riallaccio al mio Commento 3/r12 sul concetto di rappresentare, e mi chiedo come interpretino gli alunni le parole "non dimentichiamo che tutto deve essere chiaro a Brioshi": 'tutto' cosa? In che senso 'chiaro'? La consegna del testo del problema è procedurale: 'Quanti chilometri farà Giovanni nel suo ultimo allenamento?'. Brioshi è estraneo a questa formulazione. Per farlo diventare un co-protagonista nella scelta della rappresentazione, dovrebbe trovare la sua giustificazione in una consegna di tipo relazionale: 'Rappresenta la situazione in linguaggio matematico in modo che Brioshi possa trovare quanti chilometri fa Giovanni nel suo ultimo allenamento'.

¹⁴ Sarebbe importante chiedere all'alunno di spiegare cosa significhino per lui i termini 'procedurale' e 'relazionale'. Sono rinforzi semantici molto importanti, che coinvolgerebbero il resto della classe e contribuirebbero alla costruzione sociale della conoscenza.

¹⁵ Mi sono resa conto di averli indirizzati. È vero. Probabilmente l'insegnante dovrebbe cercare di 'tenersi in disparte', per fare in modo che gli alunni siano protagonisti reali nella costruzione delle conoscenze, mentre invece così si limitano a fornire risposte 'locali' a questioni 'locali'.

60. I: Bene. Quindi, resta da determinare il valore di c .¹⁶
61. Adele: Con la bilancia.
62. I: Giusto.¹⁷
63. Duccio: Tolgo 14,8.
64. Carlotta: NO!
65. I: Come mai? Prova a spiegare alla classe perché non sei d'accordo.
66. Carlotta: Quando abbiamo utilizzato la bilancia abbiamo visto che si toglieva da entrambi i piatti
67. I: Cosa si toglieva?
68. Carlotta: I pesi.
69. I: OK! Quindi Duccio non ha espresso bene il concetto, giusto?¹⁸
70. Asia: Si toglie 14,8 da destra e da sinistra.¹⁹
71. I: Quindi?
72. Asia: Su un piatto ho $2c$ e sull'altro ho 11,2.
73. I: Quale principio della bilancia abbiamo applicato?
74. Classe: Il primo.
75. I: E ora?
76. Duccio: Divido per 2.
77. I: Cosa dividi per 2?
78. Duccio: $2c$ e 11,2.
79. I: Quale principio applichi?
80. Classe: Il secondo.
81. I: $2l:2=11,2:2$ e quindi $= 5,6$.²⁰ Ricapitolando: abbiamo determinato la lunghezza del percorso corto e la lunghezza del medio. Ancora una volta rileggiamo le informazioni e scriviamo cosa abbiamo determinato man mano che leggiamo.
82. I: Dall'allenamento di oggi abbiamo determinato la lunghezza del percorso medio, da quello di domani abbiamo invece capito la lunghezza del percorso corto. Alla lavagna c'è ancora il disegno di Gabriele. Come pensate di procedere?²¹
83. Asia: Sotto ogni segmento metto quello che abbiamo scoperto.
84. I: Quindi? Rappresentando a Brioshi?
85. Asia: Segmento, segmento, poi 7,4, poi 7,4, poi 5,6 e 5,6.²²
86. I: Ma Brioshi? Come può capire cosa vogliamo dirgli?
87. Carlotta: $x+x+7,4+7,4+5,6+5,6 = 42$ ²³
88. I: Concordate con la rappresentazione di Carlotta?

¹⁶ Ritengo che si sarebbe dovuto rendere trasparente la relazione fra le scritte (57 e 59) e quella dalla quale esse derivano: $2 \times m + 2 \times c = 26$ $2 \times 7,4 + 2 \times c = 26$ $14,8 + 2 \times c = 26$. Se questo non accade c'è il rischio che sia dominante una visione frantumata che impedisce di vedere l'evolversi del processo. Devo dire però che esprimo queste perplessità anche perché non viene illustrato cosa succede alla lim.

Sempre per favorire la trasparenza e la coerenza fra una frase e l'altra (che, è evidente, 'dicono in modi diversi la stessa cosa'), si sarebbe potuto chiedere a Gabriele il perché di un certo 'disordine': $7,4+7,4+c+c$ e $2c+14,8$ (posizioni di numeri e lettere sono invertite). Inoltre sarebbe stato importante far emergere la differenza fra le rappresentazioni $c+c$ e $2 \times c$ (più trasparente, come ho scritto, di ' $2c$ ') e far emergere i concetti di 'additivo' e 'moltiplicativo'. Inoltre, mi sembra che l'insegnante continui ad indicare la rotta ("resta da determinare...") in modo eccessivo.

¹⁷ Nota di metodo nella redazione del diario: si segue molto meglio il filo del discorso se l'autore inserisce nel testo quello che succede alla lim. Penso che quando Duccio (63) toglie 14,8, ci sia scritto $2c+14,8=26$.

¹⁸ Anche in questo caso dubito che la classe abbia compreso la domanda dell'insegnante "8"... ha espresso bene il concetto, giusto?".

¹⁹ Sarebbe molto importante capire come gli alunni hanno espresso il passaggio successivo a: $2c+14,8=26$. Hanno rappresentato il 'togliere' aggiungendo due sottrazioni, una per arte ($2c+14,8-14,8=26-14,8$)? In caso contrario, cos'hanno scritto?

²⁰ C'è un refuso: $2c:2=11,2:2$. Inoltre, mi sembra di capire che sia l'insegnante che scrive alla lim il passaggio. Perché non lo fanno gli alunni? Qual è il 'soggetto' di '=5,6'? Cioè: cosa c'è a sinistra dell'uguale?

²¹ Ho "riassunto" quanto determinato ma avrei potuto chiedere a loro di farlo. Sono d'accordo. Purtroppo, senza la riproduzione di quello che viene scritto alla lim, si segue male lo sviluppo dell'attività.

²² In realtà credo che Asia non risponda alla domanda dell'insegnante (84), ma esprima la sua visione spaziale della situazione. Quando poi scrive ' x ' credo che indichi il segmento, non la lunghezza del percorso lungo. Inoltre mi chiedo perché, avendo indicato la classe con ' c ' e ' m ' le lunghezze dei percorsi 'corto' e 'medio', adesso sbuchi lo stereotipo della ' x ', e non una ' l ' coerente con la scelta delle altre due lettere.

²³ Mi è sfuggito di far specificare cosa rappresentasse la x in questione.

89. Gabriele: **Si, perché Brioshi non capisce la parola segmento.** ²⁴
90. I: Ecco!
91. Asia: E ora metto sulla bilancia il 42 e poi x , x , 7,4, 7,4, e 5,6.
92. I: Sì.
93. Duccio: **Tolgo da entrambi i piatti prima 7,4 poi 7,4 poi 5,6.** ²⁵
94. Gabriele: Ma posso anche subito togliere 20,4.
95. I: Spiega alla classe perché? Cosa è 20,4?
96. Gabriele: È $7,4+7,4+5,6$.
97. I: Ma 7,4 e 5,6 cosa rappresentano?
98. Gabriele L: Percorso medio e corto.
99. I: Quindi? Prova a dirlo meglio. Anzi, chi vuole dirlo meglio?
100. Samuele: **È la somma del percorso medio e del corto.** ²⁶
101. I: Quindi $7,4+5,6$?
102. Samule: No.
103. I: Ma io ho scritto ciò che tu hai detto. Vuoi provare ad aggiustare?
104. Samuele: Sì, è la somma di 2 volte il percorso lungo e del percorso corto.
105. Duccio: Il doppio.
106. I: **Duccio, prova!** ²⁷
107. Duccio: È la somma del doppio del percorso medio e del percorso corto.
108. I: Della lunghezza del percorso corto e della lunghezza del percorso medio... Ritornando alla bilancia, che principio applicate?
109. Classe: Il primo.
110. I: Cosa leggerà Brioshi?
111. Asia: $21,6=2x$, poi applico il secondo principio e $2x=21,6:2=10,8$.
112. I: **Stai dicendo che $2x=10,8$ ma guarda che $2x=21,6$. Non ti sembra di affermare due cose contrastanti, cioè $2x=10,8$ oppure $2x=21,6$?** ²⁸
113. Gabriele: Anche $2x$ va diviso per 2 e quindi $x=10,8$.
114. I: Bene. Siamo ora in grado di capire quanti chilometri percorrerà Giovanni dopodomani.

²⁴ La risposta di Gabriele conferma l'ipotesi che ho espresso precedentemente in (c22/r85) che 'x' non rappresenta un numero ma il disegno del segmento.

²⁵ Purtroppo in tutti questi passaggi, che mi interessano molto, mancano le scritture alla lim che mostrino cosa viene scritto, e soprattutto come viene scritto.

²⁶ L'insegnante (101) usa la strategia di riportare esattamente ciò che afferma l'alunno, ed è certamente efficace. Consideriamo però l'intervento di Samuele secondo una prospettiva diversa, di carattere linguistico: l'alunno ha espresso solo il predicato nominale e manca il soggetto. Se gli alunni avessero l'abitudine di inserire anche il soggetto nelle loro frasi (in questo caso: " **$7,4+7,4+5,6$ è la somma della lunghezza del percorso medio e di quella del corto**") probabilmente Samuele capirebbe da solo l'errore.

²⁷ Sarebbe stato meglio chiedere esplicitamente a Duccio di parafrasare la frase di Samuele; l'alunno avrebbe scoperto che era necessario modificare la frase matematica precedente e utilizzarla come soggetto per la nuova definizione: " $2 \times 7,4 + 5,6$ è la somma fra il doppio della lunghezza del percorso medio e la lunghezza del percorso corto".

²⁸ Confermo l'impressione generale avuta durante la lettura: l'insegnante è molto presente e tende a sostituirsi agli alunni che, a mio avviso, vanno troppo spesso a traino delle sue domande, a scapito della loro autonomia.