

18 Marzo 2022

1

**Commenti** *Insegnante di classe*

**Commenti** *Giancarlo Navarra*

**Commenti** *Anna Traverso*

**PRESENTAZIONE DELLA CLASSE:** La classe 3D è composta da 26 alunni, 11 femmine e 15 maschi. È presente un alunno h. 104, 1 alunna DSA e 4 alunni BES. La classe ha cominciato a lavorare in chiave early-algebra nella classe prima in maniera informale utilizzando come riferimento l'Unità relativa a Bilance ed equazioni, riprese poi lo scorso anno scolastico durante il periodo di DDI durante il percorso pilota ArAl.

**PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ:** L'insegnante ha proposto le situazioni problematiche dell'Unità a tutto il gruppo classe da circa 2 settimane.

**IL PROBLEMA:**

La classe ha avuto modo di lavorare sul significato di rappresentazione di alcune situazioni problematiche proposte, sui concetti di uguaglianza, principio fondamentale, primo e secondo principio della bilancia. La classe ha anche lavorato sull'uso dei simboli letterali in contesti problematici.

Nell'incontro in presenza con Giancarlo Navarra la classe ha lavorato sulla traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e la rappresentazione per Brioshi.

L'attività qui proposta prevede di far esplorare il testo del problema e riuscire a ottenere una rappresentazione in linguaggio matematico comprensibile per Brioshi.

Il problema che segue è estratto dalla prima prova del Rally Matematico Transalpino del corrente anno scolastico a cui ha partecipato tutta la classe.

Propongo alla classe il seguente problema e li lascio liberi di esplorare in autonomia in un intervallo di tempo e, successivamente, propongo un confronto:

All'inizio dell'anno scolastico Marta e Arianna vanno in cartoleria per fare scorta di oggetti di cancelleria. Marta acquista 5 confezioni di matite e 6 confezioni di penne, mentre Arianna acquista 9 confezioni di matite e 3 confezioni di penne, dello stesso tipo di quelle acquistate da Marta.

Alla fine, sia Marta sia Arianna hanno acquistato, tra penne e matite, 78 oggetti di cartoleria.

**Quante matite e quante penne ci sono in ogni confezione?<sup>1</sup>**

1. I: Chi parte?
2. Giacomo: Io! Io ho scritto:  $5x+6y=9x+3y=78$ .

$5x+6y=9x+3y=78$	Giacomo
------------------	---------

3. I: Questa è quella di Giacomo, qualcun altro? Pietro che aveva alzato la mano...<sup>2</sup>
4. Pietro: Anch'io l'ho scritta uguale... però... se sono 78 per uno, quindi 78 Arianna e 78 Marta, dovrebbe essere  $5x+6y=78$ , che è uguale a  $9x+3y$ , che è sempre uguale a 78. (Mentre Pietro dice la frase, l'insegnante scrive la catena di uguaglianze alla lavagna, sotto quelle lette da Giacomo):

$5x+6y=9x+3y=78$	Giacomo
$5x+6y=78=9x+3y=78$	Pietro

<sup>1</sup> La consegna è procedurale, e induce a trovare dei risultati. In questi anni si è discusso molto all'interno del Progetto ArAl su questo aspetto, e si è coniato la categoria intitolata scherzosamente dei 'Problemi RMT in salsa ArAl'. Sarebbe opportuno cambiare la consegna originale con una consegna relazionale, ad esempio: 'Rappresenta la situazione in modo che Brioshi possa trovare il numero delle matite e delle penne che ci sono in ogni confezione'. Ma qui viene spontanea la domanda: che esperienza ha questa classe con il concetto di 'rappresentare'?

<sup>2</sup> Vista la doppia uguaglianza nelle scritture di Giacomo e di Pietro ritengo che gli alunni non abbiano interiorizzato un modello mentale corretto della bilancia. Sarebbe stato opportuno chiedere che illustrassero le loro proposte. Il punto, secondo me, è: gli alunni hanno capito cosa devono rappresentare? Mi sembra che le loro scritture siano non delle rappresentazioni per Brioshi, ma dei modi per fissare in forma di appunti quello che hanno capito del problema.

5. Giacomo: Quindi puoi togliere 78 nel mezzo perché quando due cose sono uguali vuol dire che lo posso mettere anche alla fine, io l'ho messo alla fine perché è la stessa cosa.<sup>3</sup>
6. I: Non hai messo 78 nel mezzo perché l'hai messo in fondo, perché per te era la stessa cosa. Qualcuno che ha rappresentato in maniera diversa?
7. Johnny: Io ho messo  $5x+6y+9x+3y=78+78$ . L'insegnante ricopia.

$5x+6y=9x+3y=78$	Giacomo
$5x+6y=78=9x+3y=78$	Pietro
$5x+6y+9x+3y=78+78$	Johnny

8. I: Intanto volevo chiedervi questo: la scelta di x e y da che cosa deriva? Giacomo per te x che cosa rappresenta?<sup>4</sup>
9. Giacomo: x è l'incognita.
10. I: Ma x che cosa rappresenta? Ha un significato?
11. Giacomo: In questo caso rappresenta le matite.
12. I: Le matite? Sei sicuro le matite?
13. Giacomo: Le confezioni di matite.
14. Luigi: No, la quantità delle matite.
15. Giacomo: Rappresenta le matite e 5 sono le confezioni.
16. I: Le matite o la quantità delle matite?
17. Giacomo: La quantità delle matite per una confezione.
18. I: E invece y?
19. Giacomo: La quantità di penne in una confezione.<sup>5</sup>
20. Letizia: Prof, ma come la quantità delle matite? Cioè x è una matita?
21. Luigi: L'incognita rappresenta sempre un numero.
22. Letizia non capisce perché x deve essere 5.

<sup>3</sup> L'idea della proprietà transitiva c'è (probabilmente ne avete parlato in precedenza, forse senza nominarla in quanto tale), ma è espressa in modo concreto, operativo (“togliere 78 nel mezzo”, “lo posso mettere anche alla fine”). L'insegnante (6) lascia la questione in sospeso. Ho l'impressione che qui inizi una situazione che si ingarbuglia sempre più; ipotizzo che le ragioni di questo siano due: non è chiara la consegna sul compito per la classe e la verbalizzazione è confusa (perché le idee degli sono confuse) e accetta dall'insegnante in quanto tale.

<sup>4</sup> L'attenzione si sposta ora sulle lettere. L'insegnante fa bene ad andare in questa direzione, ma sarebbe stato opportuno mantenere comunque l'attenzione concentrata anche sul significato delle uguaglianze a catena in modo da non dare l'impressione che l'argomento sia stato superato. La proposta di Jonny in verità supera la catena di uguaglianze ed ingloba in un'unica equazione a due incognite le due diverse rappresentazioni del numero di oggetti acquistati rispettivamente da Marta e da Arianna, tuttavia anche questa rappresentazione porta ad un vicolo cieco. La questione potrebbe essere posta all'attenzione dei ragazzi: nei primi due casi, infatti (questo emergerà più avanti anche dalla discussione) è impossibile individuare i due piatti della bilancia, e nel terzo caso, anche provando a mettere sulla bilancia i due membri dell'uguaglianza, risulterà impossibile isolare una delle due incognite, in modo tale che un piatto contenga solo il valore sconosciuto e l'altro valori noti. Se la classe ha lavorato in passato con la bilancia a piatti, dovrebbe innanzitutto essere consapevole che un tale passaggio è indispensabile perché il problema possa essere risolto. Sarebbe importante che l'insegnante lo sottolineasse, per porre dei paletti alla discussione e non lasciare che gli interventi procedano a ruota libera, creando inevitabilmente problemi di conduzione dell'attività. Altro aspetto, che in qualche modo è legato al precedente e su cui mi sembra importante portare la riflessione, è il fatto che in una situazione come quella che gli alunni stanno esplorando non basti una traduzione corretta della situazione (in fondo tutte e tre le scritture proposte lo sono) per spianare la strada alla risoluzione del problema, ma che, quando le incognite sono due, è necessario capire se tra esse vi sia una relazione e in che cosa questa consista, in modo da poter definire un'incognita in funzione dell'altra. Credo sia molto difficile arrivare a chiarire tali questioni nodali attraverso un problema complesso qual è questo. Forse sarebbe stato opportuno partire da sistemi di equazioni più semplici. La richiesta di riflettere sul significato delle scritture matematiche implicate in questo testo è alta, a ciò si aggiunga la necessità di una comunicazione che, per non dare adito a fraintendimenti, deve essere il più possibile chiara e precisa. Fare i conti con tutto questo, per alunni che mi paiono ancora alle prime armi con le discussioni matematiche, è un'impresa ardua, che andrebbe affrontata per gradi.

<sup>5</sup> È necessario che la comprensione consapevole del significato dell'incognita diventi una competenza stabile per gli alunni. L'esperienza mostra come il limitarsi a questioni locali (come in questo caso) non sia sufficiente. Consiglio di riprendere l'argomento durante una o più 'discussioni filosofiche' dedicate a questo argomento. Il dubbio espresso successivamente da Letizia (20, 22, 24) supporta questo suggerimento. Gli interventi (9-19) sono troppo poveri e confusi per aiutare gli altri a capire. Il faro di una discussione dovrebbe essere sempre la costruzione sociale della conoscenza.

23. Giacomo: Ma x non deve essere per forza uno.
24. Letizia: Io non ho proprio capito quel cosa lì (*indica le scritte alla lavagna*)... cioè 5 confezioni di matite più 6 confezioni di penne sono 78... com'è possibile?
25. Giacomo: Se te moltiplichi... quando non c'è il segno vuol dire per x, te moltiplichi, x sta per quante matite ci sono in una confezione...<sup>6</sup>
26. Letizia: Aaah...
27. I: Vediamo la prima parte della scrittura: nel linguaggio naturale  $5x+6y$  a cosa corrisponde?<sup>7</sup>
28. Giacomo: 5 confezioni di matite più 6 confezioni di penne.
29. I: La somma del numero delle confezioni di matite, che sono 5, e del numero di penne, che sono 6, in totale è 78. Siamo tutti d'accordo?
30. Classe: Sì.
31. I: Nella seconda parte invece la somma del numero delle confezioni di matite, che sono 9, e del numero di penne, che sono 3, in totale è 78<sup>8</sup>.
32. I: Johnny, però sul tuo quaderno te hai scritto anche qualcos'altro.
33. Johnny: Sì, però ho usato lettere diverse.
34. Pietro: Anch'io.
35. Johnny: Io invece di x ho messo m e al posto della y la p.
36. I: Va bene, usiamo lettere diverse.
37. Johnny:  $5m+6p+9m+3p=78$ .
38. I: Va bene, ma sul tuo quaderno sotto questa uguaglianza che cosa hai scritto?<sup>9</sup>
39. Johnny: Sì.  $5m+6p=78$  e sotto  $9m+3p=78$ :<sup>10</sup>

$5x+6y=9x+3y=78$	Giacomo
$5x+6y=78=9x+3y=78$	Pietro
$5x+6y+9x+3y=78+78$	Johnny
$5m+6p=78$	Johnny
$9m+3p=78$	

40. I: Questa è un'altra rappresentazione che Johnny fa per il nostro amico Brioshi. Secondo voi sono tutte giuste? C'è qualcosa di giusto o qualcosa di sbagliato?
41. *Fatima la vedo un po' perplessa.*
42. Pietro: Anch'io ho usato m e p perché è più simbolico.
43. I: m e p ci dicono un po' di più delle matite e delle penne...
44. Giacomo: A Brioshi però non gli dice nulla m e p...
45. Letizia: Però confonde m, perché per me 5m sono 5 matite, non 5 confezioni di matite.
46. I: Allora come potremmo scrivere 5 confezioni di matite?
47. Pietro: 5cm, 5cp.
48. Letizia: cm no perché poi sembrano cose diverse.
49. I: Allora mettiamo una lettera sola?
50. Letizia: Mah, secondo me torna meglio x perché... boh...
51. Giacomo: Anche a me torna meglio x.

<sup>6</sup> Ritengo che il problema proposto sia di livello (forse troppo) alto rispetto alle competenze algebriche degli alunni (penso alla confusione sul significato della lettera). Il suggerimento è: affrontare collettivamente i nodi emersi sul piano della riflessione teorica più che su quello operativo. Non ho molta fiducia in un intervento 'd'ufficio' dell'insegnante che intende affrontare sul piano procedurale la soluzione di un sistema. Le mie riflessioni non valgono soltanto per questa classe o per questa lezione, ma vogliono avere un valore generale, soprattutto in prospettiva. Ormai siamo vicini alla fine dell'anno e capisco che l'insegnante voglia tirare i fili del suo lavoro.

<sup>7</sup> Sarebbe meglio chiedere 'Ci spieghi cosa significa  $5x+6y$ ?'. Una risposta nella prospettiva dell'early algebra potrebbe essere una definizione relazionale come: " $5x+6y$  è la somma fra il numero di tutte le matite e quello di tutte le penne"; oppure, più sintetica " $5x+6y$  è la rappresentazione non canonica del numero totale degli oggetti acquistati da Marta". Non credo che sia efficace se è l'insegnante a dire cos'è l'oggetto (come fa in (29)). L'accordo espresso dalla classe (30) è, purtroppo, falsamente rassicurante (come lo è l'Aaah di Letizia (26)).

<sup>8</sup> Qui stringo un po' perché mi sono accorta che uno studente ha scritto due equazioni sul suo quaderno e non le ha ancora lette, allora cerco di accelerare verso quelle scritte.

<sup>9</sup> Johnny non dava importanza all'altra scrittura, ma l'ho forzato a leggerla e io l'ho scritta fedelmente alla lavagna come l'aveva scritta lui sul suo quaderno.

<sup>10</sup> Scrivo alla lavagna le due uguaglianze e le metto sotto alle altre già dette dai compagni con l'iniziale dei loro nomi accanto.

52. I: Meglio  $x$ , perché altrimenti dovrebbe essere confezioni di matite,  $cdm$ , però poi diventa lungo...
53. Giacomo:  $x$  può essere quello che vuoi.
54. Letizia: Anche perché se scrivi  $cdm$ , magari sembrano lettere diverse.
55. Giacomo:  $x$  lo puoi interpretare come vuoi.<sup>11</sup>
56. I: Ok, vediamo queste rappresentazioni. Ci vanno bene tutte? Sono diverse? Sono uguali tra loro? Che cosa ne pensate?
57. Pietro: Quella di Johnny, la prima, e la mia sono uguali.
58. Luigi: Sì, è uguale.
59. I: Voi che ne pensate?
60. Letizia: No, non è uguale. Perché quella di Pietro ti dice che sono uguali tra 18 e 12.<sup>12</sup>
61. Giacomo: Ma se hanno lo stesso risultato vuol dire che sono uguali lo stesso.
62. I: Che significa che quella di Pietro hanno lo stesso risultato?<sup>13</sup>
63. Letizia: No, no, sono uguali, sono uguali.
64. I: Noi sappiamo che la somma di  $5m$  e  $6p$  è 78 e anche di questo (*indica alla lavagna  $9m+3p$* ) è 78. Ok?
65. Pietro: Quindi sono uguali.
66. I: Quale forma possiamo scegliere per provare a risolvere?<sup>14</sup>
67. Luigi: Quella di Pietro, perché con una uguaglianza ti dice quello che è.
68. I: Analizziamo il testo del problema. Quali sono gli enti conosciuti?<sup>15</sup>
69. Pietro: Le 5 confezioni e le 6 confezioni, poi le 9 confezioni e le 3 confezioni.
70. I: E altri enti conosciuti?
71. Giacomo: Sono i 78.
72. I: E gli enti sconosciuti?
73. Giacomo: Il numero di matite e il numero di penne...<sup>16</sup>

<sup>11</sup> È certamente importante che gli alunni abbiano verbalizzato fra loro (42-54), ma mi chiedo cosa sia rimasto dalla discussione: (42) Cosa intende Pietro con “È più simbolico”?; (43) In che senso “dicono di più”?; (44) perché a Brioshi “non dicono nulla”? Questo intervento di Giacomo apre un momento importantissimo dal punto di vista della generalizzazione: è verissimo che Brioshi non sa che  $m$  è il numero delle matite, ma sa interpretare  $5 \times m$  come prodotto, indipendentemente dal contesto al quale la scrittura si riferisce; sa che il suo compito, dopo aver interpretato significato e correttezza sintattica delle rappresentazioni inviate dalla classe, è quello di risolvere l’equazione applicando proprietà e principi: le frasi che riceve sono modelli che rappresentano problemi accomunati da una identità strutturale; (45) Letizia permane nel suo dubbio; (47) Cosa significano per Piero ‘5cm’ e ‘5cp’?; (48) Cosa intende Letizia con ‘cose diverse’?; (49) Come interpretano gli alunni “mettiamo una lettera sola”? Che differenza c’è con il metterne due? O addirittura tre come in ‘ $cdm$ ’ (52)? (v. [Ebbrezza da simbolo](#)); (50, 51) Perché “torna meglio”?; (55) In che senso “Puoi interpretarlo come vuoi”? Intendo dire, con tutto questo, che in una decina di interventi consecutivi sono emersi dubbi o misconcezioni che sono ‘scivolati via’ senza essere messi in discussione. Anche questi tasselli preparano il terreno per quel ‘non capire dove vuole arrivare l’insegnante’ al quale si fa riferimento nell’ultimo commento. Gli alunni, soprattutto i grandi di terza, devono abituarsi a sentirsi chiedere in continuazione di argomentare ciò che dicono. Devono assumersi la responsabilità di ciò che fanno e dicono, questo il senso della devoluzione di Brousseau. Questo commento mi trova pienamente d’accordo. Tocca aspetti cruciali. All’insegnante va riconosciuta una grande professionalità e onestà intellettuale nel mettersi in gioco.

<sup>12</sup> Non capisco cosa intende dire Letizia con 18 e 12.

<sup>13</sup> La domanda dell’insegnante è importantissima ma purtroppo non riceve alcuna risposta.

<sup>14</sup> Non so se è ben posta la domanda, ma l’obiettivo è farli convergere sulla scelta di una scrittura condivisa a tutti, in particolare mi interessa che convogliano sulla seconda versione di Johnny. Capisco le intenzioni, ma rimane irrisolta la questione iniziale delle catene di uguaglianze, e questo porta ad una domanda: in base a quali motivazioni gli alunni dovrebbero scegliere le scritture di Johnny e non le altre? Luigi, infatti, (67) propone quella di Pietro, “che ti dice quello che è”. Temo che la classe e l’insegnante si stiano muovendo con riferimenti concettuali molto diversi, proprio perché non è stato sciolto nemmeno uno dei grovigli espressi dalle verbalizzazioni. L’insegnante pensa al sistema di equazioni, implicito nell’ultima proposta di Johnny, ma mi sembra che gli alunni siano impreparati di fronte a questo concetto.

<sup>15</sup> Sarebbe più opportuno chiedere quali siano gli enti, noti o sconosciuti che siano, senza precisare “gli enti sconosciuti” come se fossero i più importanti. La decisione di rispondere ricadrebbe così sugli alunni (v. [Devoluzione](#)). Così invece essi si limitano a rispondere alla sequenza di domande che l’insegnante fa (68, 70, 72, 74, 76, .78) per avvicinarsi al suo obiettivo.

<sup>16</sup> Qui sarebbe stato importante invitare ad una risposta più precisa ‘il numero di matite e di penne contenute in una confezione’. Andrebbe sottolineato che una risposta insufficiente, che non contenga cioè tutti gli elementi necessari alla comprensione, può rivelarsi, se pur inconsapevolmente, una risposta scorretta.

74. I: ... che voi avete chiamato x e y o m e p. In questo caso (*Indico la rappresentazione di Pietro*) quanti sono gli enti sconosciuti?
75. Luigi: Due.
76. I: A Brioshi quale gli mandiamo?
77. Giacomo: Vanno bene tutte.<sup>17</sup>
78. I: Secondo voi quali di queste quattro versioni è la più comprensibile?<sup>18</sup>
79. Simona: La seconda.
80. Giacomo: L'ultima di Johnny.
81. Sofia: Anche secondo me l'ultima di Johnny.
82. I: E pensare che Johnny non la voleva nemmeno leggere!
83. Luigi: Sono uguali.
84. Giacomo: Sì, sono uguali, ma a me mi dà un po' noia, perché uguale 78, uguale 78...
85. I: (*cancello intanto la prima versione di Johnny e la versione di Giacomo*) A noi non interessa che cosa trova Brioshi, ma gli dobbiamo inviare una versione comprensibile. Siccome avete detto che le due versioni sono uguali, se io andassi oltre la rappresentazione e volessi provare a risolvere, (*indico  $5x+6y$* ) come potrei fare sulla versione di Pietro?<sup>19</sup>
86. Pietro: Saprei semplificare matite e penne, ma non 78<sup>20</sup>. Perché la puoi riscrivere e scrivi:  $3y=4x$ .<sup>21</sup>
87. I: Ma se io osservo la versione di Pietro e la vedessi come una bilancia, perché scritta così a me ricorda una bilancia, una bilancia quanti piatti ha?
88. Classe: Due (*tutti d'accordo*).
89. I: Però io qui (*indico  $5x+6y$* ) vedo un piatto, (*indico 78*) un piatto, (*indico  $9x+3y$* ) un piatto e (*indico 78*) un altro piatto, una bilancia a 4 piatti è un po' strana, non trovate?<sup>22</sup>
90. Pietro: No, è come se ci fossero due piatti in cui sta in equilibrio e in uno c'è  $5x$  e  $6y$  e nell'altro  $9x$  e  $3y$  e si sa che in totale in ogni piatto c'è 78 e 78.<sup>23</sup>
91. I: Rileggiamo il testo del problema insieme. Se io voglio rappresentare la situazione come se fosse una bilancia, che cosa devo inserire sui piatti della bilancia?
92. Pietro: 9 confezioni di matite e 3 confezioni di penne.
93. I: Simona, come lo rappresento tutto questo dal punto di vista matematico?

<sup>17</sup> Perché Giacomo dice così? Credo che la stanchezza stia prendendo il sopravvento.

<sup>18</sup> Suggestisco sempre agli insegnanti di formulare le domande in modo che gli alunni non diano risposte 'secche', ma si sentano responsabilizzati nell'argomentare le proprie risposte. Per esempio: "Qualcuno mi spiega quale di queste quattro versioni è la più comprensibile?". In questo modo si evitano risposte prive di sostanza come (79, 80, 81, 83, 84).

<sup>19</sup> Ho fatto tanta confusione: chiedo la rappresentazione, ma subito dopo chiedo di risolvere. Concordo. Permane la questione irrisolta se gli alunni capiscano cosa si chiede loro. Succede molto spesso così: l'insegnante prosegue verso il suo obiettivo invece che interrompersi per interagire con le affermazioni o le risposte date dalla classe. Questa strategia apparentemente velocizza, ma non porta benefici a nessun livello.

<sup>20</sup> Anche qui Pietro usa un linguaggio del tutto insoddisfacente, che sottende concetti mal digeriti. Cosa intende con "semplificare matite e penne"? L'insegnante non dovrebbe accettare un linguaggio così gergale, altrimenti la classe si abitua ad una 'tolleranza' molto alta verso la verbalizzazione e si adegua di conseguenza. Proseguendo il dialogo (87), l'insegnante avalla implicitamente lo scadente stile espositivo di Pietro.

<sup>21</sup> L'intervento di Pietro, discutibile sul piano della verbalizzazione, come giustamente rileva il commento precedente, avrebbe meritato più attenzione, perché Pietro, partendo da una scrittura assai poco ortodossa, riesce ad individuare il legame che intercorre tra le due incognite. Sarebbe stato opportuno invitarlo a chiarire il senso dell'uguaglianza  $3y=4x$  e magari sottoporla al giudizio dei compagni.

<sup>22</sup> Non so come la classe interpreti la domanda: in che senso 'strana'? L'insegnante sa dove vorrebbe andare a parare, ma gli alunni no. Pietro (90) giustifica la catena di uguaglianze manipolandola e trovando delle giustificazioni (v. [Lettura partigiana del testo](#)).

<sup>23</sup> La mia interpretazione dell'intervento di Pietro (90) è un po' diversa da quella di Giancarlo Navarra. Non vi trovo un intento manipolatorio, mi pare anzi che Pietro colga esattamente il punto. Non usa termini ArAl quali 'forma canonica', 'forma non canonica', perché evidentemente non gli sono abbastanza familiari, ma quando dice 'è come se ci fossero due piatti (in cui sta) in equilibrio e in uno c'è  $5x$  e  $6y$  e nell'altro  $9x$  e  $3y$  e si sa che in totale in ogni piatto c'è 78 e 78' sta di fatto riconoscendo nelle espressioni ' $5x$  e  $6y$ ' (o meglio:  $5x+6y$ ) e ' $9x$  e  $3y$ ' (cioè:  $9x+3y$ ) due forme non canoniche del numero 78, ed proprio grazie a questa considerazione che riesce ad individuare i due piatti della bilancia e a costruire l'equazione  $5x+6y=9x+3y$  da cui ricava, per 'semplificazione', come dice lui, l'uguaglianza ' $3y=4x$ ' (86), chiave della risoluzione. Credo che l'insegnante cercando di tenere insieme molti aspetti contemporaneamente (il significato delle lettere, i segni di relazione tra gli enti, i piatti della bilancia) si lasci sfuggire, tra i molti interventi degli alunni, quelli che potrebbero servire a sbloccare la situazione.

94. Simona: Più.
95. I: Che cosa scrivo? Kendra?
96. Kendra: Più.<sup>24</sup>
97. I: Allora io che cosa scrivo?
98. Kendra:  $9m+3=...$
99. Pietro: Uguale a 5 confezioni di matite.
100. I: Che cosa scrivo qui? (*indico il piatto della bilancia sulla lavagna*).
101. Pietro:  $5m$  e 6 confezioni di penne<sup>25</sup>
102. I:  $5m+6p...$ <sup>26</sup> Rileggiamo: Marta ha acquistato 5 confezioni di matite e 6 confezioni di penne ed i suoi oggetti in totale sono 78...
103. Giacomo: Prof, sono riuscito a fare la bilancia.
104. I: ... e Arianna ha acquistato 9 confezioni di matite e 3 di penne ed anche lei in totale sono 78. Ripeto: questa situazione va rappresentata per Brioshi in modo da spedirgli quella che è più semplice da risolvere.<sup>27</sup>
105. Pietro: Però si possono fare anche le bilance separate.
106. I: E come vengono queste due bilance?
107. Pietro: Ogni bilancia ha due piatti e sarebbe quella di Johnny.
108. I: Cioè?
109. Pietro: In un piatto ci metto 5 confezioni di matite e 6 confezioni di penne e nell'altro piatto 78 e nell'altra bilancia 9 confezioni di matite e 3 di penne e nell'altro piatto 78.
110. I: Ok, grazie Pietro. Giacomo ha detto che aveva risolto.
111. Giacomo: Sì, da una parte ho messo  $5x$  e  $6y$  e dall'altra parte  $9x$  e  $3y$  e ho semplificato<sup>28</sup>
112. I: Se io fossi Brioshi e mi vedessi arrivare una cosa come questa (*indico alla lavagna l'uguaglianza  $5x+6y=9x+3y$* ) e anche se capissi che cosa rappresentano  $x$  e  $y$ , osserverei anche che su un piatto della bilancia ho il numero delle matite e il numero delle penne insieme, che sono equivalenti al numero delle matite e al numero delle penne insieme sull'altro piatto.<sup>29</sup>
113. Giacomo: Eh, ma io ho semplificato eh.
114. Pietro: Anch'io!
115. Giacomo:  $5x$  di qua e  $5x$  dall'altra parte e  $3y$  da una parte e  $3y$  dall'altra<sup>30</sup>
116. Letizia: 3 confezioni di penne uguale 4 confezioni di matite?
117. I: (*indico di nuovo l'uguaglianza a cui stanno facendo riferimento Giacomo e Pietro*) A questa rappresentazione però manca un ente noto che sappiamo dal testo, ma che io non vedo nell'uguaglianza.
118. Pietro: 78.
119. I: È importante scriverlo 78 nell'uguaglianza?<sup>31</sup>
120. Pietro: Sì, ma il 78 poi come lo semplifichi?
121. I: Serve che gli enti noti, se così li vogliamo chiamare, che siano un totale di penne o matite o arance vengano messi da qualche parte? Pietro a te sono serviti questi 78 per risolvere il problema?
122. Pietro: Sì!
123. I: Allora a Brioshi gli va fatto vedere il 78?<sup>32</sup>

<sup>24</sup> Non conosco Simona e Kendra, ma risposte come le loro (94, 96) dovrebbero essere messe in discussione ogni volta che vengono formulate, a maggior ragione in una terza secondaria.

<sup>25</sup> Pietro, nonostante abbia individuato che cosa scrivere sul piatto della bilancia, continua a non indicare le confezioni con le lettere.

<sup>26</sup> Se la traduzione la fa l'insegnante perde efficacia. Gli alunni la sentono distrattamente, non ci fanno caso e non modificano, nemmeno in seguito, il loro atteggiamento.

<sup>27</sup> Lo scopo dovrebbe essere diverso: la classe deve decidere quale delle frasi proposte rappresenta in modo più corretto la situazione problematica da inviare a Brioshi. Si arrangerà lui poi a rispondere o a risolvere, questo aspetto nella fase attuale non è un problema degli alunni (a meno che non si immedesimino in lui e divengano loro risolutori).

<sup>28</sup> Quando Giacomo dice "Ho semplificato" non si tratta di un linguaggio ancora condiviso con la classe, lui fa riferimento alla cancellazione ed utilizza il termine 'semplificato'. Credo che sarebbe opportuno che gli studenti conoscessero il principio di cancellazione e usassero questo termine, invece di un generico 'Semplifico'.

<sup>29</sup> Sarebbe importante far tradurre agli alunni la frase in linguaggio naturale; come ho scritto più volte, se lo fa l'insegnante l'aspetto linguistico-interpretativo perde efficacia.

<sup>30</sup> I due ragazzi sono concentrati sulla risoluzione e non si muovono dalle loro posizioni originarie. Non riesco a spostare l'attenzione fuori dal risultato e a coinvolgere il resto della classe.

<sup>31</sup> Non capisco bene come gli alunni potrebbero inserire 78 nell'uguaglianza  $5x+6y=9x+3y$ .

<sup>32</sup> Purtroppo non mi sono spiegata bene e do per scontato che loro capiscano che è importante che 78 vada scritto su un piatto della bilancia, però forse così facendo li forzo a vedere le equazioni scritte da Johnny (43-44) come le uniche scritte correttamente.

124. Kendra: Secondo me quella di Johnny è la più corretta.
125. I: I 78 oggetti di cartoleria sono enti che si vedono nel problema, ma non in questa rappresentazione (*quella che stanno cercando di risolvere ostinatamente Giacomo e Pietro, ovvero  $5x+6y=9x+3y$* ).
126. *Tutti concordano di sì.*

127. I: Allora deve comparire da qualche parte 78? <sup>33</sup>
128. Pietro: A me è servito per risolvere...
129. Luigi: È l'unico numero che sappiamo.
130. Pietro: È l'unico numero che può aiutarti a trovare x...
131. Luigi: ... a scoprire...
132. Pietro: A trovare quante ce n'è in ogni confezione, che poi sarebbe x, y.
133. I: Allora alla rappresentazione di Giacomo manca qualcosa (*indico  $5x+6y=9x+3y$  alla lavagna*), perché in questa manca 78, giusto?
134. Classe: Sì.
135. I: Tra queste due (*indico alla lavagna  $5x+6y=9x+3y$  e le due di Johnny (43-44)*) quale è più trasparente? mi sembra che voi siate più d'accordo su questa (*quella di Johnny*).
136. Letizia: Sì, prof, però poi non è una bilancia.
137. Pietro: Sì, sono due.
138. Giacomo: Sono due bilance.
139. Letizia: Eh, però se sono due bilance poi non le puoi semplificare.
140. I: Ancora non abbiamo parlato di semplificazione. Vi volevo chiedere, invece, gli enti sconosciuti in queste due bilance quanti sono?
141. Luigi: Due.
142. I: Bene! E abbiamo due bilance. Quando io ho un ente sconosciuto e una bilancia, la posso trovare la soluzione?
143. *Silenzio.*
144. I: Ovvero... io e Pietro andiamo al mercato e in totale abbiamo 10 € e lui spende 2 € per l'acqua, quanto ci rimane? In questa situazione c'è un ente sconosciuto e posso scriverlo e lo rappresento con una bilancia e trovo quel che resta. Con due bilance che cosa accade? <sup>34</sup>

<sup>33</sup> *L'insegnante torna varie volte sulla necessità che la rappresentazione matematica contenga il numero 78 nella sua forma canonica, ma trovo che questo sia un falso problema. Una volta costruita l'uguaglianza  $5x+6y=9x+3y$ , stabilire se il numero 78 debba o meno comparire nella rappresentazione mi sembra superato. Si potrebbe mettere in discussione, una volta scartate le rappresentazioni ridondanti, poco economiche, quale tra le altre rappresentazioni individuate sia preferibile inviare a Brioshi:  $5x+6y=78$  e  $9x+3y=78$  oppure  $5x+6y=9x+3y$ ? A questo punto si potrebbe ragionare sul fatto che entrambe le proposte sono una traduzione della situazione, ma che la seconda non sarebbe possibile senza le prime due. Condivido le osservazioni. Aggiungo che le prime due scritture sarebbero gestibili (da una classe 'esperta') come un sistema di due equazioni a due incognite, la terza non permetterebbe a Brioshi di trovare il valore delle due incognite.*

<sup>34</sup> *Il terreno è molto scivoloso. Non vedo particolare interesse in tutti e mi sembra che i pochi che seguono, giustamente, non capiscano dove voglio arrivare. In generale questa attività è stata poco partecipata dall'intera classe e, probabilmente, i pochi che hanno partecipato erano focalizzati a risolvere il problema. Mi fermo perché non ho il tempo di riuscire a spiegare le soluzioni di un sistema di due equazioni a due incognite, ma mi ripropongo di farlo in maniera puramente procedurale in una prossima lezione per mostrare loro come ottenere la soluzione. Non credo che ciò che si ripropone di fare l'insegnante sia d'aiuto. Forzare la mano sul versante procedurale non paga. Come ho scritto in altre occasioni, il docente è il timoniere, ma ai remi ci sono gli alunni e, nel bene e nel male, sono loro che imprimono velocità alla nave. L'insegnante esce scontenta dalla lezione, ma da questo diario si possono trarre spunti di riflessione molto importanti, sui quali torneremo nel nostro prossimo incontro.*