18/01/2023

Commenti Insegnante di classe
Commenti Giancarlo Navarra

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe è composta da 23 alunni, 14 femmine e 9 maschi. Sono presenti due alunni con DSA e un'alunna disabile.
La classe è stata assegnata alla prof. A. quest'anno scolastico e si è mostrata ad avere diverse lacune per quanto riguarda gli apprendimenti dello scorso anno scolastico. Nonostante ciò si dimostra molto propositiva e con interesse verso la matematica in particolar modo se viene presentata sotto forma di gioco e sfida.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: Dopo un lungo ripasso riguardante i problemi di geometria con i segmenti è stato evidenziato come gli allievi abbiano ancora difficoltà nel tradurre il linguaggio naturale in linguaggio matematico. L'attività è stata quindi proposta a tutto il gruppo classe.
L'insegnante ha introdotto l'esistenza e le caratteristiche di Brioshi presentandolo come un personaggio digitale appartenente al prof. Navarra[1] e con il quale potremo lavorare scrivendo problemi matematici. L'idea del personaggio digitale è stata introdotta in quanto i ragazzi sono sempre più attratti dalla tecnologia che non da un "amico di penna". Infatti hanno subito chiesto se fosse un'App con la quale giocare.
Prima di arrivare però allo scambio di problemi e della loro risoluzione con Brioshi, è stata introdotta l'importanza della traduzione da linguaggio naturale a linguaggio matematico e viceversa.
Gli alunni si approcciano per la prima volta al progetto Aral e hanno partecipato a una lezione tenutasi, alla fine di ottobre dal Prof. Navarra nella quale è stata messa in evidenza la corrispondenza delle lettere con le cifre, delle parole con i numeri e della punteggiatura con i segni. Inoltre è stato introdotto il segno di uguaglianza come indicatore di relazione di equivalenza e non solo come operatore direzionale.

IL PROBLEMA: Tradurre in linguaggio matematico[2] A tre aggiungi due.

. .[3]

1. *L'insegnante scrive la frase alla lavagna e chiede alla classe di tradurla utilizzando il linguaggio matematico.*
2. *Le traduzioni sono state trascritte alla lavagna e poste in discussione:*
   3+2; 32; 23; 2+3; 3-2; 5[4]
3. *I ragazzi che hanno alzato prima la mano sono quelli che erano presenti alla lezione del prof. Navarra. L'intraprendenza dei compagni nel rispondere ha stimolato anche i più timidi, facendo sì che tutti proponessero la propria traduzione che poteva anche essere simile a quella di un compagno.*
4. Melissa: Io eliminerei la traduzione 5 perché non viene chiesto il risultato.[5]
5. Simone: Non può essere 2+3 perché bisogna aggiungere due a tre.
6. Enrico: Non può essere 3-2 perché dice di aggiungere.

---

[1] *Commenterò più avanti questa frase su Brioshi.*
[2] *Manca la consegna, che quest'unica volta inserisco. Ma mi pongo la domanda: in sua assenza, è chiaro agli alunni cosa devono fare? Può rimanere sottintesa? Data l'inesperienza, mi sembra inopportuno non evidenziarla.*
[3] *Non le nego che la progettazione dell'attività, la scelta dei termini, e del percorso rielaborato a seconda delle risposte dei ragazzi, mi è risultata complessa e spero di riuscire a capire bene se sto andando nella direzione giusta dai suoi commenti. Anche la stesura del diario non è risultata facile nonostante abbia letto diversi diari scritti da altri docenti.*
[4] *È interessante notare come i pochi presenti alla lezione del prof. Navarra hanno evitato di scrivere 3+2= oppure 3+2=5 e abbiano tradotto esattamente ciò che era presente nella frase la quale non indicava di scrivere il risultato. È vero, è interessante. Pongo all'insegnante una domanda, che potrebbe condividere con colleghi della scuola secondaria, che magari non partecipano al Progetto ArAl: che atteggiamento hanno loro leggendo il diario, di fronte alle proposte di traduzione '23' e '32'? Le 'bypassano' attribuendone la responsabilità ai docenti della primaria? D'accordo, può essere, ma loro, di fronte a queste scritture, come interverrebbero? Come fa l'insegnante in questo caso (7) che suggerisce 'd'ufficio' la differenza fra 'aggiungere' e 'attaccare'? Rimango molto stupito vedendo che in seconda secondaria questa diversità di significato in ambito matematico non è stata acquisita. Non mi dilungo perché non conosco la classe, non so quanti abbiano tradotto in quel modo, chi lo abbia fatto, eccetera. Ritengo che esprima, comunque, dei nodi che sarebbe necessario affrontare quanto prima in riflessioni comuni assieme agli alunni, facendo emergere attraverso le loro parole queste e altre incertezze linguistiche. Il dubbio che mi/le pongo è:* sono casi o sintomi*?*
[5] *In merito al termine usato l'insegnante dovrebbe approfondire, attraverso lo studio e l'esperienza, una sorta di proporzione terminologico-concettuale: 'risultato : pensiero procedurale = prodotto : pensiero relazionale'.*

7. *Per quanto riguarda le traduzioni matematiche 32 e 23 è intervenuta la docente*. In matematica 'aggiungere' significa 'addizionare' e non come in italiano 'attaccare.[6]
8. Simone: Altrimenti ci sarebbe stato scritto "alla cifra 3 aggiungi la cifra 2".
9. I: Bene, ricordiamo che la cifra è la lettera e il numero la parola.[7]
10. *Viene proposta un'ulteriore frase.*

IL PROBLEMA: Aggiungi 12 a 9.

11. *Viene chiamato ad intervenire Massimo che sembrava assorto nei suoi pensieri.*
12. Massimo: 129.
13. Giada: 129.
14. Massimo: Ah no, aspetti prof. volevo dire 21.
15. Leonardo: 912.
16. Melissa: 12+9.
17. Ryan: 9+12.
18. *La docente interpella tutti gli allievi con la mano alzata che si contendono le scritture 12+9 e 9+12 fino all'ultimo intervento di Rebecca che trascrive la frase con il numero 219.*
19. I: Analizziamo insieme. Come prima, 129, 912 e 219 sono dei numeri composti dalle cifre 1, 2 e 9. Massimo ha proposto 21.
20. *L'insegnante non ha ancora finito la frase quando dall'angolo si sente: "è il risultato[8]".*
21. I: Infatti la frase non è: "Aggiungi 12 a 9 e scrivi il risultato" o "Qual è il risultato di 12 aggiunto a 9?" Vero?
22. *L'insegnante scarta le traduzioni matematiche non appropriate e sulla lavagna rimangono 12+9 e 9+12. Si invita a decidere quale sia la traduzione corretta e perché. Gli allievi sono molto perplessi perché vedono nel linguaggio naturale il numero dodici alla sinistra del numero 9.[9] L'insegnante legge nuovamente e lentamente la frase soffermandosi su "a 9" e chiedendo quindi chi viene prima. A quel punto tutti concordano che la traduzione corretta è 9+12.*
23. Pietro: Infatti nell'esercizio precedente era "a 3 aggiungi 2".
24. Tutti: Ahhh!
25. I: Per essere corretta la risposta 12+9 avremmo dovuto avere scritto "Aggiungi 9 a 12", oppure, come abbiamo visto prima "A 12 aggiungi 9".[10]

IL PROBLEMA: Aumenta di 8 il 14.

26. I: Proseguiamo… Aumenta di 8 il 14. Han Yu, come lo scriveresti?
27. *Momento di esitazione.*
28. Han Yu: Non lo so.
29. I: Dai, come non lo sai. Prova a tradurre sulla base degli esercizi e commenti precedenti.

---

[6] *Non sono d'accordo con l'intervento, e mi collego al mio commento (4-r.2). Il progetto ArAl assegna un'importanza decisiva agli aspetti linguistici. Non so come lei abbia spiegato le rappresentazioni 32 e 23 ma sono certo, per lunga esperienza, che interventi apparentemente chiarificatori come questo, pur legittimi, siano inefficaci perché hanno una fisionomia 'a senso unico' docente □ alunni. Suggerisco la lettura del costrutto di Brousseau, fatto proprio dal Progetto ArAl, di* Devoluzione *e, per una panoramica generale, i Capitoli del mio libro* I.2 Costrutti teorici di riferimento *e* I.3 La conduzione delle discussioni.

[7] *In questi casi è molto più efficace se l'insegnante, invece di intervenire a correggere la rotta (è un comportaento molto frequente: 7, 9, 22, 25, 49, 62, 70, 82, 92, 98, 111, 145, 164, 166) , rivolgesse la richiesta di farlo alla classe. Rallenta un po' il lavoro, ma è molto più efficace i termini di costruzione di competenze significative.*

[8] *È stato molto soddisfacente notare come i ragazzi si ricordassero dall'intervento del prof. Navarra che il "fa" è da usare con parsimonia.*

[9] *Questa difficoltà di interpretazione la incontro spessissimo. Ne parlo infatti sin dalle prime pagine del mio libro, nel capitolo* I.1. Avviare sin dall'inizio della scuola primaria, con anticipazioni importanti alla scuola dell'infanzia, attività di tipo pre-algebrico, *nell'Episodio 2. È un ostacolo ben noto nella letteratura di ricerca in educazione matematica: l'ordine dei numeri nelle frasi espresse nei due linguaggi va invertito. La ragione principale (ve ne sono altre) che noi diamo a questa difficoltà è molto precisa: la scuola italiana (ma non solo) privilegia la logica dell'imparare gli aspetti* sintattici *a scapito di quelli* semantici. *Gli alunni non sono abituati ad interpretare le scritture perché, di base, non vengono guidati a lavorare sui significati. Per farlo, si dovrebbe accettare il fatto che un insegnante di matematica è, anche,* un insegnante di linguaggio matematico.

[10] *Anche qui, per le ragioni esposte in più commenti, non condivido l'intervento 'chiarificatore' dell'insegnante. Riemerge la questione della* devoluzione.

30. Han Yu: 8+14.
31. I: Con il simbolo di uguaglianza o senza?
32. Han Yu: Senza.
33. I: Perché? Perché nessuno scrive mettendo l'uguale alla fine della frase?
34. Melissa: Perché non chiede qual è il risultato.
35. I: Benissimo.
36. Leonardo: Non so, ma aumentare significa che si deve scrivere 14+8.
37. Eleonora: 14×8.
38. Aurora: 22.
39. Vittoria: 14+8.
40. Arianna 14+8.
41. Pietro: 14+8.
42. I: Perché Pietro scrivi 14+8? Perché lo dicono tutti?
43. Pietro: No.
44. *Pietro non ha ancora spiegato come mai per lui la traduzione corrisponde alla scrittura 14+8 quando Aurora che aveva scritto 22 rettifica la sua affermazione.*
45. Aurora: No, prof, 22 è il risultato.
46. Rebecca: Per me è 8×14.
47. I: Perché 14×8 e 8×14 non vanno bene?
48. Simone: Così significa aumenta di 8 volte (*riferendosi alla prima scrittura*).
49. *L'insegnante capisce che Simone intende sommare più volte lo stesso numero e scrive alla lavagna 14+14+14+14+14+14+14+14*[11].
50. I: Ci troviamo ancora di fronte alla solita scelta: 8+14 o 14+8? Quanti dicono la prima?
51. *Solo 3 mani si alzano.*
52. I: Rileggiamo: "Aumenta di 8 il 14" (*l'insegnante enfatizza "il 14"*), chi è il protagonista?
53. Allievi *in coro*: Il 14.
54. I: Quindi "the winner is"...
55. Allievi *in coro*: 14+8.
56. I: Vedete come non è così immediato tradurre il linguaggio naturale al linguaggio matematico? Pietro, è abbastanza divertente?[12]
57. Pietro: Sì, bello.

IL PROBLEMA: Raddoppia il 6.

58. *L'insegnante scrive la frase alla lavagna.*
59. *Le traduzioni sono state trascritte alla lavagna e poste in discussione:*
    6×2; *6+6;* *2×6;* *6^2*
60. Han Yu: No, prof. Non 6 alla seconda perché è 6×6.
61. *Tutti gli allievi concordano sul fatto che le prime tre forme sono corrette.*
62. I: Raddoppiare infatti significa moltiplicare per 2.[13]

---

[11] *Purtroppo non ci siamo soffermati sul fatto che nelle otto volte è contato anche il primo 14, quindi che la frase detta da Simone non concorda con quella che potrebbe essere "aumenta di 14 il 14 per 7 volte". Penso che sia stato meglio così perché, dal mio punto di vista, la direzione presa dall'insegnante con il suo intervento non affronta il vero nodo degli interventi degli alunni (37, 46, 48), che non è matematico ma linguistico. Sin dall'intervento (37) avevo capito che la proposta di Eleonora derivava dall'errata interpretazione del testo da tradurre come 'Aumenta di 8 [volte] il 14'. La scarsa attenzione dedicata dagli insegnanti di matematica al controllo dei significati dei numerosi termini in uso (aumentare, doppio, metà, diminuire, dimezzare, ecc) fa sì che si dia per scontato che essi siano davvero ben compresi, cosa che di fatto non è. La ricerca, ancora negli anni '80 e '90, si è occupata a lungo di questi aspetti. È per questa ragione che il Progetto ArAl sostiene la necessità di farlo, sin dalla prima primaria. Dalla frase di Simone (48) "Così significa aumenta di 8 volte" traspaiono due elementi di criticità: il riferimento eccessivo dato alla scuola primaria alla moltiplicazione come addizione ripetuta e lo stereotipo che la moltiplicazione sia un'operazione che fa sempre aumentare il numero moltiplicato. Sono entrambi l'esito di un'attenzione concentrata sugli aspetti procedurali e poco sugli aspetti relazionali e linguistici. Al posto dell'insegnante non avrei scritto la somma dei 14, ma avrei chiesto a Simone stesso di farlo, in modo che lui stesso giustificasse il senso di ciò che dice, che non è chiaro nemmeno a lui.*

[12] *Questa domanda, che ai ragazzi è sembrata fuori luogo, è stata posta a Pietro perché all'inizio della lezione ha chiesto all'insegnante se oggi si fosse svolta una lezione divertente.*

[13] *Un'osservazione a proposito delle scritture in (59) '6×2' e '2×6': '6×2' è la traduzione moltiplicativa basata sulla definizione tradizionale della moltiplicazione dove il primo numero è il moltiplicando, ossia il numero su cui si agisce,*

IL PROBLEMA: Moltiplica 4 per 6.

63. *I ragazzi fanno un attimo di pausa e anche gli allievi che sono più intimoriti dalla matematica esclamano: "Per ora è facile".*
64. *La docente scrive la frase alla lavagna e iniziano gli interventi degli alunni.*
65. Massimo: 6×4.
66. Simone: 4×6.
67. Melissa: 4+4+4+4+4+4.
68. *Leonardo bisbiglia 4 per 6 poi esclama: "Quattro alla sesta".*
69. *La docente scrive 4^6 alla lavagna.*
70. I: Perché non sei stato su 4×6 che andava bene?[14]
71. *Gli allievi sorridono.*
72. Viola: Anche Melissa ha suggerito 4 alla sesta… ah no prof. perché è più.[15]
73. I: È vero che 4×6 è come scrivere 4+4+4+4+4+4, ma noi usiamo la moltiplicazione per non sommare tante volte[16].
74. *Per qualche allievo non è differente il 4×6 dal 6×4 e non capiscono perché si sia indicata come traduzione corretta la risposta di Simone. La docente quindi rilegge la frase nel seguente modo: "moltiplica il 4 per 6". A questo punto tutti concordano che bisognerebbe scrivere 4×6.*
75. *Come evidenziato dall'allievo Pietro "il" indica il "protagonista", quindi il numero che va scritto prima.*[17]

IL PROBLEMA: Moltiplica per 5 il 3.

76. I: ora immagino sappiate benissimo come tradurre.
77. Alessandro: Per me è 3^5.
78. *Brusio di dissenso in classe.*
79. Viola: C'è scritto moltiplica.
80. I: "Moltiplica" che operazione indica?
81. Alessandro: Per.[18]

---

il secondo il moltiplicatore, cioè l'operatore che agisce sul moltiplicando. '2×6' è una traduzione moltiplicativa più evoluta, centrata sull'azione del duplicare *e connessa al concetto di* multiplo *di un numero (che generalizza il duplicare, il triplicare, il quadruplicare un numero). Interpretare il 'doppio di un numero' come 'il doppio del secondo fattore' induce alla generalizzazione: supponendo infatti che gli alunni sappiano rappresentare un numero generico mediante una lettera, ad esempio a, possono parafrasare la locuzione 'il doppio di un numero' come '2×a' o come '2a' (rappresentazione consueta, ma più opaca in termini di significato). Invito a leggere il capitolo* IV.5 Promuovere il confronto tra parafrasi*; di 'doppio' si parla soprattutto a pag. 211.*

[14] *Ripeto un'osservazione fatta più volte: l'insegnante interviene troppo. Se Leonardo pensa alla potenza vuol dire che ha nella mente una misconcezione. Come interpreta allora le parole dell'insegnante?: in che senso 'andava bene'? Perché 'andava bene'? Suggerisco nuovamente la lettura del capitolo I.3 La conduzione delle discussioni in cui fra l'altro scrivo (p. 53)* 'Il ruolo istituzionalizzante dell'insegnante – cioè quello che collega la sua attività al sapere 'ufficiale' rappresentato dall'obiettivo di ogni sua lezione – non può essere imposto, ma va esercitato attraverso il coinvolgimento degli allievi'.

[15] *Solita osservazione: avrei restituito all'alunna stessa la responsabilità di spiegare le parole "perché è più".*

[16] *Anche in questo caso, per non tediarli, non ho puntualizzato troppo che comunque il testo contiene la parola moltiplica. Ho dato per scontato, forse sbagliando, che avessero capito che l'esercizio era tradurre non trovare un'operazione. Non mi è chiara la giustificazione 'per non tediarli'. Gli alunni rischiavano di annoiarsi a fare cosa? Inoltre: aveva l'insegnante negoziato in modo significativo il significato del termine 'tradurre'? Se io venissi in classe e chiedessi cosa vuol dire per loro 'tradurre in linguaggio matematico' cosa risponderebbero (so bene quanto la domanda sia complessa, ma andrebbe fatta)? Ultima osservazione sul termine 'esercizio': chiedere di tradurre queste frasi non è un 'esercizio', perché non si verifica una regola o un teorema incontrato in precedenza, ma si pone ogni volta la classe di fronte ad ostacoli diversi, e soprattutto si richiede agli alunni di appoggiarsi a conoscenze e a competenze affrontate nel corso degli anni tra le quali devono cercare quelle utili a capire come tradurre. Pone compiti davvero molto impegnativi, sia agli alunni che al docente.*

[17] *'Moltiplica 4 per 6' esprime un comando operativo, quindi lascia trasparire un retropensiero* procedurale*: cosa si fa per ottenere il sestuplo di 4? Eviterei quindi di parlare di numero 'protagonista'; direi che in questo caso, la traduzione '4×6' è più rispettosa della semantica della frase, in cui il 4 sta al primo posto (vedi anche il mio commento (13-r.62).*

[18] *Suggerisco di non accettare risposte così povere, ma di puntare costantemente a verbalizzazioni ben formate. Invito alla lettura del capitolo* IV.3 Promuovere verbalizzazione e argomentazione*: 'per' è il nome di un simbolo matematico'. Il minimo sindacale sarebbe almeno "Una moltiplicazione".*

82. I: Altrimenti sarebbe "eleva". Giusto.[19]
83. *Assenso della classe.*
84. Rebecca: 5×3?
85. I: È una domanda o un'affermazione?[20]
86. Rebecca: 5×3.
87. Aurora: 3×5.
88. Melissa: Lo volevo dire io.
89. I: Melissa oggi è lanciatissima.
90. Pietro: è 3×5 perché c'è "il" sul 3.
91. *Qualcuno ancora pensa più all'uguaglianza tra operazioni che alla traduzione. Infatti viene proposto che 3×5=3+3+3+3+3.*
92. I: Certo, è vero, che la moltiplicazione agevola le addizioni con addendi uguali, come anche l'elevamento a potenza moltiplicazioni con fattori uguali.[21]

IL PROBLEMA: A 15 sottrai 4.

93. Viola: 15-4.
94. Erjona: 15-4.
95. Pietro: 4-15. No, sto scherzando.
96. Rebecca: Cos'è, viene -14?
97. *Caos generale. I ragazzi pensano al risultato e si spaventano di un numero negativo.*[22]
98. I: Ragazzi, è come con i numeri decimali, che per voi sono "sbagliati". Non è che ho detto di dirmi il risultato e se può esistere o no un numero negativo.[23]
99. I: Qualche altra opzione?[24]
100. Melissa: 15-2-2.
101. Pietro: $15\text{-}2^2$.
102. Rebecca: 15-1-1-1-1.
103. Enrico: Anche 15-3-1.
104. Melissa: $15\text{-}1^4$.

---

[19] *Faccio ancora notare quante volte è l'insegnante che 'spiega' invece di richiedere agli alunni di farlo. Argomentare è un'operazione linguisticamente complessa, che va continuamente promossa e motivata dall'insegnante. Non può ridursi a risposte di poche parole (77, 79) o a risposte in forma di domanda (84). La domanda (85) è corretta, ma dovrebbe essere seguita da una riflessione collettiva sull'incertezza che traspare da questo modo di rispondere, in generale molto frequente.*

[20] *Gli allievi sia in matematica sia in scienze tendono a rispondere alla domanda con una domanda. Tutte le volte l'insegnante chiede se è un'affermazione o una domanda. D'accordo ma, come ho scritto nel commento precedente, proprio perché questo atteggiamento è frequente, va affrontato a livello di discussione collettiva, anche in più occasioni. Ripeterlo 'tutte le volte' significa non affrontare il problema alla radice, e se non lo si fa temo che sia inevitabile che l'atteggiamento si ripresenti (139). Riemerge ancora una volta l'opportunità di affrontare il costrutto 'devoluzione'.*

[21] *Come prima, l'insegnante si rende conto solo ora che avrebbe dovuto ribadire il fatto che stiamo solo facendo delle traduzioni da linguaggio naturale al linguaggio matematico. Non credo che il punto sia 'ribadire', ma condividere con la classe un contratto didattico basato sul* tradurre *e non sul* risolvere*. Temi chiave in questo ambito si trovano nel capitolo* I.5 Condividere il quadro teorico con gli alunni.

[22] *È la stessa reazione generale quando risolvono i problemi di geometria e dicono che il problema è sbagliato perché "viene un numero con la virgola". Il docente continua a ribadire che i numeri sono numeri e se sono decimali non significa che siano "sbagliati". Normalmente l'insegnante fa notare che quando il prodotto costa 5,45 euro non lasciano 6 euro alla cassiera perché il 5,45 (numero decimale) è "sbagliato" o come dicono a volte "non esiste" o "non può essere". Conosco bene la situazione. La domanda che pongo è: cosa c'è che non va se l'insegnante è costretta a 'continuare a ribadire' e normalmente 'a far notare' e, a quanto pare, non ottiene il riscontro che si aspetta? La risposta non potrebbe essere che è proprio quello, che lei non deve fare? Cioè: sostituire ad un evidentemente sterile 'ribadire' un coinvolgimento attivo degli alunni nella riflessione sui loro ostacoli? (che in questo caso possiamo definire* epistemologici, *perché toccano concetti fondativi della conoscenza matematica come gli insiemi numerici). L'allusione alla cassiera è perfetta, ma la fa l'insegnante, ancora una volta l'adulto che sa dove vuole arrivare. Ma come rispondono gli alunni se lei chiede a loro di argomentare sul perché considerino sbagliato se 'viene la virgola'?*

[23] *Vedi molti miei commenti precedenti.*

[24] *Non mi è chiara la ragione di questa domanda: introdurre rappresentazioni non canoniche di 4? Ma allora non sono più traduzioni della frase proposta, e cambia lo scopo dell'attività.*

105. *L'insegnante guarda Melissa e strabuzza gli occhi.*
106. *I compagni hanno un momento di ilarità e suggeriscono che 1 alla quarta è uguale a 1 e non a 4.*
107. *Interviene quindi Gaia che suggerisce di tradurre la frase con 15-4[1].*
108. *L'insegnante ha piacevolmente scritto queste traduzioni per far comprendere come attuare con il procedimento contrario, ovvero tradurre dal linguaggio matematico a quello naturale.*
109. I: Adesso però vi chiedo di tradurre le vostre "frasi matematiche" in frasi in italiano[25] e osservare se coincidono con la frase a 15 sottrai 4.
110. I: A 15 sottraggo 4, quindi quella corretta è 15-4.
111. I: 4-15 non va bene perché la frase non dice "A 4 sottrai 15".[26] Ok? Iniziamo da 15-2-2, Melissa. Come potrei scrivere in linguaggio naturale?
112. Melissa: A 15 sottrai 2 e 2.
113. I: Ma come scrivo 2 e 2?
114. Gaia: A 15 sottrai 2 due volte.
115. *Fermento generale in classe, tante mani alzate.*
116. Pietro: A 15 sottrai 2+2.
117. I: Possiamo scrivere metà e metà?
118. *L'insegnante scrive alla lavagna la frase "a 15 sottrai 2+2" e specifica che 2+2 non è in italiano, ma è sempre linguaggio matematico.*
119. Rebecca: Ma 2+2 fa 4.
120. I: Ho capito, ma noi non stiamo cercando un risultato[27].
121. Melissa: A 15 sottrai 2×2;
122. I: Come possiamo tradurre due per due?
123. Aurora: A 15 sottrai due volte due.
124. I: Oppure? In italiano che parole usiamo per dire se qualcosa è moltiplicato per due o per tre e così via?
125. *Qui la classe ha iniziato a utilizzare qualsiasi operazione che potesse dare 4. L'insegnante ha quindi ribadito di focalizzare l'attenzione sui vocaboli usati in italiano. Vedendoli perplessi l'insegnante inizia a fare un esempio: "guardo le figurine… non l'ho, non l'ho, questa l'ho, quest'ultima è?"*
126. Aurora: … il doppio.
127. I: A 15 sottrai…
128. Allievi: Il doppio di due.
129. I: Se fosse stato 3 volte?
130. Allievi: Il triplo.
131. *Gli allievi sono molto soddisfatti di essere arrivati alla traduzione corretta.*
132. I: Quindi Pietro, come posso tradurre 15-1-1-1-1?
133. Pietro: A 15 sottrai il quadruplo di 1.
134. I: Vedete che tradurre in italiano non è così immediato.
135. Pietro: No, no, è difficilissimo.
136. *Momento di pausa.*
137. Simone: Nel prossimo tema di italiano scrivo così.[28]

IL PROBLEMA: Dividi per 9 il 45.

138. Erjona: 9:45.
139. Giada: 45:9?
140. I: È una domanda o un'affermazione?
141. Giada: affermazione.

---

[25] Invito a parlare, molto naturalmente, di 'linguaggio matematico' e 'linguaggio naturale'. Le due allocuzioni dovrebbero entrare nel lessico quotidiano della classe.

[26] Sono noioso nel porre in evidenza così tante volte lo stesso nodo, ma è un aspetto di metodo importante: perché è sempre l'insegnante che deve chiarire le cose?

[27] Risulta sempre molto naturale cercare il risultato, anche se hanno capito che se non c'è l'uguale non viene richiesto. Non è soltanto perché non c'è l'uguale, è il punto di vista che resta, comunque, procedurale. La 'naturalezza' della ricerca del risultato va affrontata: non credo che l'abitudine sia 'naturale', ma che sia stata indotta nell'alunno, sin da molto piccolo, attraverso le gratificazioni per le sue abilità mostrate nel conteggio e nei primissimi calcoli. Il superamento di questo atteggiamento – che, intendiamoci, è ben comprensibile - possiamo definirlo 'culturale': va educato, interpretato, discusso assieme, analizzato ogni volta che si ripresenta, a maggior ragione se si sta lavorando per guidare l'alunno verso un modo diverso di pensare la matematica e i suoi linguaggi.

[28] Questa affermazione fa capire come l'attività sia gradita e sia ritenuta molto utile per la quotidianità.

142. I: Convinta?
143. Giada: Sì, sì.
144. Pietro: Prof, quarantacinque: nove punto esclamativo.[29]
145. *La docente spiega ad Erjona come mai la sua traduzione non sia corretta[30]. I compagni l'aiutano dicendo che il "soggetto" (quindi chi viene prima[31]) è 45 perché preceduto da "il".*

IL PROBLEMA: A 12 aggiungi 6 e indica il risultato.

146. *Appena la docente scrive la frase alla lavagna arriva la risposta.*
147. Rebecca: 12 + 6 = 18.
148. *Quasi tutti esclamano, "lo sapevo".*
149. Melissa: 18.
150. *Si discute come mai non va bene scrivere solo 18 e come dovremmo scrivere affinché venga indicato solo 18. Dopo qualche perplessità viene elaborato in maniera del tutto autonoma: "indica il risultato di 6 aggiunto a 12".*
151. I: Oppure potrei usare una?
152. *Momento di caos.*
153. In maniera scherzosa l'insegnante chiede cos'è che usano molto gli studenti quando l'insegnante fa una domanda.
154. Allievi: Domanda.
155. Aurora: Quanto fa 12 + 6 ?
156. *Viene evidenziato dalla docente come nella frase ci sia la congiunzione "e", quindi abbiamo due parti, il processo e il prodotto.*

IL PROBLEMA: Dimezza 10.

157. Leonardo: 10-5.
158. Gaia: 10:2.
159. Rebecca: 10:5.
160. Vittoria: 10/2.
161. Aurora 10/5.
162. I: Cosa significa dimezzare?
163. Melissa: Metà.
164. I: Dividere in due metà.[32] Quindi posso dividere per 5?
165. Allievi: No.
166. I: È vero che 10-5=10:2, ovvero abbiamo un'uguaglianza in quanto stiamo usando forme non canoniche del numero 5, forma canonica[33], ma non stiamo traducendo "dimezza". Quindi 10-5 non è la traduzione. Poi se dite che 10-5 equivale a 5 come 10:2 equivale a 5, allora è corretto se consideriamo il prodotto finale. Considerando la linea di frazione come diviso allora possiamo accettare 10/2.
167. *La docente propone quindi la frase "Dimezza 10 e scrivi il risultato" e dopo aver tradotto correttamente chiede quale sia la differenza tra 10:2=5 e 10-5=10:2.*
168. Aurora: Nella prima c'è l'operazione e poi il risultato.
169. I: Quindi l'uguale visto come operatore.
170. Vittoria: Nella seconda è un'uguaglianza.[34]

---

[29] *L'insegnante lascia che ci sia qualche momento di ilarità, convinta che giovi alla interiorizzazione del concetto.*

[30] *L'insegnante avrebbe potuto rilanciare le questioni ai singoli alunni: "Spiega a Erjona perché la sua proposta non va bene". Naturalmente il compito per l'alunno non è semplice, ma d'altro canto il miglioramento nell'argomentazione può avvenire solo se il contratto didattico prevede che essa diventi uno degli aspetti della quotidianità della classe. Cioè: se essa diventa un valore comune a docente e alunni.*

[31] *Ciò che viene prima è stato battezzato durante la lezione come "protagonista" o "soggetto".*

[32] *Melissa non ha risposto spiegando cosa significa 'dimezzare', ha detto semplicemente (162) "Metà". L'insegnante, che interpreta "Dividere in due metà", non fa il suo interesse, nel senso che permette all'alunna di rimanere della convinzione che l'insegnante si accontenta* comunque*, indipendentemente dalla qualità della risposta.*

[33] *La forma canonica e non canonica di rappresentare un numero è stata introdotta dal prof. Navarra durante l'incontro svoltosi a ottobre 2022. Immagino che il concetto sia stato ripreso e approfondito in seguito, qui non è chiara la competenza della classe su questi temi nodali.*

[34] *Attenzione, non è così. Se la classe adottasse un punto di vista relazionale, vedrebbe allo stesso modo entrambe le scritture come* uguaglianze fra rappresentazioni dello stesso numero*, ed è inessenziale che ai due lati dell'uguale esse siano canoniche o non canoniche. Attribuire a 10:2 il significato di operazione e a 5 quello di risultato esprime il punto di vista procedurale, che è quello che si intende superare introducendo quello relazionale; gli alunni andrebbero*

171. Pietro: Come >, <, =.
172. I: Come avete visto in prima media, un confronto.
173. I: Quindi possiamo dire che ciò che c'è da una parte è uguale a ciò che c'è dall'altra parte.
174. Aurora: Sono bilanciate.

IL PROBLEMA: La differenza di due segmenti misura 50 cm.[35]

175. I: Cosa dite se scrivo "La differenza di due segmenti misura 50 cm"?
176. Melissa: Ma non dobbiamo sapere quanto misura il segmento per calcolare?
177. I: No, non stiamo svolgendo un problema. Il testo ci chiede quanto misurano il segmento 1 e il segmento 2?
178. Melissa: No.
179. I: Usiamo semplicemente i segmenti per continuare con la traduzione.
180. Ryan: AB-CD=50cm.
181. *Tutti sono d'accordo.*
182. I: Proviamo ora a tradurre CD+50cm=AB affinché si costruisca il testo di un problema.
183. Melissa: Aggiungendo 50 cm al segmento CD trovo AB.
184. Vittoria: La misura del secondo è uguale alla somma tra 50 cm e il primo.[36]

---

guidati ad esprimersi dicendo "10:2=5 è l'uguaglianza fra il quoziente fra 10 e 2 e 5"; "10-5=10:2 è l'uguaglianza tra la differenza fra 10 e 5 e il quoziente fra 10 e 2 (o la metà di 10)".

[35] *Viste le difficoltà nello scrivere i dati nei problemi con i segmenti, la docente ha usato questo momento di traduzione per fare esempi che incontrano nei libri di testo e aumentare la complessità dell'attività. Lo spunto è molto interessante e va senz'altro ripreso, ma è necessario che si evolva tutta la situazione in cui esso si colloca. In sintesi (approfitto per fare un bilancio dell'attività così come emerge dal diario):*

- *va affrontata in modo efficace la* dualità procedurale/relazionale *perché è evidente che gli alunni non la conoscono; questa è una condizione imprescindibile (*Cap. V.4 Dal pensiero procedurale al pensiero relazionale*), e comporta che, dal punto di vista metodologico, l'insegnante negozi un contratto didattico che preveda la condivisione del quadro teorico con la classe (*Cap. I.5 Condividere il quadro teorico con gli alunni*);*
- *va affrontata in modo altrettanto efficace la* dualità risolvere/rappresentare *perché è evidente che gli alunni non l'hanno mai affrontata realmente; non è possibile che si ottengano risultati significativi se la classe è ancora intrappolata in una 'gabbia procedurale' (espressa, in questo caso, da Melissa (176, "Ma non dobbiamo sapere quanto misura il segmento per calcolare?"). Temo che risposte 'come quella dell'insegnante (177, "No, non stiamo svolgendo un problema") abbiano poca efficacia perché sono risposte* locali*, mentre invece bisognerebbe costruire, con gradualità, un ambiente che costruisca competenze* strutturali *stimolando l'alunno a cercare di esprimere i suoi dubbi e quindi ad argomentare (*Cap. V.5 Problemi: rappresentare vs risolvere*);*
- *Brioshi deve diventare un autentico 'compagno di penna algebrica' credibile e stabile; al centro della confidenza con lui dev'essere l'alunno, Brioshi non è un 'personaggio digitale appartenente al prof. Navarra', né tanto meno 'un'App con la quale giocare' (*Cap. IV.7 Brioshi, l'amico di penna algebrica*);*
- *va costantemente analizzato, precisato, approfondito il concetto di 'tradurre'; è molto più ricco di quanto non traspaia dal diario (*Cap. IV.4 Promuovere la riflessione sui linguaggi e la traduzione fra linguaggio naturale e linguaggi della matematica e viceversa*);*
- *è necessario che l'insegnante modifichi (con tutta la gradualità necessaria) la sua conduzione delle discussioni, che oltretutto devono diventare* vere *discussioni; per esempio domande come (177) "Il testo ci chiede quanto misurano il segmento 1 e il segmento 2?" prevedono risposte secche 'Sì' 'No', non argomentate, e quindi poco significative (*Cap. I.3 La conduzione delle discussioni*);*
- *Gli alunni devono acquistare una loro autonomia nella gestione delle attività, ed abituarsi a non essere costantemente dipendenti dall'insegnante; il loro ruolo, opportunamente guidato, può diventare molto più importante (*Cap. I.6 Guidare gli alunni a diventare 'produttori di pensiero matematico'*).*

[36] *L'obiettivo di un commentatore ArAl al diario di un insegnante partecipante al progetto è quello di essere mediatore fra il modo in cui si è sviluppata l'attività e una teoria che vede al suo centro lo sviluppo del pensiero* pre-algebrico *o, detto in altri termini, del pensiero* relazionale. *Dico questo perché le frasi di Melissa (183) e Vittoria (184) mi permettono ora di immaginare come potrebbe intervenire l'insegnante maturando la conoscenza del Progetto ArAl, e quindi maturando un atteggiamento consapevolmente critico verso il pensiero procedurale, proiettato verso quello relazionale. Vediamo quindi perché questi interventi sono paradigmatici di questo cambio radicale di punto di vista.*
L'insegnante riporterebbe una sotto l'altra le due frasi alla lim:

Melissa: Aggiungendo 50 cm al segmento CD trovo AB.
Vittoria: La misura del secondo è uguale alla somma tra 50 cm e il primo.

185. *A parte queste due formulazione non ci sono state altre proposte*[37] *e in generale c'è stata distrazione e poca partecipazione per questo problema*[38].

IL PROBLEMA: Qual è il risultato tra 3 e 14.[39]

186. I: Sofia?
187. Sofia: 3+14=17.
188. Melissa: 17.
189. *A questo punto tutti gli allievi hanno concordato sulla correttezza di "17" perché chiedeva il risultato. È stato comunque detto che anche la prima era accettabile in quanto per arrivare al prodotto finale bisognava seguire un processo.*

IL PROBLEMA: Tradurre le frasi date in espressioni aritmetiche.

190. *L'attività si è conclusa assegnando delle frasi da tradurre in espressioni aritmetiche*[40]. *Gli allievi hanno dapprima lavorato in autonomia con la docente che girava tra i banchi nel caso avessero bisogno. In un secondo momento discutendo alla lavagna le loro proposte.*
Frasi assegnate:
   - *Addiziona i numeri 36 e 14 e dividi il risultato per 10.*
   - *Dividi per tre la differenza tra 27 e 6 e aggiungi 14 al risultato.*
   - *Addiziona 49 a 19 e dividi il risultato per la somma di 11 e 6.*
   - *Sottrai da 60 il doppio della somma di 15 e 7, dividi il risultato per 4 e sottrai 3.*[41]

Aprirebbe poi la discussione su queste due frasi chiedendo di confrontarle, devolvendo agli alunni il compito di elaborare la costruzione collettiva della conoscenza su di esse, limitandosi al ruolo di osservatore attivo e stimolatore di precisazioni, approfondimenti, chiarimenti.
Alunni che possedessero le competenze per farlo riconoscerebbero che la prima è una frase procedurale*, la seconda una frase* relazionale*. Argomenterebbero che quella di Melissa spiega l'operazione che si dovrebbe svolgere (aggiungere, cioè un'addizione) e il suo risultato; quella di Vittoria esprime la* relazione *fra le due rappresentazioni in termini di uguaglianza fra un numero sconosciuto (la misura del secondo segmento) e la somma fra 50 e la misura del primo.*

[37] *Tutti i ragazzi pensavano già alla possibile risposta e indicavano i dati del testo come se fossero già una domanda. Vista la difficoltà si è fatto un passo indietro e continuato con esercizi più graduali per lasciare la parte delle incognite e della formulazione di problemi per Brioshi per una lezione successiva.*

[38] *Sicuramente erano stanchi, ma forse non sono stata particolarmente chiara. Il punto era iniziare a far lavorare su modi di scritture matematiche che fossero equivalenti. Subito dopo un momento di pausa e usando AB=CD:2 e CD=2AB i ragazzi hanno puntualizzato che erano equivalenti anche se la prima andava tradotta con AB è metà di CD, mentre la seconda andava tradotta come CD è il doppio di AB. L'intenzione era quello di far capire che parlare di differenza o dire che un segmento supera l'altro di una certa misura fossero forme diverse per dire la stessa cosa. Questo è un punto in cui i ragazzi in generale sono molto deboli.*

[39] *C'è un refuso. La frase non può essere stata proposta così com'è scritta, e in essa è difficile vedere il concetto di 'traduzione'. È tipicamente procedurale, enfatizza l'idea del calcolo.*

[40] *L'inesperienza ha portato l'insegnante a proporre solo consegne procedurali. Solo una è relazionale (La differenza di due segmenti misura 50 cm),*

[41] *Quest'ultima è stata scritta correttamente da una sola alunna. Sarebbe importante vedere la traduzione.*