

15 dicembre 2023

1

Commenti *Insegnante di classe*

Commenti *Giancarlo Navarra*

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE: La classe 3^a B è composta da 26 alunni, 13 femmine e 13 maschi. Sono presenti 4 alunni stranieri, di seconda generazione, due alunni con BES e due alunni con certificazione L.104 di cui uno è straniero. La classe è vivace, non sempre attiva e partecipativa, dimostra un limitato impegno nella rielaborazione individuale dei concetti e/o conoscenze affrontate in classe. Ha lavorato con alcune tematiche Aral nei due anni precedenti con la stessa insegnante. È formato da due trascrizioni e costituito da due fasi: nella prima vengono proposte delle traduzioni, nella seconda viene presentato un problema che, potenzialmente, apre ad un sistema.¹ Gli alunni, purtroppo non tutti, conoscono costrutti come le dualità rappresentare/risolvere, trasparente/opaco e la rappresentazione canonica e non canonica di un numero; sanno riferirsi alla bilancia a piatti e quindi all'equazione e, in generale, ai suoi principi.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ: Dopo una lezione in classe con Giancarlo Navarra sulla traduzione in linguaggio matematico di alcune frasi si è passati alla rappresentazione di una situazione problematica che prevedeva l'utilizzo di due incognite e l'uso della bilancia come strumento risolutivo del problema per saggiare il grado di conoscenza e abilità dei ragazzi sulla traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico, sull'individuazione di relazioni tra gli enti, dei processi operativi e delle definizioni e proprietà. L'attività si svolge individualmente con confronto e discussione collettiva delle traduzioni prodotte.

1. L'insegnante proietta allo schermo la seguente diapositiva, chiedendo di rappresentare in linguaggio matematico le frasi delle attività preparatorie alla traduzione, individualmente sul proprio quaderno:

¹ Questo diario rappresenta la prosecuzione ideale di un diario, steso dalla stessa insegnante e relativo alla stessa classe (alla classe parallela 3 sez.A ma nel precedente anno scolastico 2022-23), per il quale avevo scritto il seguente commento: 'È il primo diario che testimonia l'applicazione in una classe del progetto di ricerca avviato nel 2022 all'interno del Progetto ArAl sull'Approccio ai sistemi di due equazioni a due incognite dalla quinta primaria'. Il progetto nasce dal fatto che numerosi docenti rilevavano come nelle prove INVALSI ci fossero numerosi test su problemi risolvibili anche con sistemi di equazioni, e chiedevano di affrontare questo tema. A nostra conoscenza, il tema non risulta presente in letteratura. La sua analisi ci ha portato a spostare l'attenzione, come approccio, alla traduzione dal linguaggio naturale e quello algebrico e viceversa, argomento ampiamente trattato dal Progetto ArAl. Si è deciso quindi di iniziare predisponendo famiglie di frasi che, sin dalla prima primaria, portassero insegnanti e alunni a riflettere, come preparazione al tradurre, sugli aspetti strutturali e semantici dei due linguaggi. Si è capito ben presto che queste attività sono importanti in sé nello sviluppare il pensiero relazionale, indipendentemente dal fatto che poi si arrivi o meno ai sistemi. Il diario riguarda una seconda secondaria che lavora dalla prima con la stessa insegnante, esperta in early algebra (ha ancora molto da imparare). È formato da tre trascrizioni e costituito da due fasi: nella prima vengono proposte delle traduzioni, nella seconda viene presentato un problema che, potenzialmente, apre ad un sistema. Come risulterà evidente dalla lettura, gli alunni (purtroppo non tutti) sono abituati ad argomentare in modo chiaro e a confrontarsi fra loro; conoscono costrutti come le dualità rappresentare/risolvere, trasparente/opaco e la rappresentazione canonica e non canonica di un numero; si mostrano competenti nel riferirsi alla bilancia a piatti e quindi all'equazione e ai suoi principi.

1	La differenza fra y e x
2	Il prodotto di a e b
3	Il doppio di n
4	Il doppio della somma di a e b
5	La somma di a col doppio di b
6	Il quadrato di x
7	Il quadrato del triplo x
8	Il triplo del quadrato di x
9	I successivo di z
10	Togli t dal quadruplo di s
11	Togli il quadruplo di t da s

2. I: Siete pronti?
3. Gabriele: Io messo $y-x$.
4. Edoardo: $x-y$.
5. I: Qualcuno ha scritto diversamente?
6. Alunni: No!
7. I: Cominciamo a commentare e confrontare ciò che ha scritto Gabriele con quello che ha scritto Edoardo.
8. Eva: Sono due scritte diverse.
9. I: Userei il termine 'traduzione', non 'scritta', poi giustifica ciò che hai asserito.
10. Eva: Nella prima traduzione è la x che deve essere sottratta alla y mentre nella seconda è il contrario, cioè dovremmo tradurre la differenza tra x e y e cioè $x-y$.
11. Gabriele: È giusto.
12. Edoardo: L'ho detto per cambiare la forma.
13. I: **Ma non è questione di forma, fatemi un esempio pratico applicato alle due traduzioni.**²
14. Eva: La differenza tra 40 e 15 che si traduce in $40-15$ e l'altra è la differenza tra 15 e 40 che è uguale a $15-40$, si vede anche dal risultato delle operazioni che sono diversi.
15. I: Direi di specificare che: se $x=40$ e $y=15$ allora...
16. Gabriele: A meno che $x-y$ non sia uguale a zero.
17. I: Se il risultato fosse uguale a zero in entrambe le operazioni, cosa osservate?
18. Eva: Che x e y sono uguali.
19. Gabriele: Allora si userebbe una sola lettera.
20. I: Spiegaci meglio.
21. Gabriele: Non è necessario usare due lettere per lo stesso numero, cioè $x=y$.
22. I: Traducetemi questa ultima frase.
23. Edoardo: La differenza tra x e x .
24. Enrico: **La differenza tra x e se stesso.**³

² Forse sarebbe stato opportuno chiedere a Edoardo di motivare la sua scelta: "Spiega cosa significa per te 'cambiare la forma'? Perché ha deciso di farlo?" *Hai perfettamente ragione.*

³ *Commento l'episodio 3-24. L'intervento (12) è uno spartiacque:*

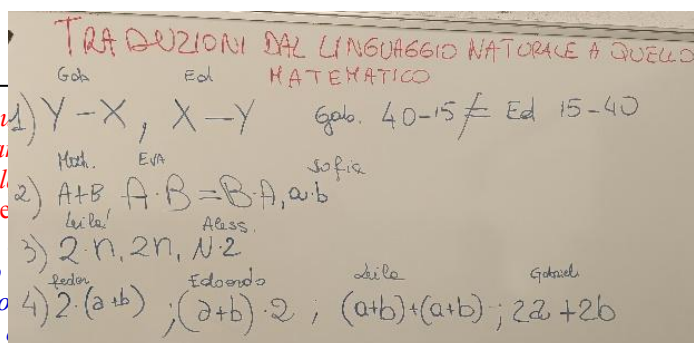
- fino a (12) si ragiona sulla forma (come dice Edoardo), cioè sulla traduzione del processo: Eva (10) spiega che la traduzione corretta è ' $y-x$ ' e chiarisce che la scrittura di Edoardo ' $x-y$ ' si tradurrebbe con 'La differenza fra x e y '.
- Dopo la (12) si ragiona su operazioni e risultati, perché è la stessa insegnante (13) che propone di 'fare un esempio pratico'.

Mi chiedo: è opportuno che l'insegnante faccia questa proposta per 'far toccare con mano' che ' $y-x$ ' e ' $x-y$ ' sono cose diverse? A mio avviso sarebbe meglio (vista anche l'età degli alunni) rimanere al livello linguistico dell'interpretazione delle due frasi 'La differenza fra x e y ', e guidare a capire (senza ricorrere a delle particolarizzazioni al livello aritmetico) che in

25. Muhamed traduce la seconda frase in $a+b$.
26. Eva: $A \times B$, oppure $B \times A$.
27. I: Cosa potete dire delle due traduzioni (quella di Muhamed e quella di Eva)?
28. Desiree: Eva ha scritto un prodotto, Muhamed una somma, Muhamed ha sbagliato o si è confuso.
29. I: Gli altri cosa ne pensano?
30. *La classe compreso Muhamed si dichiara d'accordo.*
31. I: E delle due traduzioni di Eva? Poi, in algebra si usano le lettere in corsivo minuscolo.
32. Sofia: $a \cdot b = b \cdot a$, comunque la prima è più giusta perché rispetta l'ordine descritto.
33. I: Perché le due traduzioni sono equivalenti?
34. Eva: **Tra i due termini c'è una relazione moltiplicativa... ed è stata applicata la proprietà commutativa.**⁴
35. I: Che differenza c'è tra la traduzione di Muhamed e quella di Gabriele?
36. Gabriele: Nella traduzione di Muhamed la relazione tra a e b è additiva, nell'altra è moltiplicativa.
37. Lelia *passa alla traduzione della frase "Il doppio di n ": $2 \cdot n$ e ho messo anche $2n$.*
38. Alessandro: $2 \times B$.
39. I: Ricordiamoci che in algebra si usano le lettere in corsivo minuscolo e che il testo parlava di un numero n .
40. Davide: Anche qui Leila ha applicato la proprietà commutativa.
41. I: Ok, e quale traduzione riterresti più adatta oppure sono giuste entrambe?
42. Davide: $2 \times n$, nell'altra è stata applicata la proprietà commutativa⁵.
43. *Federico traduce:*

4	Il doppio della somma di a e b
---	------------------------------------

- con $2 \cdot (a+b)$.
44. Edoardo: $(a+b) \cdot 2$.
45. Leila: $(a+b) + (a+b)$.
46. Gabriele: $2a + 2b$.
47. *Alla lavagna:*



'La differenza fra y e x ' il minimo (14) dopo l'invito dell'insegnante interpreta scorrettamente la relazione ad punto di vista procedurale. Ho capito, volevo fragili nella classe si muovono verifica di quanto generalizzato di generalizzare, qua invece ho

sia necessario, come fa Eva la seconda traduzione ($x-y$) esempi concreti esprima azione verso il punto di vista n quanto alcuni ragazzi più ntava, inoltre, una forma di attività con i ragazzi chiedo

Un'ultima osservazione sullo scambio (21-24): la traduzione della frase ' $x=y$ ' è 'Il numero x è uguale al numero y ' oppure ' $x=y$ è l'uguaglianza fra x e y '. Le traduzioni di Edoardo (23) ed Enrico (24) porterebbero invece a ' $x-x$ ', che permetterebbe per altro (per utilizzare l'errore) un passo ulteriore verso ' $x-x=0$ '.

⁴ *Mi è sembrato che la spiegazione di Eva fosse sufficiente, non so se dovevo approfondire maggiormente. Ho la sensazione che non sia chiara la differenza fra i due livelli linguistico e matematico. L'equivalenza fra le scritture $a \times b$ e $b \times a$ per la proprietà commutativa esprime un punto di vista matematico, ma l'attività proposta è concepita per riflettere sulle traduzioni, cioè ad un livello linguistico. Per esempio, un esempio aritmetico come: 'Aggiungi 19 a 3' è traducibile correttamente con '3+19', non con '19+3'. Affermare che '3+19=19+3' va benissimo, ma sposta l'attenzione sul piano matematico. Con gli alunni si può proporre la distinzione tra semantica della situazione e semantica della matematica. Grazie, esempio efficacissimo, penso di averlo chiaro per me stessa ma lo dovrò chiarire con gli alunni in modo da non creare "tra semantica della situazione e semantica della matematica" come hai sottolineato. È un'importante differenziazione che è stata adottata nel Progetto ArAl per dirimere con docenti e alunni la delicata questione dell'attribuzione di significato a due rappresentazioni in linguaggio matematico formalmente diverse (come in questo caso) di una stessa frase espressa in linguaggio naturale. Quella che chiamiamo semantica della situazione fa riferimento al senso della consegna 'Il prodotto di a e b ' in cui ' a ' e ' b ' sono interpretabili, rispettivamente, come primo e secondo fattore: la traduzione fedele è infatti ' $a \times b$ '. Quando si fa riferimento alla proprietà commutativa si cambia il punto di vista: il riferimento forte non è più circoscritto al senso della consegna, ma si amplia verso l'insieme di proprietà, teoremi, principi che riconducono alla semantica della matematica.*

⁵ *Mi è mancato di chiedere come potessero tradurre $n \times 2$.*

48. I: Allora guardando le vostre traduzioni così diverse direi di commentarle e confrontarle.
49. Enrico: Quella di Federico è più corretta perché dicendo il doppio della somma prima si scrive 2 che moltiplica la somma di $a+b$.
50. Eva: Il risultato di tutte queste traduzioni è lo stesso⁶, ma in base alla richiesta la traduzione più corretta è quella di Federico.
51. I: Provate ora a tradurre in linguaggio naturale⁷ le versioni di Edoardo, poi di Leila ed infine di Gabriele.
52. Edoardo: Il prodotto di $a+b$ per due, ah!... il prodotto della somma di $a+b$ e 2, il prodotto della somma di a e b per 2.
53. Gabriele: Il prodotto tra la somma di a e b e 2.
54. I: Commentiamo quella di Leila.
55. Gabriele: Non cambia tanto, Leila ha ripetuto due volte la somma di $a+b$.⁸
56. I: Cosa vi ricorda questo ragionamento, o meglio quando avete utilizzato la prima volta questo tipo di ragionamento?⁹ Mi riferisco a quando frequentavate la scuola elementare.
57. *Passa un po' di tempo e allora io suggerisco:* Pensate a quando le vostre maestre vi hanno introdotto le quattro operazioni.
58. Eva: Quando dall'addizione siamo passati alla moltiplicazione, per esempio se io devo fare $7+7+7+7$ posso scrivere 4×7 perché gli addendi sono tutti uguali.
59. I: Quindi nella traduzione $(a+b)+(a+b)$, qual è l'addendo uguale?
60. Eva: L'addendo è $a+b$.
61. I: Invece della traduzione di Gabriele¹⁰ che mi potete dire?
62. Pietro: È sempre corretta solo che ha applicato la distributiva.
63. I: Ok, andiamo avanti con le traduzioni delle frasi.

5	La somma di a col doppio di b
---	-----------------------------------

⁶ Capisco cosa intende dire, ma non so esattamente a cosa pensi Eva quando parla di 'risultato'. Sarebbe stato interessante chiederglielo per far emergere la differenza fra punti di vista procedurale e relazionale. Ritengo che gli alunni dovrebbero capire che non c'è nessun 'risultato', ma che si può parlare solo di 'equivalenza fra rappresentazioni'

⁷ Ottima domanda.

⁸ Anche qui prevale il punto di vista del fare. L'insegnante avrebbe potuto spostare l'attenzione della classe: "Non dovete pensare a cosa ha fatto Leila, ma a cos'è la rappresentazione $(a+b)+(a+b)$ ".

⁹ Domanda troppo vaga. L'intenzione è ottima, ma probabilmente sì, 'la prende molto alla lontana'.

¹⁰ La traduzione di Leila fa pensare ad una forma procedurale e primordiale di prodotto, ciò non mi stupisce perché lei come altri ragazzi della classe utilizzano preferibilmente l'operazione di addizione a quella di moltiplicazione nella risoluzione di quesiti matematici; la traduzione di Gabriele invece evidenzia il suo pensiero tipicamente procedurale. Dal mio punto di vista l'ottica prevalente è ancora di tipo matematico. Le traduzioni che chiede l'insegnante (51) di fatto non sono emerse: " $(a+b)+(a+b)$ è la somma fra la somma di a con b e la somma di a con b ".

" $2a+2b$ è la somma fra il doppio di a e il doppio di b ".

In conclusione: riferendosi all'intervento di Enrico (49), si può dire che la traduzione di Federico $2 \cdot (a+b)$ non sia 'la più' corretta, ma sul piano della semantica della situazione, è l'unica corretta. Il fatto che:

$$2 \cdot (a+b) = (a+b) \cdot 2 = (a+b) + (a+b) = 2a + 2b$$

ottiene ad un piano diverso, quello della semantica della matematica.

6	Il quadrato di x
7	Il quadrato del triplo x
8	Il triplo del quadrato di x
9	I successivo di z
10	Togli t dal quadruplo di s
11	Togli il quadruplo di t da s

64. Pietro: $a+2b$, *tutti gli altri sono d'accordo. Si va avanti con la traduzione successiva.*
65. Noemi: Io ho scritto x^2 .
66. Gabriele: Si può anche scrivere $x \cdot x$.
67. I: Allora se si può scrivere $x \cdot x = x^2$ ¹¹, vi ricordate in quale occasione avete incontrato queste due forme di scrittura e qual è il ragionamento che le mette in relazione?
68. Silenzio, *cerco di aiutarli*: Provate a descrivermi che cosa rappresenta il primo membro dell'uguaglianza.
69. Pietro: Il prodotto fra due quantità.
70. I: Cerca di essere più preciso, finisci la frase.
71. Eva: Il prodotto fra due quantità uguali.
72. I: Ok, vai avanti con la traduzione in linguaggio naturale, per favore.
73. Eva: Il prodotto fra due quantità uguali è uguale alla quantità elevata alla seconda.
74. Gemma: Se i fattori sono tutti uguali allora posso scrivere l'operazione sotto forma di potenza.
75. Eva: Se io ho $a \cdot a \cdot a$ allora posso scrivere a^4 .
76. I: Un ragionamento simile lo avete già fatto, sapreste dirmi?
77. *Pausa di silenzio.*
78. I: Sto pensando ad un altro tipo di operazione.
79. Gabriele: Tra l'operazione di addizione e moltiplicazione, come si diceva prima, qui invece è con l'operazione di moltiplicazione con fattori tutti uguali.
80. I: Direi che si applica un ragionamento analogo, *che i due ragionamenti si "ricordano"*¹².
81. Proseguiamo con "Il quadrato del triplo x ".
82. Federico: $(3x)^2$.
83. Enrico: $3x^2$, ... ma ho sbagliato perché, come ho scritto io, la potenza si applica solo alla x invece la frase diceva il quadrato di $3x$, cioè di tutti e due, le parentesi ci vogliono.
84. I: Bravo, adesso fai la traduzione di ciò che hai scritto tu.
85. Enrico: $x \dots 3x$, il triplo di x è...
86. Pietro: Il triplo del quadrato di x .
87. I: Passiamo alla successiva "Il triplo del quadrato di x ".
88. Federico: $3x^2$.
89. I: Nessuno ha scritto diversamente?
90. Federico: Si poteva scrivere anche $3(x)^2$.
91. I: Siete tutti d'accordo?
92. Edoardo ed altri due ragazzi: No!
93. *Chiedo di motivare la loro affermazione ma non ho risposta*¹³.
94. Federico: È la stessa cosa, le parentesi sono superflue. *Finisce qui la discussione.*
95. I: Proseguiamo con il successivo di z .
96. Matteo: Io ho scritto $z+1$.
97. Gabriele: $1+z$.
98. I: Che differenza c'è tra $z+1$ e $1+z$.

¹¹ È vero che questa frase 'era nell'aria' ma sarebbe stato meglio porre una domanda diretta del tipo "Come rappresentereste per Brioshi la relazione tra le scritture di Noemi e di Gabriele?", in modo da favorire l'emergere della scrittura $x \cdot x = x^2$.

¹² Sono stata un po' grossolana? Per come la vedo io no, ma bisognerebbe verificare che l'analogia venisse colta.

¹³ Non sono stata abile a cercare di sollecitare Edoardo ad una riflessione su quanto aveva affermato. Ma mi ha spiazzato, non ho avuto tempo di riflettere. È sufficiente parlare di convenzione.

99. Pietro: Io sono d'accordo con Gabriele.
100. Federico: Io sono d'accordo con Matteo perché il successivo è il numero che segue un altro, insomma io parto a contare da z e ci aggiungo 1, non parto da uno e ci aggiungo z.
101. I: Provate a fare un esempio numerico.
102. Sofia: Il successivo di 4 è $4+1$, prendo il numero e ci aggiungo il successivo.
103. I: Attenzione, traduci in linguaggio matematico questa tua ultima frase: *prendo il numero e ci aggiungo il successivo*.
104. Sofia: $4+(4+1)=4+5$.
105. I: $z+1$ e $1+z$ sono equivalenti da un punto di vista procedurale, ma se pensate alla retta dei numeri e volete trovare il successivo di z cioè $z+1$, vi muovete in un certo modo, se invece avete da individuare $1+z$, **le azioni da compiere sono diverse**¹⁴.
106. I: Proseguiamo con *Togli t dal quadruplo di s*.
107. Eva: Ho scritto $4s-t$.
108. Federico: $t-4s$.
109. Sofia: Anche io $t-4s$.
110. *La maggior parte della classe dà ragione ad Eva.*
111. Eva: Il comando è che prima devi calcolare il quadruplo di s e poi sottrarre t.¹⁵ Nella seconda traduzione il comando dovrebbe essere sottrai il quadruplo di s a t.
112. I: Traduciamo ora *Togli il quadruplo di t da s*.
113. Pietro: Io ho scritto $s-4t$.
114. I: Sofia tu come hai scritto?
115. Sofia: Come Pietro.
116. I: Nessuno ha scritto diversamente?
117. Tutti: No, così.
118. I: Bene.¹⁶

¹⁴ Mi sono proprio incartata, dovevo chiedere di rappresentare le due traduzioni su una retta e vedere cosa cambiava. Riprendendo commenti già scritti, direi che la strada forse più adatta per far cogliere la differenza fra ' $z+1$ ' e ' $1+z$ ' è il confronto tra le loro traduzioni in linguaggio naturale:

'La somma fra z e 1' e 'La somma fra 1 e z'.

Sarebbe ancora più convincente giungere alla definizione completa di 'successivo di un numero' (nell'insieme N):

'Il successivo di un numero è la somma fra quel numero e 1'.

¹⁵ Ancora una volta prevale il retropensiero procedurale ('Il comando è...'). L'attenzione della classe dovrebbe essere guidata verso il significato del termine 'differenza' all'interno di una frase e all'individuazione di minuendo e sottraendo. In altre parole la consegna non riguarda l'ordine in cui si eseguono 'i comandi' ma la struttura linguistica della frase. Sarebbe stato quindi importante invitare alla traduzione in linguaggio naturale della frase considerata errata e quindi procedere al confronto tra le frasi. Gli alunni dovrebbero argomentare di più in questo senso.

¹⁶ In questo caso, probabilmente, non ci sono errori nella traduzione perché la consegna è procedurale, quindi più familiare. Ho capito.

19 dicembre 2023

2

119. I: Gemma leggi il comando scritto alla lavagna.

120. Gemma legge:

Attività: Dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale

Traduci dalla lingua matematica alla lingua italiana le seguenti frasi

(1) $\frac{1}{2}a$	(2) $\frac{a}{2}$	(3) $a \div 2$	(4) $x + 3y$	(5) $(a+b) \times 3$	(6) $(a+b)^2$	(7) $a^2 + b^2$

121. Si analizza la situazione (1).

122. Enrico: Io ho scritto 'La metà di a'.

123. Davide: Io ho scritto 'Un mezzo moltiplicato per a'.

124. Eva: Io ho scritto 'Il prodotto tra un mezzo ed a'.

125. I: Cosa ne pensate delle tre traduzioni?

126. Silenzio.

127. I: Partite dall'analizzare la prima e a seguire le altre.

128. Davide: Io penso che Enrico abbia sbagliato perché ha fatto $a:2$.¹⁷

129. Molti ragazzi sono d'accordo con Davide, ma nessuno si sbilancia a spiegare perché la ritiene sbagliata. Non riesco a smuoverli pertanto prendo la parola.

130. I: $1/2$ di a, dando per scontato che a è un numero per noi conosciuto, è la forma canonica o non canonica di un numero?

131. Alunni: La forma non canonica.

132. I: Provate a trovare la forma canonica di $1/2$ di a.

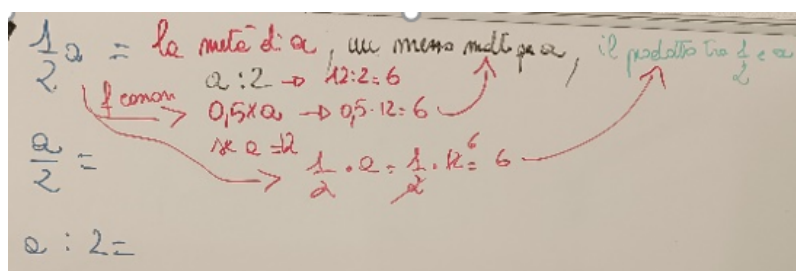
133. Alunni: $0,5a$.¹⁸

134. I: Immaginate di aver rappresentato una situazione problematica dove a rappresenta il numero di biglie di Lucia e $1/2$ di a le biglie di Luca, con la risoluzione dell'equazione che rappresenta la situazione problematica, avete calcolato il valore di a, dategli voi un valore.

135. Virginia: $a=12$.

136. I: Se $a=12$ provate adesso a verificare le traduzioni di Enrico, Davide ed Eva.

137. Eva: scrive alla lavagna:



Sono tutte e tre equivalenti. Enrico ha ragione.

138. I: E $1/2$ moltiplicato per a?

¹⁷ Continua a prevalere il punto di vista procedurale. Direi alla classe che Enrico non ha fatto $a:2$, perché non doveva eseguire nessuna operazione. Enrico ha interpretato $1/2a$ come 'La metà di a': la domanda da porre è: " $1/2a$ e l'interpretazione di Enrico 'dicono' la stessa cosa?" Sono due connotazioni del medesimo oggetto matematico? Se la risposta è sì, allora sono una la parafrasi dell'altra e quindi sono corrette entrambe. La competenza che si vuol costruire è una sensibilità nei confronti dell'interpretazione di scritte (in linguaggio matematico o linguaggio naturale) formalmente diverse in alcune importanti 'sfumature' ma omogenee nel loro significato generale. Suggestirei di rimanere a questo livello, e di ricorrere ad esempi se questo fosse proprio necessario, ma non come metodo di lavoro.

¹⁸ Direi che sia $1/2a$ che $0,5a$ sono rappresentazioni non canoniche dello stesso numero, entrambe definibili come 'prodotti'. Nel mio libro riporto un concetto che abbiamo elaborato assieme a Nicolina Malara:

'Nel contesto algebrico la denotazione di un'espressione, se è irriducibile, è l'espressione stessa; se l'espressione è invece trasformabile in una forma più semplice, ogni passo di questa trasformazione produce un'espressione che può intendersi come sua connotazione [cioè come sua forma non canonica]. (p. 192).

Chiarissimo affronterò questo concetto con i ragazzi.

139. Sofia: È uguale a 0,5 per a... $0,5 \times 12 = 6$.
140. Pietro: $E \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$.
141. I: La frase *la metà di a* di che tipo è?
142. Eva: È una frase relazionale.
143. I: E *un mezzo moltiplicato per a*?
144. Sofia: È una traduzione di tipo procedurale.
145. I: *Il prodotto tra un mezzo ed a*?
146. Desiree: Di tipo relazionale.
147. I: Traduciamo $a/2$ (*situazione (2)*).
148. Eva: Il quoziente tra a e due: $a:2$.
149. Elia: a fratto 2.
150. Eva: La metà di a.
151. Gabriele: a diviso 2.
152. Giorgia: $\frac{1}{2}$ di a.
153. I: Specificatemi, ora, di che tipo sono le traduzioni.¹⁹
154. Eva: Il quoziente tra a e due: $a:2$, di tipo relazionale.
155. Elia: a fratto 2, di tipo procedurale.
156. Eva: La metà di a, di tipo relazionale.
157. Gabriele: a diviso 2, di tipo procedurale.
158. Giorgia: $\frac{1}{2}$ di a, di tipo relazionale.
159. Giorgia: Si poteva anche dire *il rapporto fra a e 2*²⁰.
160. I: Interessante, brava Giorgia; ne aggiungo una io visto che non viene a mente a nessuno: cose ne dite di a mezzi?
161. Alunni: Ah! È uguale ad a fratto due!²¹
162. I: Procediamo con (3) $a:2$.
163. Elia: a diviso 2.
164. Eva: Il quoziente tra a e 2.
165. Sofia: La metà di a.
166. I: Cosa potete dire delle tre diverse traduzioni?
167. Giorgia: Sono tutte traduzioni giuste²² poiché se $a=10$, a diviso 2= 5 ; il quoziente tra a e 2, $10:2=5$; la metà di a è $10:2$ oppure $10/2=5$.

Suona la campanella, termina la lezione. Si riprende l'attività il 16 gennaio con la traduzione di queste frasi:

(4) $x + 3y$	(5) $(a+b) \times 3$	(6) $(a+b)^2$	(7) $a^2 + b^2$
--------------	----------------------	---------------	-----------------

168. Edoardo: La prima frase si traduce con "la somma di x con il triplo di y".
169. Pietro: "x sommato al triplo di y".
170. Olga: "La somma tra x e tre volte y".
171. Giorgia: "La somma tra x e il prodotto tra 3 e y".
172. I: Nessuno ha scritto diversamente? *Silenzio*. Cosa ne pensate delle diverse traduzioni? Confrontate, per partire, la traduzione di Edoardo e quella di Olga.
173. Gabriele: Edoardo ha fatto una traduzione di tipo procedurale.
174. I: Spiegaci perché.
175. Gabriele: Perché lui doveva scrivere: "la somma fra x e il triplo di y".
176. I: Se ho capito bene, la differenza fra traduzione procedurale e relazionale, per te, sta nel fatto che Edoardo utilizza la preposizione semplice "con" invece di "fra"?

¹⁹ Più ragazzi parlano contemporaneamente, vorrei fermarli ma stanno procedendo bene nelle risposte.

²⁰ Interessante osservazione, con la classe abbiamo da poco lavorato sui rapporti e l'uguaglianza fra i rapporti. Purtroppo non so come avrei dovuto commentare l'asserzione di Giorgia da un punto di vista algebrico.

²¹ Stupidamente non ho chiesto se la frase era di tipo relazionale e/o procedurale. Va bene così, in certi casi la differenza è sottile e, una volta che gli alunni mostrano di aver compreso la differenza fra i due punti di vista, si può anche glissare.

²² È sufficiente che Giorgia argomenti così? Sarebbe stato meglio che provasse a generalizzare? Riparto da questa richiesta nel prossimo incontro? Se l'insegnante non ha mai parlato di parafrasi, potrebbe introdurre. Ok.

177. Gabriele: Si!²³ Anche alcuni ragazzi si dichiarano d'accordo con Gabriele.
178. Giorgia: Per me, quella di Edoardo è relazionale, e quelle di Olga e di Pietro sono procedurali.
179. I: Ci vuoi motivare quanto hai detto?
180. Giorgia: La frase di Edoardo mette in risalto quale relazione matematica c'è tra la x e la y : la somma, mentre quella di Pietro e quella di Olga dicono cosa devi fare alla x e alla y , insomma ci danno delle regole per calcolare. Poi Pietro traduce $3y$ con il triplo di y e questa invece va bene, Olga invece dice y per tre volte e questa è procedurale.
181. Pietro: Allora anche quella di Olga è procedurale e relazionale.
182. I: Cosa ne pensano gli altri della posizione di Giorgia e di quella opposta di Gabriele? E poi cosa mi sapreste dire della traduzione di Giorgia?
183. *Si susseguono più interventi non ordinati pertanto la registrazione non è chiara, si capisce dalla posizione della maggior parte degli alunni che ciò che ha detto Giorgia li ha convinti²⁴.*
184. Pietro: Quella di Giorgia è solo relazionale perché ci fa capire la relazione che c'è tra tre e y e la relazione che c'è tra x e il triplo di y .
185. I: Bene Pietro! proviamo a tradurre la prossima: $(a+b) \times 3$.
186. Pietro: Il prodotto di 3 con la somma tra a e b .
187. Leila: La somma tra a e b moltiplicata per 3.
188. Simone: Il triplo della somma tra a e b .
189. Olga: Il prodotto tra la somma tra a e b e tre.
190. I: Nessun altro? Cosa possiamo dire?
191. Gabriele: La traduzione di Simone è la più relazionale, perché spiega la relazione tra a e b , che è la somma, e poi con "il triplo" la relazione tra a più b e il suo triplo.
192. Pietro: Per me è un po' e un po', è un po' procedurale perché dice il triplo²⁵.
193. I: Pietro, prova a parafrasare il triplo della somma.
194. Gabriele: Il prodotto fra tre e la somma fra a e b .
195. I: E se vi chiedessi di trasformarla in frase procedurale, come la scrivereste?
196. Gabriele: La somma tra a e b moltiplicato per tre. Anzi no, perché la somma indica la relazione invece il resto della frase è procedurale.
197. I: La vogliamo scrivere tutta dal punto di vista procedurale?
198. Giorgia: Somma a con b e poi moltiplica per tre.
199. I: bene²⁶, e delle altre traduzioni cosa mi sapete dire?
200. Pietro: Quella di Leila è un po' e un po'.²⁷
201. I: E quella di Olga?
202. Gabriele: È relazionale.
203. I: E tra le due traduzioni: quella di Olga e quella di Simone?
204. Giorgia: È più giusta quella di Olga perché la frase matematica prima fa vedere qual è la relazione fra a e b poi la relazione tra la somma e 3.
205. I: La traduzione in linguaggio naturale di Olga segue perfettamente quanto scritto nella frase matematica, quella di Simone invece pospone la somma al prodotto.
206. I: passiamo a tradurre la frase: $(a+b)^2$.
207. Edoardo: Il quadrato della somma tra a e b .
208. Davide: La somma di a e b al quadrato.
209. Giorgia: Il risultato della somma tra a e b elevato al quadrato.
210. I: Qualcuno ha scritto ancora diversamente?... Se non c'è nessuno che ha scritto diversamente commentiamo queste frasi.
211. Pietro: Quella di Edoardo è relazionale perché i termini come quadrato e somma ci dicono le relazioni tra a e b .
212. Giorgia: Anche quella di Davide è relazionale perché esprime la relazione tra a e b solo ha invertito la frase, prima ha citato la somma e poi il quadrato.

²³ *Non mi è sembrato strano che Gabriele abbia dato questa risposta, lui tende sempre a risolvere più che fermarsi ad argomentare ciò che sta facendo, va forzato ogni volta a spiegare il perché di certe sue asserzioni. Mi dispiace perché con il lavoro che stiamo facendo in classe da tempo, lui che è un ragazzo intuitivo e gode della "fama" di bravo in matematica è ancora tenacemente attaccato al procedurale. Succede spesso. Alunni di questo tipo molto spesso sono rigidi e fanno fatica a comprendere sul piano linguistico l'importanza dell'argomentazione e su quello sociale l'importanza del proprio ruolo come mediatore nella costruzione sociale delle conoscenze.*

²⁴ *Io forse ho perso il treno: devo forse puntualizzare o contestualizzare, precisare meglio la spiegazione di Giorgia? Penso di no. Se Olga è stata convincente significa che è stata efficace di suo.*

²⁵ *Pietro dimostra di non aver capito a pieno e ogni tanto fa qualche scivolone purtroppo.*

²⁶ *Potevo chiedere altre traduzioni procedurali. I risultati si vedono, ci saranno altre occasioni per farlo.*

²⁷ *Persa una occasione importante per capire se Pietro stava capendo: devo chiedergli di motivare ciò che stava dicendo.*

213.I: Ci sono altre osservazioni? Siete d'accordo?

214.Olga: Quella di Davide è una traduzione che inizia con la relazione tra a e b (*quindi relazionale*) poi passa a una frase procedurale perché pone di più l'attenzione su cosa si deve fare sulla somma.

215.I: Siete d'accordo? *I ragazzi annuiscono.*

216.I: Ci rimane da commentare ciò che ha tradotto Giorgia.

217.Gabriele: Anche questa è un po' e un po', relazionale poi procedurale.

218.I: Spiegati meglio.

219.Gabriele: La somma tra a e b è relazionale, poi continua con elevato al quadrato è procedurale e poi c'è anche il risultato... che ti dice che devi andare a risolvere.

220.I: Ok, ora traduciamo: a^2+b^2 .

221.Pietro: La somma tra il quadrato di a e di b .

222.Leila: a al quadrato sommato a b al quadrato.

223.Desiré: La somma tra a al quadrato e b al quadrato.

224.Edoardo: La somma del quadrato di a e il quadrato di b .

225.I: Commentiamo.

226.Edoardo: Quella di Pietro e la mia sono uguali, relazionali.

227.Gabriele: Quella di Leila invece è completamente procedurale perché dice cosa fare su a e b , invece quella di Desiré è relazionale quando parla della somma e procedurale quando dice che a deve esser elevato al quadrato.

228. *Finisce la lezione.*²⁸

²⁸ *Mi sembra che le idee siano molto chiare, i ragazzi argomentano bene.*