

1976 la congettura potrà essere dimostrata con l'uso di calcolatori ad alta velocità. Scrisse anche una «*Raccolta di paradossi*» in cui era proposta una satira divertente sui vari tentativi di quadratura del cerchio insieme a indovinelli e battute di spirito come: «è più facile quadrare un circolo che arrotondare un matematico». Nel 1840 De Morgan pubblicò, sotto il titolo «*On the Foundations of Algebra*», quattro saggi nei quali quelle che erano considerate comunemente regole per il calcolo venivano presentate come «proprietà formali», condizioni logiche per le operazioni. E quando nel 1847 uscì «*L'analisi matematica della logica*» di Boole, De Morgan, che in quello stesso anno aveva pubblicato la sua «*Logica formale*», subito comprese l'importanza dell'opera per lo sviluppo del pensiero logico-matematico.

Egli stesso aveva studiato un'algebra simbolica in cui lettere e simboli di operazioni non avevano un significato specifico, così ad esempio le lettere *A, B, C, ...* potevano rappresentare le varie virtù e i vari vizi e i simboli $+$ e $-$ ricompensa e punizione. Era questa la concezione che Boole svilupperà e formalizzerà in modo rigoroso, per cui De Morgan può essere visto come un precursore delle idee booleane, ma anche come un persecutore; infatti alla morte di Boole ne continuò l'opera pervenendo tra l'altro alla importante legge di dualità secondo cui da ogni proposizione se ne ottiene un'altra scambiando tra loro i termini di addizione e di moltiplicazione.

Va precisato che per De Morgan l'unione non è esclusiva e questa scelta sarà in seguito preferita dagli studiosi.

Per chi ai nostri giorni studi l'algebra di Boole, il nome di De Morgan è associato alla formula

$$1 - (x \cdot y) = (1 - x) + (1 - y)$$

e alla duale

$$1 - (x + y) = (1 - x) \cdot (1 - y)$$

che sono qui trascritte utilizzando la simbologia di Boole.

Così ad esempio, se consideriamo le due proposizioni «oggi piove», «oggi vado al cinema», l'affermazione «non è vero che oggi piove e vado al cinema» equivale a «oggi non piove oppure non vado al cinema». In realtà queste leggi erano già note ai logici medievali (Pseudo Scoto, Ockham).

I circuiti logici

L'algebra di Boole, quasi un secolo dopo la morte del suo ideatore, sarà applicata ai circuiti elettrici i quali possono essere o no percorsi da corrente. Il primo ad intuire questa possibilità ed a studiare le conseguenze di una tale trattazione algebrica dei circuiti a contatti, fu lo scienziato americano Claude Shannon. Indicando con 1 e 0 i due stati possibili di un circuito elettrico (rispettivamente passa corrente, non passa corrente) e facendo corrispondere alla *somma logica* il

collegamento in parallelo di due interruttori e al prodotto logico il collegamento in serie, si ha un modello fedele ed efficace dell'algebra binaria. Come è noto questo modello è alla base del funzionamento dei calcolatori elettronici.

La scelta di un codice binario, che già Babbage aveva effettuato realizzandola attraverso schede perforate, troverà così, grazie ad una rigorosa formulazione sistematica, definitiva accettazione. Verso la metà di questo ventesimo secolo, gli studi teorici e la tecnologia avranno finalmente raggiunto il livello necessario per permettere la concretizzazione del sogno di Babbage.

L'algebra di Boole, appoggiata alla sua interpretazione circuitale, può essere appresa, negli elementi fondamentali, con

relativa facilità dai nostri allievi. Essa ha il vantaggio di presentarsi come un prodotto finito, sufficientemente autonomo rispetto alla matematica tradizionale e di permettere, appunto, grazie ai circuiti, un puntuale riscontro pratico della teoria la quale, a sua volta, attraverso l'utilizzo delle tavole di verità, può procedere speditamente (Carla Simonetti).

Bibliografia

(1) George Boole, *Analisi matematica della logica saggio di un calcolo del ragionamento deduttivo*, Silva editore, Milano 1965.

(2) Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI Milano 1976.

(3) Corrado Mangione, «La svolta della logica nell'Ottocento» in: L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, vol. V, Garzanti, Milano 1971

UN MAZZO DI FIORI ALQUANTO PERICOLOSO

ITINERARI DIDATTICI ATTORNO ALLE LEGGI DI DE MORGAN¹

Introdurre la logica nella scuola media partendo da una approfondita riflessione su testi linguistici opportunamente scelti: è quanto viene suggerito nel presente articolo. L'originalità dei testi utilizzati e la particolare atmosfera che circonda i personaggi sono motivi di sicuro interesse per gli alunni ed agiscono da stimolo per giungere all'individuazione delle leggi di De Morgan.

Giancarlo Navarra²

Sempre più frequentemente gli insegnanti dei vari ordini di scuola, dalla elementare alle medie superiori, debbono affrontare l'inserimento della Logica nella loro attività didattica, previsto, pur in forme e contesti necessariamente diversi (anche se inopportunitamente sCOORDINATI fra loro) dai Programmi ministeriali.

Altrettanto frequentemente essi trovano degli ostacoli nel reperire testi di Logica che siano contemporaneamente rigorosi ma anche sufficientemente semplici, e trovano ancora maggiori difficoltà quando, una volta avviato lo studio dei rudimenti necessari ad un primo chiarimento delle idee, cercano strumenti che li aiutino ad impostare con un minimo di ordine la loro attività. Si scontrano allora con la scarsa letteratura sulla *didattica della Logica*.

Le ragioni di questa scarsità sono legate essenzialmente alla nascita piuttosto recente di questo problema³ e ai punti di vista molto diversi degli specialisti e quin-

di all'incertezza della situazione, anche a livello internazionale, e alla mancanza di modelli soddisfacenti da cui trarre valide indicazioni. [BaZa]

Come conseguenza, gli insegnanti che affrontano la didattica della logica devono fare riferimento a un materiale bibliogra-

¹ Lavoro eseguito nell'ambito del Contratto CNR n. 91.01292.CT01.

² Insegnante di Scienze MCFN in classi a tempo prolungato presso la Scuola Media di S. Giustina (BL); membro del Gruppo di Ricerca sull'Educazione Matematica (GREM) del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena, svolge con l'insegnante di lettere Laura Buzzatti attività di ricerca sulla didattica della Logica dall'anno scolastico 1986/87 con la collaborazione della prof. Nicolina Malara, responsabile del GREM. Diversi aspetti di tale attività si trovano in [Mal], [Na92B].

³ Basti pensare che la prima occasione importante in cui sono affrontati temi di carattere didattico concernenti la Logica è stato il XII Incontro di Logica Matematica tenuto a Roma dal 6 al 9 aprile 1988, del quale sono stati pubblicati gli atti nel 1989 [BaZa].

fico, anche di notevole interesse, ma molto eterogeneo e non sempre facilmente reperibile o perché uscito dai cataloghi delle case editrici (vedi [NU]), o perché pubblicato su riviste straniere (vedi [Ad]), o perché relativo a situazioni molto particolari (vedi [Ma90]).

Questo articolo intende fornire un contributo in questa direzione, e proporre agli insegnanti materiale operativo e di riflessione. Esso tratta un possibile momento molto importante in un'attività logico-linguistica, quello in cui si introducono le *Leggi di De Morgan*, ed evidenza — sotto forma di diario ragionato — sia la *struttura* del percorso didattico (punto di vista dell'*insegnante*) sia le principali difficoltà connesse con il suo svolgimento (prevalente punto di vista degli *allievi*, che verrà evidenziato in seguito nelle parti precedute dal simbolo •). La sequenza è stata attuata in una terza media (ma è adatta anche alle classi del biennio) e rappresenta un frammento di una programmazione triennale; gli alunni sono quindi da tempo abituati a uno standard di lavoro che prevede la conoscenza chiara del contratto didattico⁴, l'abitudine all'attività di gruppo, alle discussioni collettive, al confronto delle riflessioni e alla verbalizzazione (ossia alla descrizione orale/scritta del ragionamento in atto).

Per quanto si sia tenuto presente un lettore forse più motivato che approfondito conoscere della materia, si è dovuto dare per acquisita una conoscenza pur elementare dei fondamenti della logica (enunciato, predicato, valori di verità, principali connettivi, quantificatori, ecc.). [Va]

Obiettivi di fondo sono stati sia il *miglioramento delle competenze linguistiche* degli alunni — requisito necessario all'acquisizione di un qualsiasi concetto, indipendentemente dal suo ambito disciplinare — che lo *sviluppo di attività di riflessione* per favorire la metacoscienza. Tali obiettivi giustificano la scelta strategica da noi adottata in più occasioni di far lavorare la classe prevalentemente su *testi*, a differenza di altre fasi dell'attività in cui abbiamo ad esempio privilegiato l'uso di disegni, come nell'introduzione del *modus ponens*. [Mal]

In ultima osservazione o, più che un'osservazione, un invito: suggeriamo di leggere questo articolo come se fosse una specie di *articolo-laboratorio*, e di soffermarsi a riflettere sulle microsituazioni problematiche man mano che compaiono prima di continuare la lettura. In base alla nostra esperienza [Na92A] è proprio nei *dettagli* della riflessione — i confronti fra i testi, l'analisi accurata degli ostacoli linguistici, l'approfondimento costante di particolari apparentemente marginali — che abbiamo trovato gli punti principali per considerare valido questo tipo di lavoro. Risulterà forse più chiaro, in questo modo, che l'itinerario non viene presentato tanto per essere riproposto in un'altra classe più o meno modificato, quanto per illustrare un possibile — e probabilmente inconsueto — tipo di esplorazione in un particolare con-

testo linguistico altrettanto inconsueto, e può essere utile quindi per una analisi a priori delle difficoltà concettuali connesse alla introduzione alla classe, se pure naive e su casi particolari, delle *Leggi di De Morgan*.

Premessa

Allo scopo di esemplificare le difficoltà logico-linguistiche che affronteremo nel corso dell'attività anticipiamo un *testo-tipo*: un comunicato diffuso realmente in una scuola media concernente l'organizzazione di una normale visita di istruzione.

Visita alla cartiera

POSSONO PARTECIPARE ALLA VISITA ALLA CARTIERA GLI ALUNNI DELLA SCUOLA PURCHÉ NON ABBIANO GIÀ PARTECIPATO AD ALTRE USCITE DURANTE L'ANNO SCOLASTICO OPPURE NON ABBIANO GIÀ VISITATO LA CARTIERA.

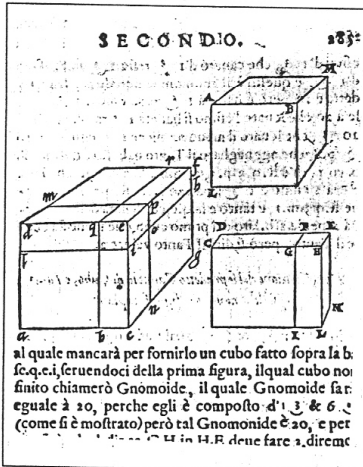
È evidente che si tratta di un testo di non immediata decodificazione, anche per un adulto, a causa di alcune «trappole» logico-linguistiche: il *purché* contrapposto all'*oppure* e i due *non*. Situazioni analoghe è facile che si presentino soprattutto nei comunicati ufficiali: norme, circolari, prescrizioni, divieti; gli aspetti della lingua che analizzeremo in questa attività dovrebbero fornire agli allievi — anche — una maggiore capacità di superare queste «trappole». Invitiamo il lettore, prima di continuare, a rispondere alla domanda «quali alunni possono partecipare alla visita?».

L'avvio dell'unità

Vediamo ora la sequenza lungo la quale è organizzata l'unità di lavoro⁵.

1) Viene presentata agli alunni una *storia* (avente per protagonisti Alice e il Co-

Una pagina de *L'Algebra*, di Rafael Bombelli, Bibl. Civica «A. Mai» di Bergamo.



niglio Bianco alle prese con dei mazzi di fiori) che li pone in «ambiente logico». 2) Vengono proposti successivamente dei *testi* sotto forma di cartelli implicanti tutti la stessa domanda: *Quali fiori è possibile raccogliere senza rischiare di essere decapitati?* Attorno ai testi si discute, si effettuano schematizzazioni con diagrammi di Eulero-Venn, si elaborano parafrasi, si traggono conclusioni parziali. Le coppie di testi 6-7 e 8-9 rappresentano, come vedremo, i momenti chiave dell'unità; i primi cinque cartelli servono essenzialmente a portare gradualmente l'attenzione della classe sugli aspetti che ci interessano.

3) Si ricavano conclusioni logico-linguistiche generali.

4) Si ritorna al testo sulla *Visita alla cartiera* e lo si rielabora sulla base delle conclusioni del punto 3).

Ecco dunque la storia:

Alice e il giardino della regina di cuori (sull'aria di «*Alice nel Paese delle Meraviglie*» di Lewis Carroll)

COM'È NOTO, LA REGINA DI CUORI POSSI- DE UN MAGNIFICO GIARDINO, RICCO DI SPLENDIDI FIORI. ESSO È DI FORMA RETTANGOLARE, ED È CIRCONDATO DA UN'ALTA SIEPE DI LIGUSTRO; AL SUO INTERNO OSPITA DUE GRANDI AIUOLE DI FORMA ELLITTICA, INTERSEDATE FRA LORO. A SINISTRA DEL CANCELLO D'INGRESSO LA REGINA HA FATTO PORRE UN CARTELLO COSÌ FORMULATO:

NELL'AIUOLA COL BORDO DI PIETRA SONO PIANTATE LE ROSE
NELL'AIUOLA COL BORDO DI LEGNO SONO PIANTATI FIORI BIANCHI

LA REGINA DI CUORI — E ANCHE QUESTO È RISAPUTO — È MOLTO LUNATICA E PREPOTENTE, E NON SI PREOCCUPA MINIMAMENTE DI METTERE A LORO AGIO I VISITATORI, MA HA DECISO ANZI DI DIVERTIRSI ALLE LORO SPALLE. HA ORDINATO QUINDI AI GIARDINIERI DI CAMBIARE OGNI GIORNO UN SECONDO CARTELLO — CHE STA ALLA DESTRA DELL'INGRESSO — CHE INDICA QUALI TIPI DI FIORI SI POSSONO O NON SI POSSONO RACCOLGERE IN QUELLA DETERMINATA GIORNATA. I GIARDINIERI DEVONO EFFETTUARE SEVERISSIMI CONTROLLI, E I VISITATORI CHE AVRANNO INTERPRETATO MALE I CARTELLI — E AVRANNO QUINDI RACCOLTO I FIORI SBAGLIATI — VERRANNO IMMEDIATAMENTE DECAPITATI, SENZA NEANCHE SUBIRE L'OMBRA DI UN PROCESSO.

⁴ Usiamo questo concetto secondo l'accezione di Guy Brousseau: «*L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation plus vaste est la situation didactique... Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique*» [Br]. («L'insegnante è dunque implicato in un gioco con il sistema di interazioni che l'allievo ha con i problemi che egli gli pone. Questo gioco o questa situazione più ampia costituiscono la situazione didattica... Il contratto didattico è la regola del gioco e insieme la strategia della situazione didattica», trad. dall'originale dell'autore).

⁵ La tecnica di porre la classe in un contesto logico leggendo una storia iniziale che si interrompe dopo aver proposto una situazione problematica per poi riprendere dopo che essa è stata risolta e così via sino ad una conclusione prefissata è stata ritenuta efficace e seguita in più di una occasione [Na84, Na91] e nei suoi sviluppi più recenti si è ispirata a [Ar].

ALL'INIZIO DI QUESTA STORIA, ALICE E IL CONIGLIO BIANCO SI TROVANO ALL'ENTRATA DEL GIARDINO, E STANNO CONSIDERANDO LA SITUAZIONE.

«PER I MIEI OCCHI! PER I MIEI BAFFI! S'È FATTO TREMENDAMENTE TARDI!» E IL CONIGLIO BIANCO FA L'ATTO DI SCAPPARSENE VIA.

«NON SIA COSÌ PUSILLANIME, SIGNOR CONIGLIO!» LO BLOCCA PERENTORIA ALICE «SE CI RIFLETTIAMO SU UN POCCHINO, RIUSCIREMO A RACCOGLIERE DEI BEI MAZZI DI FIORI MANTENENDOCI BEN SALDA LA TESTA SULLE SPALLE!».

E, DETTO QUESTO, SI PIAZZA DAVANTI AI DUE CARTELLI E COMINCIA A LEGGERLI.

Sul piano logico, gli elementi determinanti della storia sono due:

- nel cartello di sinistra sono stabilite una volta per tutte le *caratteristiche* degli elementi dei due insiemi (le aiuole ellittiche): «essere rosa», «essere fiore bianco»;

- nel cartello di destra invece compariranno di volta in volta dei testi diversi che, come vedremo tra poco, conterranno *connettivi* e *quantificatori*; potranno essere composti da uno solo, oppure da due enunciati.

La prosecuzione della storia farà in modo che Alice e il Coniglio Bianco si presentino davanti all'ingresso in più giorni successivi; ogni volta il cartello di destra conterrà un testo diverso — talvolta solo un *pochino* diverso — di crescente difficoltà interpretativa, e i due protagonisti, aiutati dagli alunni, dovranno cercare di capirli e comportarsi di conseguenza.

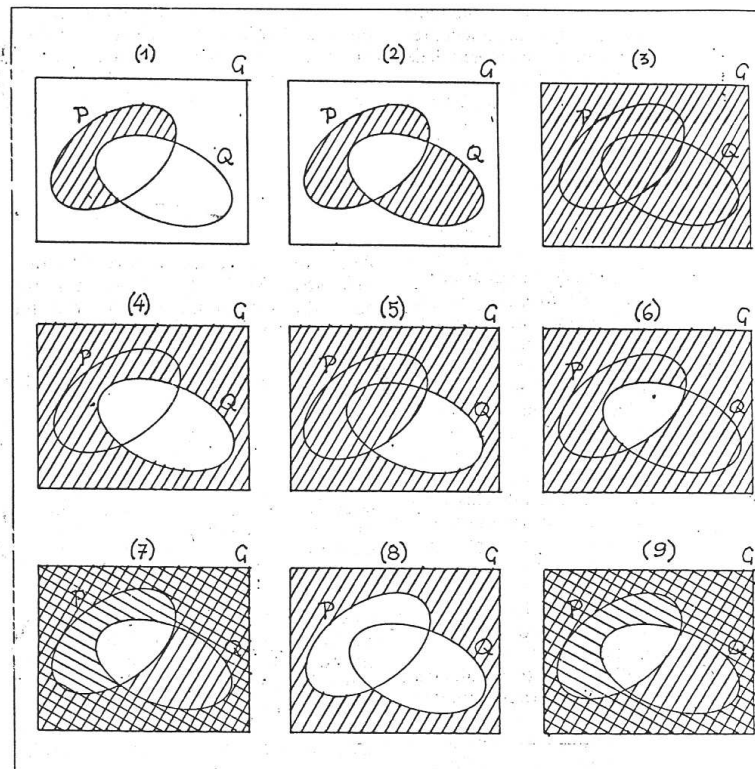


Tabella 1

I primi cinque cartelli

Il primo giorno della nostra storia, Alice e il Coniglio Bianco trovano dunque questo:

1° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
SOLO ROSE NON BIANCHE

Dopo aver fatto capire agli alunni che si tratta di un *unico enunciato*, facciamo in modo che la discussione collettiva si concentri sulla sua interpretazione. Possiamo quindi individuare attraverso gli interventi degli alunni le parti del testo che contengono le principali difficoltà dal punto di vista interpretativo:

- il termine SOLO, che comporta l'*esclusività* della scelta (NON si possono raccogliere altri tipi di fiori); e
- il termine NON, che è il connettivo unario che NEGA l'attributo che predica la qualità «essere bianche». L'esperienza mostra come in generale la presenza di una negazione in una proposizione — indipendentemente dalla sua complessità — rappresenti *in sé* un ostacolo alla sua comprensione.

Siccome la sola analisi del testo può non essere sufficiente a garantire la concettualizzazione, ricorriamo alla *rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn*; essi costituiscono un sussidio potente sia nella fase di studio del singolo testo che in quella successiva, del confronto tra i vari testi, quando si tratterà di cogliere

l'*equivalenza logica* tra testi linguisticamente diversi tra loro. I nove diagrammi della *tabella 1* si riferiscono agli altrettanti cartelli della storia, e pensiamo possano servire anche al lettore per «orientarsi» fra di essi.

Completato l'esame del primo cartello, proponiamo la prosecuzione della storia; l'indomani, Alice e il suo compagno, con la testa ancora sulle spalle in quanto hanno saputo rispettare la consegna, affrontano il:

2° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
SOLO ROSE NON BIANCHE
OPPURE SOLO FIORI BIANCHI
PURCHÉ NON SIANO ROSE

Lo proiettiamo con la lavagna luminosa in due tempi: prima proiettiamo il lucido del primo cartello, e poi gli sovrapponiamo un secondo lucido; le prime due righe sono le stesse, e l'aggiunta delle due successive dà luogo a un testo composto da *due enunciati collegati dall'oppure*. Le difficoltà questa volta sono molto più numerose, e gli alunni sono invitati al solito a commentare ad alta voce le perplessità, le interpretazioni, gli ostacoli che provano nel capire il senso del cartello, e a confrontarle con quelle dei compagni e con gli spunti forniti dagli insegnanti. I «nodi» che emergono riguardano, oltre ai già esaminati SOLO e NON i seguenti termini:

- OPPURE, che viene interpretato correttamente dagli alunni come parafrasi del connettivo «O esclusivo» (AUT)⁶. La costruzione del diagramma di Venn (se-

condo disegno della tabella) li aiuta a capire le due possibilità che Alice e il Coniglio hanno: «fare un mazzo di rose qualsiasi colore tranne il bianco» oppure «fare un mazzo di fiori bianchi di qualsiasi tipo tranne le rose bianche».

- PURCHÉ NON, che esplicita la condizione alla quale deve essere sottoposta la scelta dei fiori bianchi consentiti dall'«oppure»: *non devono* essere rose. Ne consegue che NON possono essere raccolti i fiori che si trovano nella parte comune delle due aiuole, ossia nell'*intersezione* dei due insiemi che le rappresentano. Per verificare — e per potenziare — il livello della comprensione poniamo domande del tipo:

- È *proibito* raccogliere *rose bianche*?
- Alice ha raccolto dei fiori *azzurri*. Cosa succederà alla sua testa?
- Il Coniglio Bianco non sa se può raccogliere fiori *profumati*⁷. Cosa gli suggeriresti?

Ancora una volta con la testa sulle spalle (la scelta conclusiva dei protagonisti è inevitabilmente corretta, perché evidentemente «non abbandoniamo» un cartello sinché non abbiamo portato la classe a una comprensione accettabilmente gen-

⁶ Se non è chiara la differenza fra la disgiunzione inclusiva E/O e quella esclusiva O è opportuno che il lettore affronti l'argomento, ad esempio su: prima di continuare la lettura dell'articolo.

⁷ In questo contesto si può considerare *licenza poetica* il ricorso al predicato «essere profumato» che a rigore non consente una classificazione oggettiva.

ralizzata del suo significato) i nostri due amici, sempre più appassionati nello sfidare la perfidia linguistica della Regina, affrontano una terna di cartelli che proponiamo alla classe in sequenza sulla lavagna luminosa, rispettando evidentemente i tempi necessari per la corretta e graduale interpretazione di ognuno di essi.

3° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
FIORI DI TUTTI I TIPI

4° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
FIORI DI TUTTI I TIPI
TRANNE QUELLI BIANCHI

5° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
FIORI DI TUTTI I TIPI
TRANNE QUELLI BIANCHI
A MENO CHE NON SIANO ROSE

La sequenza consente un'analisi sempre più *fine*, imperniata attorno a tre difficoltà:

• DI TUTTI I TIPI: tutti è un quantificatore universale e la sua presenza nel terzo cartello consente di raccogliere mazzi composti in molti modi diversi, che è interessante far cercare agli alunni. Infatti, è una *sorpresa* trovare che questa frase, di contenuto apparentemente così «anarchico», in realtà conduce ad un numero finito di possibilità di mazzi diversi fra loro (*sedici*) che corrispondono poi ai sedici sottoinsiemi riconoscibili nel diagramma di Venn che raffigura il Giardino della Regina. Ecco alcune parafrasi indicanti i mazzi, elencate a caso fra quelle trovate in classe; al lettore, se lo desidera, il compito di individuare e nominare le rimanenti possibilità:

- 1) rose e fiori bianchi;
- 2) solo rose;
- 3) fiori bianchi tranne le rose;
- 4) rose di qualsiasi colore a parte il bianco;
- 5) solo rose bianche;
- 6) fiori che non siano rose;
- 7) qualsiasi fiore tranne le rose bianche.

Un modo ordinato per trovarle tutte e sedici è stato illustrato in [Na91].

Logicamente esiste un'ulteriore possibilità, implicita: NON raccogliere fiori. È opportuno infatti far riflettere gli alunni sul fatto che il *permesso* di raccogliere determinati tipi di fiori non comporta automaticamente che essi *si debbano* raccogliere. Vi è semplicemente l'autorizzazione alla *potenzialità* del gesto.

Spesso invece nel linguaggio comune a frasi del tipo «Potete uscire» viene attribuito da parte di chi ascolta un significato *perentorio* (anche se il contesto non giustifica tale interpretazione). Ad esempio, invece di cogliere l'aspetto possibilista: «Quando qualcuno *eventualmente* avrà bisogno di uscire, *potrà* farlo» si recepisce quello *categorico*: «Andatevene pure»; in entrambi i casi comunque il messaggio è colto dai destinatari in modo *naturale*, senza che ci sia necessariamente una riflessione sul suo senso, cosa che invece facciamo accuratamente nel nostro caso.

• TRANNE: comporta una *limitazione* al quantificatore universale «tutti». È in

pratica una parafrasi della quarta frase dell'elenco precedente («rose di qualsiasi colore a parte il bianco»), e tale analogia può risultare più chiara utilizzando il supporto dei diagrammi di Venn.

• A MENO CHE: implica una *riduzione* della precedente limitazione. Nella nostra attività non lo abbiamo fatto, ma potrebbe essere interessante, in classi della media superiore, vedere se gli allievi capiscono che l'ultima riga del quinto cartello equivale di fatto alla *protasi* di una *doppia implicazione*⁸.

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE
FIORI DI TUTTI I TIPI,
ANCHE QUELLI BIANCHI,
MA SOLO SE SONO ROSE*

Due cartelli molto importanti

Terminata questa prima parte propedeutica, facciamo in modo che Alice e il Coniglio incontrino, uno dopo l'altro, due cartelli cruciali, il sesto e il settimo.

6° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE SOLO
FIORI CHE NON SONO ROSE BIANCHE

In questo caso risulta piuttosto semplice comprendere che gli unici fiori che non si possono raccogliere sono quelli dell'intersezione, che posseggono entrambi gli attributi: «*essere rosa*» e «*essere bianco*» (nel cartello manca il connettivo «E» tra «*rose*» e «*bianche*», ma di fatto è come se ci fosse, ed è importante dal punto di vista logico far riflettere gli allievi sulla sua presenza *nascosta*).

Esaminiamo successivamente il

7° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE SOLO
FIORI CHE NON SONO ROSE
OPPURE CHE NON SONO BIANCHI

Gli alunni trovano degli ostacoli nella comprensione di:

- OPPURE, che sta per il connettivo VEL (O inclusivo) e unisce
- NON SONO ROSE e NON SONO BIANCHI, ossia due predicati espressi mediante due *negazioni*.

Abbiamo già sottolineato precedentemente che delle negazioni (una o più) all'interno di una frase rendono più difficile la sua comprensione. Infatti l'analisi delle osservazioni degli alunni mostra che essi, anche aiutandosi con i diagrammi di Venn, in realtà effettuano mentalmente una *doppia operazione* individuando:

- 1) gli insiemi che possiedono la *caratteristica in positivo* (in questo caso *l'essere rosa, l'essere bianco*), e poi
- 2) i loro *complementari*.

In altre parole, la negazione non viene colta immediatamente in quanto tale, ma come fatto subordinato all'esistenza di una *affermazione* della quale inconsciamente bisogna comunque prendere atto *prima* di affrontare la negazione.

Questa doppia operazione è resa ancora più complicata anche dal fatto che gli insiemi nella pratica didattica non sono mai

caratterizzati da proprietà espresse *mediante la negazione*. Per capire meglio l'ostacolo, ricordiamo che quando in genere si parla di «insieme unione», siamo abituati a riferirci a insiemi caratterizzati ciascuno da proprietà non coinvolgenti la negazione.

Invece la frase della settima tabella NON SONO ROSE OPPURE NON SONO BIANCHI induce a considerare un *insieme unione di insiemi complementari* (rispetto ad un *insieme-universo G*) e l'esperienza insegna che questo non è un passaggio concettuale semplice da cogliere.

Le leggi di De Morgan

Confrontando il 6° e il 7° cartello, possiamo portare la classe dalla comprensione dell'uguaglianza insiemistica a quella dell'*equivalenza logica* (o, come si dice, dell'*equiveridicità*) tra i due enunciati. Confrontando infatti le figure 6 e 7 della *tabella 1* possiamo concludere nel linguaggio degli insiemi che:

(1) *il complementare dell'intersezione degli insiemi P e Q è uguale all'unione degli insiemi complementari di P e Q.*

Da un punto di vista linguistico si coglie che:

(2) *la negazione della congiunzione di due enunciati p e q è equivalente alla disgiunzione delle negazioni dei due enunciati.* Otterremo conclusioni analoghe portando Alice e il Coniglio davanti ai due ultimi cartelli:

8° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE SOLO
FIORI CHE NON SIANO
ROSE OPPURE BIANCHI

9° cartello

OGGI È PERMESSO RACCOGLIERE SOLO
FIORI CHE NON SONO ROSE
E NON SONO BIANCHI

La difficoltà principale riguarda la comprensione nell'ottavo cartello delle parole CHE NON SIANO ROSE OPPURE BIANCHI: gli alunni debbono infatti intuire che è come se fosse scritto CHE NON SIANO ROSE OPPURE CHE NON SIANO BIANCHI. È consigliabile fare esplicitare la parte *sottintesa* in modo da essere sicuri che il testo sia stato assunto con chiarezza sul piano linguistico. Sul piano logico si può favorire la comprensione suggerendo la seguente interpretazione di questa parte del testo: FIORI CHE NON SIANO: ROSE OPPURE BIANCHI che significa: i fiori

* I nostri allievi conoscevano sia l'implicazione semplice che la doppia, ma in quel momento non abbiamo ritenuto opportuno approfondire l'analisi in questa direzione ritenendola inadatta ai nostri obiettivi principali.

⁸ Facciamo incidentalmente rilevare che in generale è un utile esercizio esplorare assieme agli alunni altre parafrasi dell'implicazione — ad esempio «*purché siano*», «*a patto che siano*», «*a condizione che siano*», eccetera — come pure quelle degli altri connettivi.

non possiedono l'attributo *nel suo complesso*.

Analogamente a quanto abbiamo fatto con il 6° e il 7° cartello ritroviamo ancora una equivalenza, e il confronto con le figure 8 e 9 della *tabella 1* ci permette di ricavare una conclusione simile alla precedente:

(3) *il complementare dell'unione degli insiemi P e Q è uguale all'intersezione degli insiemi complementari di P e Q.*

Dal punto di vista linguistico cogliamo che:

(4) *la negazione della disgiunzione di due enunciati p e q è equivalente alla congiunzione delle negazioni dei due enunciati.* La (2) e la (4) sono note come **Leggi di De Morgan**; dal loro confronto possiamo ricavare alcune interessanti conclusioni:

- esse presentano una evidente analogia formale: le scritture sono complessivamente identiche, salvo che *la disgiunzione e la congiunzione sono scambiate*: si dice che tra i due connettivi esiste una **relazione di dualità**.

- **negare una disgiunzione equivale a congiungere la negazione delle due proposizioni componenti (e viceversa).**

Un gioco con le carte

Per far cogliere agli alunni il senso della *generalizzazione* delle regolarità che abbiamo scoperto, ricorriamo ad un'altra attività, più *concreta* e probabilmente meno significativa sul piano linguistico rispetto alla precedente, ma altrettanto e forse più efficace per rinforzare e/o verificare la comprensione delle Leggi di De Morgan. In essa utilizzeremo alcuni mazzi di carte francesi (ma potrebbero andare bene carte di qualsiasi altro tipo). La classe viene divisa in gruppi di due-tre alunni e ad ogni gruppo viene consegnato un mazzo di carte.

In una *prima fase* una metà dei gruppi deve eseguire la consegna A, e l'altra metà la consegna B (precisiamo che il termine OPPURE che comparirà nelle consegne B e C verrà usato nel senso di E/O):

CONSEGNA A: DEVI RACCOGLIERE E TENER SEPARATE DAL RESTO DEL MAZZO LE CARTE CHE NON SONO PICCHE E DISPARI.

CONSEGNA B: DEVI RACCOGLIERE E TENER SEPARATE DAL RESTO DEL MAZZO LE CARTE CHE SONO NON PICCHE OPPURE NON DISPARI.

Al termine della fase si confrontano e commentano le scelte effettuate dai gruppi (che riportiamo nella *tabella 2*). Successivamente si passa alla *seconda fase*, nel corso della quale le nuove consegne C e D sono:

CONSEGNA C: DEVI RACCOGLIERE E TENER SEPARATE DAL RESTO DEL MAZZO LE CARTE CHE NON SONO PICCHE OPPURE DISPARI.

CONSEGNA D: DEVI RACCOGLIERE E TENER SEPARATE DAL RESTO DEL MAZZO LE CARTE CHE SONO NON PICCHE E NON DISPARI.

CARTE RACCOLTE DAI GRUPPI					
fasì	CONSEGNA	picche dispari	picche pari	non picche dispari	non picche pari
prima	A		RACCOLTE	RACCOLTE	RACCOLTE
	B		RACCOLTE	RACCOLTE	RACCOLTE
seconda	C				RACCOLTE
	D				RACCOLTE

Tabella 2

L'equivalenza fra le consegne A e B riconduce alla (2), quella fra C e D alla (4). L'attività dei gruppi porta alle conclusioni di *tabella 2* (per maggiore chiarezza indichiamo le *non dispari con pari*).

I confronti incrociati effettuati in classe al termine di ognuna delle due fasi consentono di concretizzare in modo molto efficace le Leggi di De Morgan. Sta ovviamente agli insegnanti, al termine di queste operazioni di «convincimento», analizzare le ragioni e le caratteristiche di quelle equivalenze, in modo che la situazione didattica non si concluda con lo stupore per la scoperta e con la semplice accettazione della quasi tangibile equivalenza, fatti già importanti, che però non sono sufficienti *in sé* a garantire la necessaria interiorizzazione da parte degli alunni.

Ritorniamo a visitare la cartiera

A questo punto, possiamo concludere il nostro lavoro riesaminando il testo di partenza («La visita alla cartiera») alla luce di quanto abbiamo scoperto accompagnando Alice e il Coniglio Bianco, ancora felicemente padroni delle loro teste. Individuiamo in esso la presenza di una frase dalla struttura logica ormai familiare:

POSSONO PARTECIPARE ALLA VISITA ALLA CARTIERA GLI ALUNNI DELLA SCUOLA FURCHÉ NON ABBIANO GIÀ PARTECIPATO AD ALTRE USCITE DURANTE L'ANNO SCOLASTICO OPPURE NON ABBIAMO GIÀ VISITATO LA CARTIERA.

È emerge chiaramente il parallelismo fra la parte in neretto di questo testo e la seconda parte della (2): ci troviamo difatti in presenza di una *disgiunzione delle negazioni di due enunciati*. Di conseguenza, tenendo presente la prima parte della (2) possiamo trasformare il testo precedente nella sua forma logicamente equivalente, contenente (anche se parzialmente camuffata in quel NON...NÉ...NÉ) *la negazione della congiunzione dei due enunciati*:

POSSONO PARTECIPARE ALLA VISITA ALLA CARTIERA GLI ALUNNI DELLA SCUOLA CHE NON HANNO NÉ PARTECIPATO AD ALTRE USCITE DURANTE L'ANNO SCOLASTICO NÉ GIÀ VISITATO LA CARTIERA.

Giudichi il lettore quale delle due versioni sia più chiara.

Ma la conclusione: cosa avreste pensato di questi due testi se avessimo proposto al-

l'inizio il loro confronto? Li avreste trovati subito equivalenti? Per dirla con Alice e il Coniglio: la *vostra* testa sarebbe ancora sul *suo* collo? (Giancarlo Navarra).

Bibliografia

[Ad] Adda Josette, "Quelques études pour contribuer à l'observation du comportement mathématique des non-mathématiciens", in *Educational Studies in Mathematics* 4, 1972, pagg. 368-392.

[Ar] Arzarello Ferdinando, *Un'ipotesi di lavoro sulla Logica nella scuola di base*, relazione tenuta al Convegno CIDI "Logica...è: percorsi della mente tra lingua e matematica", 6-8 aprile 1989.

[BaZa] Barra Mario e Zanardo Alberto (a cura di), *Atti degli Incontri di Logica Matematica*, XII Incontro, Roma, 6-9 aprile 1988 sul tema "La Logica matematica nella didattica", Grafica GSE, Padova, 1989.

[Br] Brousseau Guy, "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, n. 2, pp. 33-115, 1986.

[Mal] Malara Nicolina, "Implicazione e modus ponens: sintesi di una esperienza didattica realizzata in una seconda media", in [BaZa], pagg. 245-253.

[Ma89] Marchini Carlo, "Logica proposizionale nella scuola", in «La Matematica e la sua didattica», n. 2, maggio-agosto 1989, pagg. 28-37.

[Ma90] Marchini Carlo, *Logica, insegnamento, insegnamento della Logica*, testo di una conferenza tenuta a Brescia il 22 febbraio 1990, approfondito dall'autore.

[Na84] Navarra Giancarlo, "Il Gioco della Fiaba: un progetto didattico multidisciplinare", in «Le scienze», 5, 1984, Le Monnier, Firenze, pagg. 225-238.

[Na91] Navarra Giancarlo, "Una storia di alberi e di case: proposta didattica per la quinta classe sulla classificazione, la rappresentazione e il potenziamento delle competenze logico-linguistiche", in «L'educatore», 23 giugno 1991, Fabbri Editori, Milano, pp. 16-21.

[Na92A] Navarra Giancarlo, "Il signor Kap pa allo zoo, riflessioni su un'attività didattica sulla comprensione dei valori di verità dei connettivi E, E/O, O", in «Scuola e Didattica», 13, 1992, Editrice La Scuola, Brescia, pagg. 83-88.

[Na92B] Navarra Giancarlo, "Itinerarie through logics for potentiating linguistic argumentative skills", in *Proceedings of W7 "Language and Communication in the classroom" of ICME 7, Québec (CAN), 1992*, gust, 17-23.

[NU] Progetto Nuffield per la matematica, *Logica*, Zanichelli, Bologna, 1971.

[Va] Varga Tamás, *Fondamenti di logica per insegnanti*, Borinieri Torino, 1984.