

Progetto ArAl - SeT
Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre algebrico
www.bdp.it

QUADERNO n.2

Seminario ArAl 2002/03

S.Giustina (BL), 5 – 7 settembre 2002

A cura di Giancarlo Navarra

Contributi di

Roberta Fiorini, Antonella Giacomini, Rosa Iaderosa, Vanna Incerti, Michaela Kaslova,
Elisabetta Magnani, Nicolina A. Malara, Romano Nasi, Giancarlo Navarra

Materiali collegati al quaderno:
Diapositive Power Point (Giancarlo Navarra)
Testi in formato JPEG (Romano Nasi)

Settembre 2002

Programma del Seminario ArAl 2002/2003

5 settembre, giovedì	
Mattina: Lezione di Nicolina Malara	
9.00 – 9.30	Presentazione del seminario
9.15 – 10.15	N. Malara: <i>Dalle relazioni funzionali alle funzioni (prima parte)</i>
10.15 – 10.45	coffee break
10.45 – 11.30	N. Malara: <i>Dalle relazioni funzionali alle funzioni (seconda parte)</i>
11.30 – 12.00	Discussione
Pomeriggio	
Presentazione di lavori svolti da docenti che hanno partecipato al gruppo di lavoro del Progetto Collaborativo di Ricerca MIUR - Dip.Mat di Modena e Reggio Emilia ('progetto Dutto') diretto da Nicolina Malara	
15.00 – 15.45	Elisabetta Magnani (Scuola elementare a tempo pieno S.Pertini, Carpi): <i>Sperimentazione dell'Unità 3 (Matematòca & altri giochi) e di parte dell'Unità 6 (Dalla bilancia all'equazione) in una terza elementare</i>
15.45 – 16.30	Roberta Fiorini (Istituto Comprensivo, Cesario sul Panaro (MO)); Romano Nasi (Scuola Media statale 'G.Carducci', Modena), Vanna Incerti (Istituto Comprensivo, Spilamberto (MO)): <i>Sperimentazione dell'Unità 6 (Dalla bilancia all'equazione) in una quinta elementare e in due prime medie</i>
16.30 – 16.50	coffee break
16.50 – 17.40	Discussione
17.40 – 18.00	Michaela Kaslova: <i>Riflessioni sulle difficoltà degli alunni di scuola elementare nelle trasformazioni linguaggio naturale / linguaggio simbolico e viceversa</i>

6 settembre, venerdì	
Mattina: Lezione di Rosa Iaderosa	
9.00 – 10.15	R. Iaderosa: <i>Dall'abaco alla rappresentazione polinomiale (prima parte)</i>
10.15 – 10.45	coffee break
10.45 – 11.30	R. Iaderosa: <i>Dall'abaco alla rappresentazione polinomiale (seconda parte)</i>
11.30 – 12.00	Discussione
Pomeriggio: attività laboratoriali	
	Gruppo A
	Gruppo B
15.00 – 16.20	Giancarlo Navarra: <i>laboratorio 'Giochi': riflessioni sui materiali da proporre nelle attività in compresenza 2002/03 in classi di scuola materna, prima e seconda elementare</i>
	Antonella Giacomini: <i>laboratorio 'Funzioni': riflessioni sui materiali proposti nelle attività in compresenza 2001/02 in quattro quinte elementari</i>
16.20 – 16.40	coffee break
	Gruppo A
	Gruppo B
16.40 – 18.00	Antonella Giacomini: <i>laboratorio 'Funzioni': riflessioni sui materiali proposti nelle attività in compresenza 2001/02 in quattro quinte elementari (ripetizione)</i>
	Giancarlo Navarra: <i>laboratorio 'Giochi': riflessioni sui materiali da proporre nelle attività in compresenza 2002/03 in classi di scuola materna, prima e seconda elementare</i>

7 settembre, sabato	
Mattina: Presentazione di una nuova unità didattica; definizione di aspetti organizzativi	
9.00 – 10.15	Antonella Giacomini, Giancarlo Navarra: <i>Presentazione di materiali relativi alle nuove Unità 'La proprietà distributiva', 'La Regolarità: cinture, scarabocchi, sassolini</i>
10.15 – 10.30	discussione
10.30 – 11.30	Aspetti organizzativi dell'attività ArAl 2002/03 <ul style="list-style-type: none"> • Ingresso nel progetto del gruppo di Modena • Definizione in linea di massima della collaborazione fra i gruppi di Belluno, Modena, Milano • Scelta dei responsabili di istituto • Definizione del calendario degli incontri mensili a S.Giustina • Proposte per l'organizzazione degli incontri mensili • Programmazione delle compresenze con Giacomini e Navarra • Presentazione di ipotesi di attività ArAl anche in relazione alla situazione finanziaria

Il numero naturale e le sue proprietà: loro varianza e invarianza rispetto alla rappresentazione*

ROSA IADEROSA & NICOLINA A. MALARA*****

Si espongono i risultati di un percorso didattico sperimentato in una prima media riguardante i legami tra numeri naturali, loro rappresentazioni e loro proprietà. Il percorso, complesso per la classe in cui si è attuato, prende le mosse dal riesame dell'abaco per recuperare competenze aritmetiche di base, per dare consapevolezza della generalità della rappresentazione polinomiale al variare della base ed inoltre per individuare proprietà del numero dipendenti o indipendenti dalla rappresentazione. Tra i risultati raggiunti dagli allievi si segnalano la flessibilità nell'accettare tante rappresentazioni diverse di un numero e l'individuazione di sue proprietà evidenziate da particolari rappresentazioni. Il percorso appare problematico circa i tempi di attuazione per allievi con difficoltà.

1. Motivazioni e ipotesi della ricerca

Il lavoro riguarda l'osservazione e l'interpretazione di processi didattici legati ad un *approccio sistemico* a contenuti riguardanti il numero naturale, le sue rappresentazioni, le sue proprietà. Come è noto gli allievi in genere non hanno consapevolezza della distinzione tra numero e sua rappresentazione né riescono a cogliere le reciproche implicazioni tra proprietà e rappresentazioni del numero. Per evitare il determinarsi di queste rigidità, diversi studi (Booker 1987, Mariotti & Bianchi, 1991, Zazkis 1994, Malara & Gherpelli 1997, Malara & Iaderosa 2000, Malara 2002) evidenziano l'importanza di avviare gli allievi a concepire una pluralità di rappresentazioni per uno stesso numero, a rilevare il tipo di informazioni indotte da una data rappresentazione ed a scegliere quella più conveniente ed espressiva in relazione alla situazione in esame.

Questo lavoro si pone nell'ottica di esaltare questi aspetti negli allievi sin dal loro ingresso alla scuola media. L'ipotesi di fondo è quella di attuare un progetto didattico complesso in modo da raccordare olisticamente nel tempo vari contenuti aritmetici, solitamente presentati in modo algoritmico e frammentario, al fine di esaltarne le relazioni e far cogliere agli allievi la valenza culturale di questi legami.

Il progetto, realizzato in una prima media, parte con la riscoperta dell'abaco, prima come strumento fisico e poi come modello per il consolidamento dei significati della notazione posizionale. Il percorso si sviluppa poi intorno alla concettualizzazione della relatività della base, processo in cui ancora una volta è l'abaco a guidare le graduali conquiste degli allievi. Il passaggio ragionato dalla rappresentazione posizionale a quella polinomiale del numero è fondamentale perché questi arrivino a distinguere tra numero e sue rappresentazioni ed acquisiscano una prima idea di variabile.

I concetti relativi alla divisibilità in N si intrecciano con le rappresentazioni del numero naturale nelle varie basi, cosa che richiede negli allievi la consapevolezza delle peculiarità di ciascuna, la gestione contemporanea di scritture additive e moltiplicative e la capacità di concepire ed effettuare opportune trasformazioni dall'una all'altra, con un'applicazione consapevole della proprietà distributiva.

Ad ulteriore rafforzamento di queste esperienze, si propone l'individuazione e la riflessione sulle proprietà del numero indipendenti dalla rappresentazione (ad esempio, l'essere primo, l'essere pari o dispari), e le proprietà dipendenti da questa una volta fissata la base, come in base dieci il riconoscimento della parità attraverso l'ultima cifra e più in generale i vari criteri di divisibilità.

* Lavoro realizzato nell'ambito del progetto MURST 40% "Aspetti linguistici e di rappresentazione nell'insegnamento-apprendimento della matematica".

** Scuola media "Leonardo da Vinci", Cesano Boscone, Milano e GREM - Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia <iade@dada.it>

*** Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia. <malara@unimo.it>

Le generalizzazioni proposte agli allievi si possono considerare su due livelli: un primo livello che mira soprattutto a separare, nella sua mente, il numero dalle sue diverse rappresentazioni; un secondo livello che porta a mettere in luce la relatività della stessa rappresentazione al variare della base prescelta.

Obiettivo di tutto il percorso può ritenersi la conquista della rappresentazione polinomiale come sintesi del processo di rappresentazione nelle diverse basi e come strumento per giustificare i più noti criteri di divisibilità. Si tratta quindi di un obiettivo di natura squisitamente algebrica, che si innesta sulla riflessione su processi aritmetici elementari ai quali guardare nel corso degli studi in maniera sempre più approfondita per l'affinamento dei concetti.

Un ultimo importante elemento, che apre la strada a tutto un percorso culturale successivo, è l'evidenziazione del fatto che alcune proprietà del numero circa la divisibilità possono essere dimostrabili nell'ambito della rappresentazione in una base prescelta ma che accanto a queste dimostrazioni a volte se ne possono considerare altre indipendenti da essa.

2. LA COMPLESSITÀ

La traccia ipotizzata per il lavoro di classe si sviluppa nei seguenti punti:

Il numero naturale e le sue rappresentazioni - L'abaco come mediatore didattico per la scrittura posizionale, per la variabilità della base, per l'osservazione di analogie ed il rilevamento di proprietà - Multipli e potenze, divisibilità - Rappresentazioni additive, moltiplicative, miste del numero naturale - La scomposizione in fattori primi e il criterio generale di divisibilità - Rappresentazioni in cifre e rappresentazione polinomiale - La conquista della proprietà distributiva - La giustificazione dei criteri di divisibilità per 2, 3 e 5.

Ciò che ci si propone è che l'allievo sviluppi nel tempo la cognizione de:

- i legami tra proprietà del numero e sua rappresentazione (ad esempio se un numero è divisibile per un certo altro allora si può rappresentare come prodotto di quest'ultimo per il relativo quoto e viceversa);
- il ruolo svolto dalla rappresentazione e dalle proprietà delle operazioni nella determinazione di proprietà di divisibilità (ad esempio un numero è divisibile per un altro se e solo se è esprimibile come somma di multipli di quest'ultimo (Iadrosa 1994)).

Più in generale ci si propone di portare gli allievi ad essere via via consapevoli dell'intreccio dei concetti che intervengono simultaneamente nelle questioni affrontate attraverso la costruzione progressiva della relativa mappa (nel senso di De Marois & Tall 1999).

(manca la mappa)

3. LA CLASSE E LA METODOLOGIA SCELTA.

La classe nella quale è stata realizzata la sperimentazione in oggetto era caratterizzata da una certa disponibilità ad accogliere nuovi stimoli e in generale tutte le proposte di attività scolastiche, contrastata però da una diffusa povertà di strumenti culturali, e dall'abitudine ad un tipo di lavoro scolastico basato sulla ripetitività e sulla trasmissione di automatismi. Spesso la percezione che il docente aveva circa le conquiste degli allievi nell'interazione di classe era superiore a quanto invece emergeva nel lavoro individuale. Pochi allievi riuscivano a ricostruire da soli i ragionamenti fatti, a riflettere sulle attività svolte, ad affrontare in maniera attiva problemi da risolvere o su cui formulare ipotesi. Tutto ciò poneva, tra l'altro, il problema di organizzare i tempi in maniera da trovare maggiori spazi da dedicare al lavoro individuale per il consolidamento di quanto sviluppato collettivamente.

Metodologia nel lavoro in classe

La metodologia adottata nel lavoro di classe è stata essenzialmente quella della discussione collettiva intervallata da svariati momenti di lavoro individuale. Si è dato spazio alla riflessione guidata sui significati delle conoscenze pregresse e alla costruzione di concetti nuovi attraverso la condivisione delle esperienze svolte. Elemento chiave è stato l'utilizzo dell'abaco, con modalità progressivamente più evolute e differenziate a seconda del livello di maturazione e della capacità di

astrazione dei diversi allievi. Il ricorso iniziale alla manipolazione sullo strumento fisico è stato motivato anche dalla povertà concettuale che la classe presentava circa le conoscenze aritmetiche di base. In particolare si è reso necessario un recupero sull'operazione di divisione e sui significati veicolati dalle cifre nella scrittura del numero. C'è da rilevare che se utilizzato in precedenza, l'abaco era stato visto dagli allievi come strumento di supporto al calcolo.

Metodologia della ricerca

La metodologia adottata nella ricerca si è basata sui seguenti due momenti:

- elaborazione dell'ipotesi di ricerca, pianificazione delle attività sperimentali, messa a punto delle schede di lavoro ed analisi a priori delle potenziali difficoltà degli allievi;
- analisi dei protocolli della sperimentazione (produzioni degli allievi, valutazione di discussioni, etc.), selezione di documenti significativi circa percorsi di pensiero, comportamenti e difficoltà degli allievi, elaborazione dei risultati ottenuti e riflessione sui processi che li hanno determinati.

4. IL PERCORSO

Le varie tappe del percorso possono essere illustrate e sintetizzate da alcune schede di lavoro che qui riportiamo. Le schede sono state costruite per evidenziare il significato delle varie esperienze condotte nel lavoro di classe e successivamente per proporre questioni chiave al fine di stimolare la discussione tra gli allievi.

La prima scheda è finalizzata alla verifica della comprensione del ruolo dell'abaco nella genesi della rappresentazione del numero e del significato delle cifre in relazione alla posizione.

Scheda 1

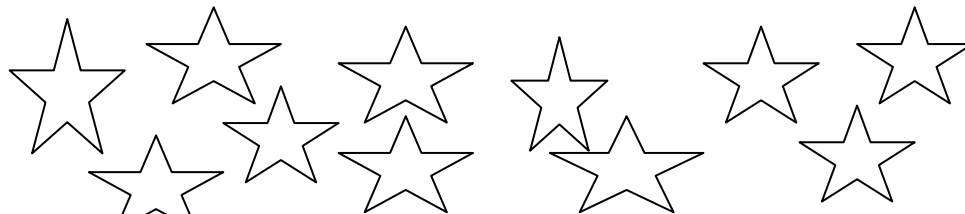
Quante decine ci sono nel numero 112? Utilizza l'abaco in base 10 per giustificare e spiegare la tua risposta.



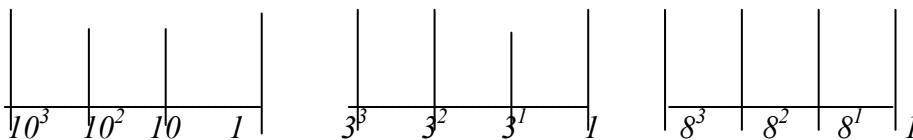
Ripeti ora il tuo ragionamento per rispondere alla seguente domanda:

"Quante decine sono contenute nel numero 102?"

Scheda 2



Rappresenta il numero delle stelline disegnate sui seguenti abaci, indica poi in ciascun caso la rappresentazione del numero in cifre, nelle diverse basi :

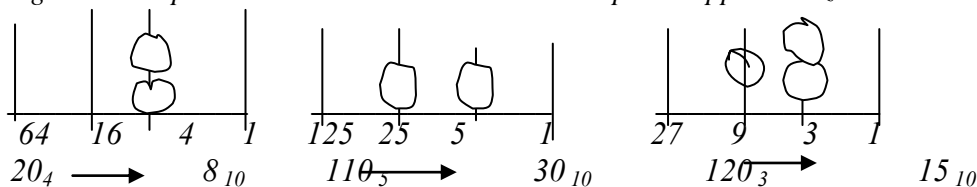


La seconda scheda è finalizzata a testare la capacità di rappresentare in basi diverse una stessa quantità, a cogliere la varianza della rappresentazione di una data quantità a seconda della base.

La terza scheda, di difficoltà più elevata, vuole verificare la capacità di collegare le attività concrete di raggruppamento, implicite nella rappresentazione posizionale, leggibili in termini di divisibilità, con proprietà di questa relazione relative ai multipli di un dato numero; ciò che occorre osservare, e che l'abaco mette bene in luce, è che nel caso di una quantità multipla della base, il numero che la rappresenta è divisibile per la base, di conseguenza la rappresentazione di questo in quella base termina necessariamente per zero.

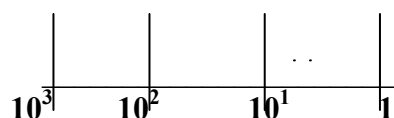
Scheda 3

I seguenti numeri sono rappresentati sull'abaco in varie basi. Osserva le loro rappresentazioni: quali analogie noti nelle rappresentazioni sull'abaco? Quali analogie nelle rappresentazioni in cifre? C'è un legame tra le particolarità che si vedono nei due tipi di rappresentazioni?

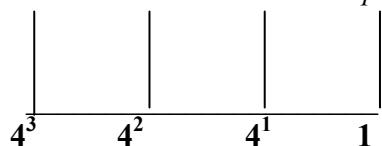


Scheda 4

Utilizza l'abaco per esprimere nella rappresentazione polinomiale il numero 123_{10}



Ora utilizza l'abaco in base 4 per rappresentare nella forma polinomiale il numero 123_4



Ora prova a descrivere la rappresentazione polinomiale del numero:

- da che cosa è costituita? (.....+.....+.....)
- da che cosa sono costituiti gli addendi, al posto dei puntini?
- Quali numeri in particolare compaiono nei vari prodotti?
- Quale legame c'è tra questi numeri e la base in cui si sta contando?
- Credi che si riconoscerebbe dalla sua scrittura polinomiale in base 10 un multiplo di 10? Da quale caratteristica si potrebbe riconoscere?

Le schede 4 e 5, di notevole complessità, sono finalizzate ad una indagine sulle concettualizzazioni acquisite dagli allievi e alla messa in discussione delle concezioni da loro evidenziate.

La scheda 4 punta a verificare la capacità di ricostruire la configurazione sull'abaco di una stessa rappresentazione in due basi distinte e di controllare il diverso significato delle varie cifre della rappresentazione al variare della

Scheda 5

Ogni numero naturale può essere "vestito" con una rappresentazione che è particolarmente adatta a ciò che in quella situazione interessa "vedere" delle sue caratteristiche; ogni "vestito" è adatto all'utilizzo che dobbiamo fare del numero. Esso inoltre si differenzia a seconda dell'importanza che ha quel numero in relazione alla base scelta per la rappresentazione.

- Il "vestito più elegante" è di questo tipo:

100 1000 10 10000.....

Descrivi che cosa caratterizza queste rappresentazioni, e a quali numeri si può assegnare questa rappresentazione, in una base assegnata; fai degli esempi.

- Un "vestito elegante, ma meno impegnativo" è di questo tipo:

230 50 300 480 1280 12800 420.....

- Descrivi anche la caratteristica comune a queste rappresentazioni
- Spiega la relazione esistente in questo caso tra il numero considerato e la base in cui si sta contando.

- Un "vestito qualsiasi" è di questo tipo:

34 59 27 497 451 7548.....

- Spiega quale caratteristica accomuna le rappresentazioni esemplificate
- Può un "vestito qualsiasi" in una certa base, diventare un "vestito più elegante" in un'altra base? Spiega in che modo si dovrebbe scegliere in questo caso la base.

base. All'allievo è richiesto di: a) esplicitare il collegamento tra rappresentazione posizionale e rappresentazione polinomiale; b) indicare il significato dei singoli termini del polinomio ed evidenziare i loro caratteri in relazione alla base; c) individuare le particolarità della rappresentazione di numeri multipli della base, nel più semplice caso della base dieci.

La scheda 5, mostra la rappresentazione come 'vestito' di un numero e utilizza la metafora del 'grado di eleganza di un vestito'. Attraverso tale metafora si vuole indurre negli allievi la consapevolezza dell'esistenza di rappresentazioni privilegiate nel caso in cui la base sia un divisore del numero.

5. I comportamenti degli allievi

Ai fini della ricerca risulta interessante in relazione alle schede l'analisi dei comportamenti degli allievi e delle loro verbalizzazioni riguardo a:

- l'individuazione dei collegamenti tra configurazione sull'abaco e rappresentazione posizionale del numero nelle varie basi;
- l'esplicitazione delle differenze tra rappresentazioni di uno stesso numero a seconda che esso sia o no multiplo della base;
- l'individuazione di relazioni tra numeri aventi rappresentazioni analoghe.

Per questioni di spazio ci limitiamo qui a riportare l'analisi delle produzioni relative alle schede 2, 4 e 5.

5.1. Commento alla scheda 2

13 schede su 19 sono essenzialmente corrette, tuttavia gli atteggiamenti, testimoniati dai protocolli degli allievi, evidenziano in maniera interessante come essi hanno interagito con la complessità degli elementi in gioco. Ne descriviamo alcuni.

Controllo sulla molteplicità di rappresentazioni in gioco

In due casi la rappresentazione sull'abaco è corretta, ma la rappresentazione scritta sotto in cifre è sempre 11. Cinque allievi, dopo aver trovato le rappresentazioni richieste, tentano spontaneamente di formalizzare la corrispondenza tra le scritture nelle diverse basi: è evidente la loro difficoltà nel controllare le scritture, in cui interferiscono simbolismi e concettualizzazioni recenti (in tre casi sono corrette entrambe le scritture richieste, ma c'è un tentativo errato di formalizzare la corrispondenza). Solo due allieve, per contare le stelline, le numerano in base 10, un altro fa su ogni stellina una tacca (sempre la stessa). Un allievo rappresenta correttamente il numero sull'abaco in base 10, e riproduce la stessa rappresentazione anche sugli abaci in base diversa, per cui la rappresentazione è sempre 11, senza l'indicazione della base, nonostante egli dichiari che si tratta di rappresentazioni in base 3 e in base 8. Undici allievi si muovono correttamente in base 8 e male in base 3. Tre allievi, al contrario, controllano la base 3 e la base 10, ma non la base 8. Cinque allievi sono confusi e sbagliano tutte le rappresentazioni, anche in base 10, sull'abaco. Otto allievi sono evidentemente confusi dalla scrittura delle potenze di 3 e di 8 in forma esponenziale piuttosto che in cifre.

Coordinamento tra esperienza sul modello abaco e concettualizzazione

Due allievi rappresentano correttamente solo sull'abaco, omettendo la scrittura in cifre. Un'allieva documenta la rappresentazione sull'abaco, nelle varie basi, verbalizzando qual è il valore di ciascuna pallina, e ciò le consente di mantenere il controllo sulla correttezza delle rappresentazioni, che si fermano però solo all'abaco. In alcuni non compare la necessità di precisare la base nelle scritture in cifre, peraltro corrette, dopo aver rappresentato l'abaco e operato con esso. Tre allievi rappresentano correttamente solo in base 10. Cinque allievi rappresentano correttamente, riproducendo sul disegno dell'abaco l'operazione materiale di "svuotamento" di un'asta, quando si superi il numero di palline massimo consentito in quella base. In alcuni casi si vede qualche pallina sull'abaco cancellata da un'asta, per essere spostata in un'altra asta, peraltro pervenendo ad un risultato corretto.

5.2. *Commento alla scheda 4*

La scheda ha evidenziato in maniera particolare le difficoltà degli allievi a muoversi correttamente nel coordinamento delle varie rappresentazioni in esame. Essi avevano "giocato" più volte in classe ad "usare", anche solo mentalmente la scrittura polinomiale per risalire da una scrittura in basi diverse dal dieci al valore del numero in base 10. Tuttavia, la rappresentazione del numero in forma additivo/moltiplicativa con l'utilizzo contemporaneo delle potenze costituisce un grosso ostacolo alla corretta gestione della rappresentazione in questione. I risultati della scheda hanno stimolato una serie di discussioni e riflessioni successive; riteniamo tuttavia che i tempi necessari per l'interiorizzazione di questa rappresentazione, in questa fascia d'età, siano piuttosto lunghi.

Alcuni comportamenti degli allievi su questa scheda

Solo 10 allievi su 19 individuano la scrittura polinomiale nella sua struttura (somma di prodotti); gli altri sono evidentemente confusi dalla molteplicità delle rappresentazioni.

E' evidente per gli allievi la difficoltà dell'utilizzo e della esplicitazione dell'operazione di potenza, così come la difficoltà di controllare una scrittura complessa e articolata come quella polinomiale, per di più in basi diverse.

In 6 protocolli non compare la distinzione tra potenze di 10 e potenze di 4; gli allievi mostrano di controllare bene la rappresentazione con l'abaco, ma compaiono errori di calcolo dovuti all'uso delle potenze ($4^3=12\dots$), e le scritture da essi proposte o contengono solo la somma delle potenze della base, omettendo le cifre, oppure solo le cifre, senza i prodotti per le relative potenze della base. E' presente in quasi tutti gli allievi la percezione che lo zero finale, ovvero l'ultima asta a destra dell'abaco vuota (anche se il legame tra le due cose non è detto che sia colto) si traduce nella rappresentazione di un multiplo della base in cui si conta. Appare comunque evidente come l'abaco induca molto più facilmente la visione del numero rappresentato nella scrittura posizionale, che non in quella polinomiale.

5.3 *Commento alla scheda 5*

Questa scheda è stata somministrata in una fase abbastanza precoce del percorso: domande analoghe, poste isolatamente in successive verifiche, hanno dato risultati migliori. E' stata quindi mezzo di valutazione formativa, che ha consentito di mettere a fuoco le difficoltà su cui ritornare con la classe in attività mirate.

Per 7 allievi su 15 (quattro erano assenti) le risposte sono state essenzialmente corrette e indicative di una buona comprensione del problema posto. Altri 8 allievi hanno avuto difficoltà a mettere in relazione la peculiarità delle rappresentazioni con la relazione di divisibilità tra base e numero considerato. E' importante sottolineare come la difficoltà maggiore sia stata quella di far distinguere la rappresentazione delle potenze della base (prima cifra 1 e tutti zeri), da quella dei multipli (zero finale). Ci pare di poter rilevare che la difficoltà a distinguere tra multiplo e potenza, che generalmente si incontra in queste attività, sia generalizzabile anche al tipo di rappresentazione di questi numeri. Per l'allievo l'attenzione è puntata essenzialmente sugli zeri finali, la rappresentazione delle potenze della base tende ad essere confusa con quelle relative ai multipli della base stessa.

Un altro elemento interessante è l'utilizzo persistente dell'abaco anche nella individuazione delle rappresentazioni che hanno qualche particolarità. Lo zero finale viene identificato da quasi tutti gli allievi con l'ultima asta dell'abaco vuota: è forse proprio l'attenzione a questa caratteristica dell'abaco che rende più difficile la caratterizzazione delle rappresentazioni in cui ci sono altri zeri.

6. UNO SGUARDO DI INSIEME SUI PRIMI RISULTATI DELLA RICERCA

6.1 Alcune considerazioni generali

L'itinerario progettato si basa sulla convinzione che, seppure ad un livello scolastico ancora precoce, sia possibile, anzi doveroso, presentare temi e concetti della Matematica con un approccio alla complessità, che tenti di rendere consapevoli i giovani allievi della esistenza di una rete tra questi concetti. Con un tale approccio si vuole anche che gli allievi si rendano conto della sterilità e poca significatività di attività di Matematica condotte attraverso esercizi di pura applicazione di un insieme di regole presentate in maniera sequenziale e separate tra loro. Una volta introdotti certi concetti, la riflessione su questi e sui loro legami si basa anche su una operazione di selezione e di consolidamento di attività meno complesse e graduate nelle difficoltà. Tutto ciò con l'intento ben preciso, tuttavia, di un necessario e tempestivo ritorno alla complessità.

La sperimentazione di un itinerario così concepito si serve di strumenti valutativi vari ed articolati: la somministrazione delle varie schede agli allievi costituisce da un lato un momento di verifica formativa, ma nello stesso tempo crea occasioni e stimoli per un ulteriore approfondimento nel lavoro collettivo delle questioni sollevate. In tali occasioni sono i ragazzi stessi a suggerire nuovi spunti di discussione, o a cogliere legami che non sempre erano stati previsti dall'insegnante. Non è quindi facile chiarire il contratto didattico per quanto concerne le richieste e le aspettative dell'insegnante nei confronti degli allievi. Il lavoro si snoda attraverso una vera e propria ricerca comune al docente e alla classe, sulle difficoltà e le potenzialità relative alle attività proposte.

Questo comporta anche la dilatazione dei tempi di lavoro, cosa che nel nostro caso ha reso necessario il rinvio all'anno successivo della parte conclusiva il percorso ipotizzato. La giustificazione del criterio di divisibilità per tre, tappa finale e sintesi del complesso dei concetti introdotti, non si è potuta affrontare anche se è stato condotto un lavoro sottile e mirato ad essa, riguardante la proprietà distributiva, su cui non ci possiamo soffermare. C'è da aggiungere inoltre che questa sperimentazione ci ha convinti della necessità/opportunità di operare con tempi più lunghi.

Resta comunque il problema di una metodologia che risulta poco rassicurante, soprattutto per gli allievi più deboli. Questi in genere si fermano alle attività esercitative selezionate e isolate, rispetto alla rete di concetti in gioco. L'eventuale successo raggiunto sul controllo delle regole proposte costituisce per loro un importante momento di assicurazione e gratificazione. Attività concepite nella complessità invece richiedono un continuo ritorno sulle difficoltà, sui nodi, sulle incertezze, e inevitabilmente la pazienza di aspettarsi risultati positivi più a lungo termine. Se da un lato siamo convinti dell'utilità, anche per loro, di un lavoro di questo tipo, non possiamo non porci come problema l'effettivo disorientamento per alcuni allievi con maggiore difficoltà.

6.2 Alcuni significativi risultati

Nonostante la difficoltà, le schede si sono rivelate alla portata degli allievi, grazie anche all'atteggiamento di costante attenzione dell'insegnante nel rilevare analogie e differenze, caratteristico di tutto il lavoro nella classe.

E' risultata notevole la disinvoltura con cui gli allievi hanno accettato l'idea che un numero naturale abbia tante rappresentazioni diverse, anche generate da procedure quali la scomposizione in fattori (primi e non), abbiano considerato scritture additivo-moltiplicative e, una volta introdotta la potenza, anche quelle polinomiali, o più semplici scritture additive, rivalutate anche in attività di avvio alle equazioni con il modello della bilancia (Malara & Navarra 2000).

Al di là della effettiva capacità di controllare sul piano delle tecniche un insieme così complesso di rappresentazioni, abilità che certamente va sviluppata e curata in tempi più lunghi, una certa chiarezza sui concetti ha consentito agli allievi stessi di orientare i primi passi per la costruzione di una mappa concettuale, che certamente dovrà completarsi e meglio delinearci con il prosieguo degli studi. Ad esempio, "giocando" a rappresentare sull'abaco il numero 11 in basi minori di 10, alcuni degli stessi allievi si sono resi conto che non era possibile trovare una rappresentazione "notevole" con qualche zero finale, in quanto 11 è un numero primo e la base non può essere un suo divisore.

Ci sembra un ottimo risultato di ritorno sul piano cognitivo della valenza di operare connessioni tra la rete dei concetti introdotti.

Nel prosieguo con lo svolgersi delle attività di consolidamento e con l'ulteriore puntualizzazione dei vari concetti in gioco, si è rilevata una maggiore padronanza nella comprensione e nell'utilizzo della scrittura polinomiale. Ad esempio, nelle prime attività non venivano espresse in forma esponenziale le potenze della base, l'uso di tale rappresentazione è stata una conquista individuale avvenuta in tempi successivi e diversi.

Una delle difficoltà che avevano richiesto scelte didattiche iniziali in ogni caso "rischiose" si è poi rivelata come una sorpresa per gli esiti ottenuti. Si tratta dell'orientamento da dare alla scrittura polinomiale da destra verso sinistra: se si vuole conservare l'idea del progressivo crescere del valore delle cifre da destra verso sinistra, per gli allievi è più naturale partire dalla esplicitazione di tale valore a partire dalle unità, e quindi procedendo proprio nel verso opposto a quello con cui avviene invece la lettura della cifre nella notazione posizionale. Inizialmente si è scelto di operare secondo il primo orientamento, quindi a partire dall'abaco gli allievi esplicitavano il valore delle cifre procedendo da destra verso sinistra. Ad esempio, 324_{10} veniva scritto come: $\underline{4} \times 1 + \underline{2} \times 10 + \underline{3} \times 100$ (la sottolineatura delle cifre rispetto le potenze di 10 è stato un mediatore importante per mantenere distinti i ruoli dei fattori nei prodotti). Successivamente, in maniera quasi spontanea, la sistematicità delle attività di carattere metacognitivo riguardanti la notazione polinomiale, ha condotto ad usare scritture in cui i due ordinamenti si alternavano, così come la necessità di caratterizzare il valore delle cifre con potenze della base spostava l'attenzione dai risultati numerici alla scrittura delle potenze, che meglio evidenziavano il legame di questi valori con la base considerata. Ci sembra significativa quindi la conquista di una certa flessibilità nella scrittura polinomiale, dettata dai significati che gradualmente si andavano conquistando, e non da forme stereotipate in qualche modo interiorizzate dai ragazzi.

Nel complesso quindi, il bilancio delle attività è positivo e confortante nel momento in cui allievi di prima media si attivano consapevolmente su un percorso ricco e ambizioso per gli obiettivi che si propone. Le richieste per un lavoro del genere sono adeguate alle reali potenzialità di allievi di questa fascia scolare; bisogna tuttavia fare i conti con la reale motivazione che hanno i ragazzi di queste ultime generazioni a confrontarsi con le difficoltà e attendere pazientemente che avvenga una crescita non collegata strettamente e in tempi brevi al successo scolastico personale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Booker G., 1987, Conceptual Obstacles to the Development of Algebraic Thinking, *Proc. PME XI*, vol.1, 275-281
- De Marois, P., Tall, D.: 1999, Function: organizing principle or cognitive root?, *proc. PME 23*, vol. 2, 257-264
- Iaderosa, R.: 1994, La teoria della Divisibilità nella scuola media. Riflessioni, esperienze, proposte, in Basso & al. (a cura di), *Numeri e proprietà*, Parma, 101-106
- Malara N.A.: 2001, La dimostrazione in ambito aritmetico, quale spazio nella scuola secondaria?, in Malara N.A., (a cura di) *Educazione Matematica e Sviluppo Sociale: esperienze nel mondo e prospettive*, Rubettino,, Cosenza, 129-166
- Malara N.A., Gherpelli L.: 1997, Argomentazione e dimostrazione in aritmetica: risultati da una ricerca nel lungo termine, *L'Educazione Matematica*, anno XVIII, serie V, vol. 2, n. 2, 82-102
- Malara, N.A., Iaderosa, R.: 2000, The Interweaving of Arithmetic and Algebra: Some Questions About Syntactic, Relational and Structural Aspects and their Teaching and Learning, in Swanke, E. (a cura di) *European Research in Mathematics Education*, vol. 2, 159-171
- Malara, N.A., Navarra, G.: .2000, Percorsi esplorativi per promuovere il pensiero algebrico attraverso problemi, *L'Educazione Matematica*, anno XXVI, serie VI, n.1, vol. 2, 7-21
- Mariotti, M.A., Bianchi, N., 1991, Un'indagine sulle intuizioni coinvolte in problemi di divisibilità, *L'Educazione Matematica*, anno XII,-serie III, vol. 2, 93-103
- Zazkis, R.:1994, Divisibility and Division: procedural attachments and conceptual understanding, *proc. PME 18*, Lisbona, vol. 4, 423-430

La bilancia a piatti come metafora dell'equivalenza dei termini di un'equazione

Considerazioni relative all'esperienza didattica svolta

Roberta Fiorini

Istituto Comprensivo 'Pacinotti' San Cesario, Modena
fulvio.montanari@libero.it

lucidi

Punti presi in esame

Questioni psicologiche

- impatto dell'attività sui ragazzi
- difficoltà
- influenza delle dinamiche di gruppo
- impatto su di me

questioni di contenuto

- dalla rappresentazione dell'equilibrio della bilancia al segno di uguaglianza
- verso la conquista della lettera
- il conflitto tra procedura aritmetico-intuitiva e procedura algebrica
- la crescita culturale dei ragazzi

Impatto dell'attività sui ragazzi

I ragazzi fin da subito hanno lavorato con grande entusiasmo, tanto che spesso il suono della campana li ha trovati completamente impreparati.

Impressioni raccolte tra i ragazzi durante la seconda fase dell'attività circa la modalità didattica (discussione e riflessione scritta)

Federico: *mi è molto piaciuta, perché per me è una bella cosa usare il registratore.*

Anastasia: *mi piace discutere con gli altri, prendere delle decisioni in comune e qui tutto questo è successo*

Jasmine: *l'attività mi è piaciuta perché si hanno opinioni diverse e si può vedere come la pensano gli altri. E poi a me piace risolvere i problemi*

Matteo: *mi piace perché mi ha aiutato a capire*

Andrea: *mi è piaciuta perché puoi dire la tua e poi non ci si stanca*

Salvatore: *è stata bella per i dialoghi*

Matilde: *mi è piaciuta molto, è stata istruttiva, perché ci ha insegnato ad esprimere le nostre idee con il linguaggio della matematica*

Alessio Ca: *mi è piaciuta solo la prima parte, quella delle grandi discussioni. La seconda (quella che stiamo facendo sul quaderno) mi sta piacendo meno, a me i problemi non piacciono.*

Influenze dell'attività sulla classe

L'atteggiamento positivo dimostrato verso questa unità didattica si è mantenuto anche successivamente nei confronti di qualunque attività di matematica proposta.

I fattori di influenza:

- il fatto che ciascun ragazzo fosse messo nella condizione di poter esprimere la propria opinione. Come evidenziato in letteratura questo tipo di attività rende gli alunni protagonisti nella costruzione collettiva del loro sapere. E ciò è risultato altamente motivante.
- La presenza nella classe di alcuni alunni con forti personalità, in grado di sostenere e argomentare adeguatamente le proprie idee e convinzioni
- Il clima di serena collaborazione finalizzata alla risoluzione dei problemi

Difficoltà incontrate

I ragazzi in generale faticano ad esprimere in modo corretto ciò che pensano anche con il linguaggio naturale. Nel passaggio all'algebra le difficoltà risultano quindi maggiormente evidenti.

Prima fra tutte c'è la difficoltà di comprendere il testo della situazione considerata cioè i dati utili e la richiesta.

Una seconda difficoltà è legata alla traduzione in simboli comprensibili a tutti della situazione (*la semantica*) cioè il passaggio dal linguaggio naturale a quello formale ed infine la difficoltà legata alla soluzione della situazione attraverso un procedimento formalizzato (*la sintassi*).

Una difficoltà di rilievo:

lo spostamento di attenzione dal risultato al processo

Quando nella prima fase veniva chiesto ai ragazzi di trovare il peso di un sacchetto di qualcosa per loro il senso della richiesta era: dire il numero che rappresentava il peso richiesto; non significava per loro trovare un procedimento logico attraverso il quale arrivare a dare una risposta alla domanda.

Un aspetto importante: *La motivazione al metodo algebrico*

Per rendere più evidente la necessità di operare con un procedimento alla soluzione delle situazioni ho dato alla prima fase ampio spazio; ho integrato l'attività di base con situazioni caratterizzate da numeri più complessi (allegato 1).

La prima fase è stata esclusivamente orale e i ragazzi erano chiamati, esprimendosi nel linguaggio naturale, a raccontare tutte le operazioni che dovevano eseguire per risolvere le situazioni proposte.

Sono state stabilite attraverso decisioni collettive le regole di rappresentazione e solo a questo punto si sono rappresentate le situazioni sul quaderno utilizzando il linguaggio simbolico.

Questo passaggio non è risultato particolarmente complesso relativamente ai problemi in cui compariva in modo esplicito la bilancia (II e III fase), anche se non tutti hanno abbandonato la scelta di una lettera uguale a quella dell'iniziale del nome del contenuto del sacchetto o di altro

(*persistenza semantica*). Così come non è stato complesso risolvere le altre situazioni una volta stabilite le regole.

E' stato importante far riflettere i ragazzi sui principi che stavano alla base dei processi per riuscire ad acquisire la capacità di giustificare il processo e il risultato ottenuto.

Imparare ad esprimere le proprie idee e i procedimenti prima con il linguaggio naturale e poi con quello simbolico è risultato di grande aiuto ai fini del loro avvio al linguaggio algebrico.

Le difficoltà nelle situazioni senza la bilancia

Le difficoltà sono state più evidenti e varie

- *Individuazione delle situazioni da mettere a confronto e comprensione di quale sia l'incognita.*
- *l'utilizzo consapevole della rappresentazione moltiplicativa* (comporta difficoltà sottili concettuali).

Inizialmente un certo numero di ragazzi la utilizza correttamente per rappresentare la situazione, ma per operare ha bisogno della rappresentazione additiva. Solo quando i numeri, troppo alti, non permettono più questo modo di procedere è costretto a cambiare strategia ed inizia ad operare *consapevolmente* con la rappresentazione moltiplicativa.

- *incidenza del simbolo della bilancia*

La bilancia è risultata una metafora forte e gli alunni se ne sono liberati con fatica. Il simbolo da loro scelto per rappresentare l'equilibrio li ha accompagnati fino quasi alla fine della quarta fase. Le due linee che rappresentavano i piatti sono state un «appoggio mentale» (come l'ha chiamata Anastasia) difficile da abbandonare per molti.

- *Complessità testuale dei problemi della quinta fase*

Il problema si è risolto proponendo il lavoro di gruppo

Dinamiche di classe

La classe è equamente divisa tra maschi e femmine. La leadership è costituita da un gruppo delle ragazze.

Nelle discussioni di classe alcuni ragazzi hanno un ruolo di primo piano, come appare chiaramente dalla lettura dei verbali e dal numero di interventi di ciascuno.

Domina su tutti la forte personalità di Anastasia alla quale si contrappongono Elisa e Jasmine, sue concorrenti. Spicca la personalità di Federico ed il duetto 'Anastasia-Federico'.

Federico

Ragazzo iperattivo, con un'intelligenza vivace, di tipo pratico, attua spesso soluzioni alternative e corrette di cui non riesce a dare chiara giustificazione anche per questioni caratteriali, spesso i suoi interventi nella discussione sono lasciati cadere dalla classe, trainata dalle ragazze, per questioni di leadership.

Anastasia

E' brava già avviata al pensiero astratto, puntigliosa. Si contrappone a Federico, estremamente pratico, che in alcune occasioni mal sopporta il ruolo della compagna *dell'altro sesso* troppo abile e sempre pronta a «complicare la vita». (Ciò emerge molto chiaramente nella discussione del problema inventato, di tipo indeterminato, proposto alla classe da Anastasia). La personalità di Anastasia emerge anche nel lavoro di gruppo dell'ultima fase, quando dirige l'attività all'interno del suo gruppo. *Induce tutti a ragionare ed a relazionare per iscritto sui propri processi di pensiero.*

La sua leadership è riconosciuta ma spesso mal sopportata

Jasmine ed Elisa

Sono alunne brave che danno un buon contributo all'attività, ma amano essere protagoniste (soprattutto jasmine), vogliono continuamente essere ascoltate, si confrontano pesantemente *con le altre ragazze*, soprattutto con Anastasia. Vorrebbero ottenere più riconoscimenti di lei; doverle in qualche occasione darle ragione costa loro parecchio.

Mattia

E' intelligente e creativo, ha credito e le sue proposte vengono prese in seria considerazione. A volte non riesce a sostenere fino in fondo o con chiarezza le sue posizioni.

Riccardo

Saggio e di poche parole, svolge un importante ruolo di mediazione tra le parti e in alcune situazioni il suo contributo è determinante.

Giulia B

Molto intelligente e brava è però riservata. Si confronta alla pari con Anastasia senza essere in competizione o gregaria. In momenti di lavoro avanzati, incompresi dai più (problema indeterminato), condivide convinta le sue idee.

Matteo

ragazzino che partecipa ma incapace spesso di condurre a termine i suoi ragionamenti. E' permaloso e poco disponibile alla messa in discussione delle sue idee. Il suo ruolo è paradossalmente importante per lo sforzo degli altri nel controbattere il suo punto di vista.

Impatto su di me

Per me è stata un'esperienza nel complesso molto positiva, che mi ha preso molte energie, ma che mi ha dato soddisfazioni e mi ha permesso di lavorare in modo nuovo.

Nella mia attività di insegnante dò in genere un po' di spazio alla discussione, ma non utilizzo il registratore.

La presenza del registratore mi ha inizialmente molto emozionata e in parte bloccata.

Mi sono accorta della ricchezza dei ragazzi e di come, si sentano motivati e altamente stimolati alla partecipazione quando viene espressamente chiesto il loro parere, cioè quando li si fa diventare protagonisti.

La monotona lezione ad una sola voce dell'insegnante si è trasformata in una interessante lezione a più voci, attesa con piacere.

Penso quindi sia un'esperienza da ripetere anche in altri ambiti. Penso comunque che non sia possibile affrontare qualunque argomento con questa metodologia, per il numero di ore elevato che richiede.

Per la mia crescita come insegnante è stato molto importante il riascolto dei dialoghi, ho potuto rendermi conto o di un mancato intervento o di un intervento poco chiarificatore o di aver parteggiato per una soluzione piuttosto che per un'altra, magari soltanto per aver pronunciato un «bene» o aver fatto una smorfia.

Ciò è documentato nel verbale della sperimentazione (213 al 215) dove l'assenza della mia voce non ha valorizzato strategie risolutive diverse da quelle standard che in quel contesto, erano state facilitate dai numeri 'trasparenti'.

Occorre ben dosare il proprio ruolo: l'intervento dell'insegnante ci deve essere e ben calibrato, perché d'altro canto non bisogna dimenticare che il silenzio può facilitare l'esplicitazione del pensiero dell'alunno.

Ho cercato di dare ampio spazio alla discussione fra i ragazzi, riducendo molto i miei. In questo atteggiamento sono stata aiutata dal mio carattere timido ed introverso e dall'abitudine a parlare poco e ad ascoltare molto.

Mi sono quindi resa conto di avere ancora molto da imparare nell'orchestrare le discussioni.

Mi sono accorta di non aver controllato sempre consapevolmente il contributo di tutti nella fase di discussione.

Nella classe è presente qualche alunno che non parla spontaneamente e che non risponde di fronte ad una domanda diretta. Al momento non me la sono sentita di imporre loro l'obbligo di parlare, ma avrei potuto coinvolgerli maggiormente chiedendo loro di scrivere ciò che avrebbero voluto dire.

Per rimediare e mostrare che comunque anche questi ragazzi hanno partecipato anche se silenziosamente all'attività nella verbalizzazione dell'esperienza ho preso spesso ad esempio proprio i loro quaderni.

Altro aspetto positivo della sperimentazione è stato *il confronto reale con colleghi di altre scuole*.

E' stato possibile un confronto tra le difficoltà incontrate nell'attuazione dell'attività, il diverso modo di porsi di fronte ai ragazzi o di formulare loro le domande per favorire il coinvolgimento di tutti.

Questo di solito nella routine della propria scuola si verifica nei gruppi monodisciplinari, il confronto però c'è, ma non entra così profondamente nel merito di ciò che si sta facendo o che si deve fare.

L'apporto culturale e di formazione è stato di grande aiuto e ha permesso di mettere a fuoco i punti di forza e di debolezza dell'attività. Sono stati così possibili gli aggiustamenti là dove si erano resi necessari.

La registrazione della lezione è uno strumento molto valido al fine di evidenziare pregi e difetti di una certa attività: evidenzia ritmi, dinamiche di gruppo, noie

E' un'esperienza sicuramente da consigliare a quei colleghi che ancora hanno voglia di mettersi in gioco e di cambiare.

Conquiste culturali

- *L'appropriazione del metodo algebrico*

Nel prosieguo in contesti diversi, per esempio geometrico, affrontati in tempi successivi, tutti i ragazzi hanno riconosciuto le situazioni di equivalenza e le hanno risolte senza più bisogno dell'appoggio del simbolo dei piatti (anche i più restii all'abbandono hanno usato il segno '=').

- *la gestione di diverse rappresentazioni dei numeri*

E' stato importante abituare gli allievi ad individuare e a gestire una pluralità di rappresentazioni di uno stesso numero ed ad educarli a scegliere la più adeguata alla situazione (attività con le piramidi dei numeri).

Grazie a queste attività i ragazzi hanno avuto una strategia in più nella soluzione delle situazioni di equivalenza. Moltissimi infatti applicavano il primo principio cancellando i termini uguali dalle due parti dopo aver scomposto i numeri in modo utile.

Allegato n. 1: Stralcio di discussione

79. 24 Ins: *Propongo la 4° situazione e apro la discussione:*

*piatto sinistro :
un sacchetto di sale e 150 g*

*piatto di destra:
quattro sacchetti di sale*

80.1 *Alessio Ca:* per me un sacchetto di sale pesa 50 grammi. Ho fatto 150 più un numero a caso, per esempio 50 uguale 200 grammi. Poi ho fatto 200 diviso 4 che fa 50 grammi, e può andare bene.

81.9 *Anastasia:* il sacchetto di sale pesa 50 grammi. Debbo togliere un sacchetto da ogni piatto, così ho 3 sacchetti a destra e 150 grammi sull'altro piatto, quindi faccio 150 diviso 3 che fa 50 grammi.

82.7 *Federico:* un sacchetto di sale pesa 50 grammi, tolgo un sacchetto dai due piatti, la bilancia è ancora in equilibrio con 150 grammi da una parte e tre sacchetti dall'altra, poi per trovarne uno faccio diviso 3, 150 diviso 3 fa 50 e $50 + 50 + 50$ fa 150.

.....
85.12 *Mattia:* Sono d'accordo con Alessio il peso di un sacchetto è 50 grammi.

86.9 *Jasmine:* Sono d'accordo anch'io sul peso di 50 grammi e con il ragionamento di Anastasia.

87.10 *Anastasia:* ho applicato sia il primo che il secondo principio della bilancia

88. 3 *Elisa:* io trovo più semplice il ragionamento di Alessio rispetto a quello di Anastasia.

89.4 *Riccardo:* secondo me il ragionamento di Alessio è un po' rischioso perché non è detto che venga

90.13 *Mattia:* ma viene perché a sinistra ho 50 grammi e 150 grammi cioè 200 grammi e a destra ho 50 grammi 50 grammi 50 grammi 50 grammi cioè 200 grammi.

91.2 *Andrea:* secondo me tutti e due vanno bene, ma preferisco quello di Anastasia perché si fa prima.

92.2 *Valentina:* anch'io sono d'accordo con Anastasia

93.4 *Elisa:* è vero che il ragionamento di Alessio è più rischioso, ma poi puoi fare la prova per vedere se va bene.

Termina qui la prima ora di attività.

La situazione rimane aperta e nella seconda ora propongo un riesame delle situazioni considerate attraverso dati numerici più impegnativi.

*piatto sinistro :
un sacchetto di sale e 573 g*

*piatto di destra:
quattro sacchetti di sale*

.....
130.2 *Alessio Ca.:* in questo caso si fa prima se faccio il metodo dell'Anastasia

.....
136.5 *Alessio Ca.:* prima il numero era facile. Se applico i principi va bene sempre.

La trasformazione della lingua parlata in simboli matematici e viceversa

Michaela Kaslova

Charles University, Faculty of Education, Department of Mathematics

kaslovam@pedf.cuni.cz

lucidi (da un articolo)

1. Introduzione

Per un bambino l'entrata a scuola rappresenta un evento di grande importanza.

La letteratura pedagogica indica diversi fattori che possono a lungo influenzare il rapporto del bambino sia nei confronti della scuola, dei compagni, dell'apprendimento, sia delle singole materie, dei libri, ecc. Analogamente, anche le didattiche delle singole materie analizzano dettagliatamente alcuni scogli che bisogna superare.

Alcuni di questi problemi presentano aspetti globali e sono previsti anche dagli autori dei libri di testo o dei manuali che trattano i metodi di insegnamento.

Negli anni 1997-2000 é stata analizzata la capacità degli alunni di creare (inventare e formulare) a parole gli esercizi matematici. Uno dei compiti era quello di inventare a parole la trascrizione di

$$2 + 3 = 5.$$

A parte i diversi fenomeni che influiscono sulla qualità e sulla varietà dei compiti verbalizzati, in questo caso ha il suo peso anche il modo in cui l'insegnante legge la trascrizione stessa.

È possibile leggere detta trascrizione - non solo nella lingua ceca - in diversi modi:

- a) *Due piú tre fa cinque.*
- b) *Due piú tre é pari a cinque.*
- c) *Cinque é di tre maggiore di due.*
- d) *La somma dei numeri due e tre é pari a cinque.*
- e) *Se aumentiamo due di tre, abbiamo cinque.*
- f) *Se a due aggiungessimo tre, il risultato sarebbe cinque.*
- g) *Se a due aggiungiamo tre, abbiamo cinque.*
- h) *Nel caso in cui sommiamo due piú tre, la somma é cinque.*
- i) *Se uno degli addendi é pari a due ed il secondo é pari a tre, la somma é pari a cinque.*
- j) *Cinque puó essere scomposto in due addendi: due e tre.*
- k) *Cinque puó essere espresso quale la somma dei numeri due e tre.*

Ciascuna di queste formulazioni incita l'alunno ad **un certo tipo di compito matematico espresso a parole**. Gli insegnanti che hanno usato una sola interpretazione della trascrizione simbolica, così come i libri di testo di cui si sono serviti, hanno fortemente influenzato il modo in cui gli alunni hanno formulato i compiti.

Notiamo che l'interpretazione della trascrizione simbolica fatta mediante un periodo é **dinamica**, se vogliamo, presuppone un'azione; dal punto di vista dello stile tende ad usare la forma del **racconto**. I compiti matematici espressi a parole di questo genere sono piú emotivi, piú ricchi stilisticamente, piú sovente legati ad un contesto che il bambino non esita a conoscere.

La formulazione espressa mediante una proposizione ha piuttosto un aspetto **statico**, rappresenta uno stato, una certa realtà dalle caratteristiche durature, ha piuttosto l'aspetto di una **regola**. Stilisticamente é prossima alla forma della **descrizione** (simile all'interpretazione $a + b = c$).

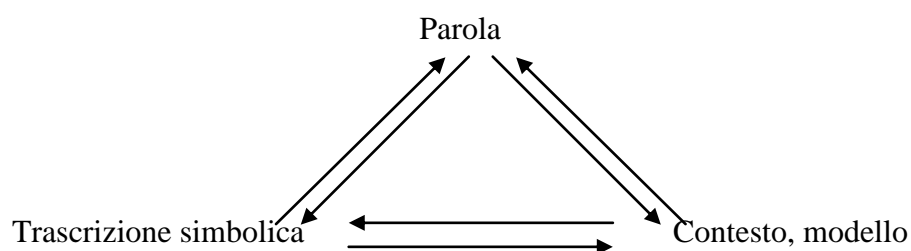
Possiamo certamente anche trovare quei casi limite in cui entrambi i tipi d'interpretazione della trascrizione vengono intesi quali istruzioni o conclusioni di una riflessione, e cioè tra **il dinamico e lo statico**.

Il modo di interpretare era influenzato dall'esempio dell'insegnante e, limitatamente, anche dalla tipologia del bambino. Abbiamo potuto osservare (sul video) che alcuni alunni leggono, ed addirittura interpretano, la trascrizione solamente seguendo l'esempio dell'insegnante.

2. Le trascrizioni simboliche in matematica

Riflettiamo un attimo sui modi in cui vengono interpretate le trascrizioni simboliche ed anche in che modo il bambino viene a conoscenza delle trascrizioni e come le crea.

In prima elementare ci dedichiamo con piú assiduitá alla **trascrizione del numero**.



Questo „triangolo“ ha sei vie orientate.

Si possono caratterizzare in questi modi:

definisci quanto

trascrivi

leggi

calcola

raffigura

descrivi dove

Non tutte queste vie vengono esercitate parimenti durante le ore di matematica. Ciò dipende sia dai curricula, sia dai libri di testo, sia dalla personalità e dal tipo di studi dell'insegnante. Nonostante ciò, in quasi tutti i libri di testo europei, tutte queste vie sono rappresentate in almeno un'esercitazione.

Nelle trascrizioni composte dai singoli simboli detto 'triangolo' viene già represso.

Il triangolo funziona nella numerazione ma non è utilizzato né nel campo delle relazioni né in quello delle operazioni.

Raramente succede che di una via venga presa in considerazione anche quella opposta. Dettiamo così la frase a) (*Due più tre fa cinque*) e l'alunno scrive $2 + 3 = 5$. La volta successiva dettiamo la frase b) (*Due più tre è pari a cinque*) e l'alunno scrive la medesima cosa.

Al momento della lettura della trascrizione simbolica non comprendiamo perché l'alunno esiti a leggere. In particolare per gli alunni ansiosi od accurati che hanno una buona memoria subentra il dilemma su quale delle interpretazioni sia quella corretta. Non è compito dei libri di testo, dall'inizio dell'iter scolastico, insegnare al bambino le regole secondo le quali vengono usati e letti i simboli matematici.

Secondo me il problema sta nell'insufficiente preparazione dell'insegnante della scuola elementare riguardo ai lati specifici della comunicazione in matematica e nel fatto che non è stato informato su questo tipo di difficoltà.

3. Tipologia

Guardiamo ora la via:

PAROLA

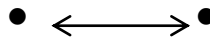
LOCUZIONE

PROPOSIZIONE

PERIODO

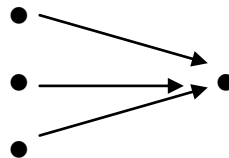
SIMBOLI MATEMATICI

1) Il primo tipo: i bambini piccoli, già a partire dall'età prescolare, esplorano, conoscendolo, il mondo. Essi collegano quanto hanno conosciuto con le parole sulla base della semplice rappresentazione, secondo il principio di bilateralità. Una parola (locuzione, proposizione, periodo) - una situazione, una cosa, un'immagine, un simbolo. Questa via è bilateralmente univoca.



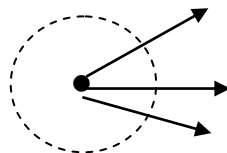
Per il bambino è quindi una via semplice, economica; rappresenta un buon appoggio per la memoria, è facile per le decisioni (non esiste un'altra scelta). Il bambino non deve valutare, comparare, riflettere sul contesto, sulle possibilità, non è costretto a decidere. La via può essere praticata, il binomio può essere rafforzato anche sulla base di riflessi condizionati. Per i suoi evidenti vantaggi c'è la tendenza a convertire i seguenti due tipi 2) e 3) in vari modi, correttamente o meno, in questo primo tipo.

2) Il secondo tipo di via si basa sulla rappresentazione non semplice, secondo il principio di unilateralità. La via dalla parola o dal simbolo è evidente, non così la via opposta. Questo è, tra l'altro, anche il caso della sinonimia.



3) Il terzo tipo risulta più difficile per gli alunni. Si basa sul principio della mera associazione. Ad una trascrizione (o ad una espressione verbale) corrispondono diverse interpretazioni (diverse trascrizioni).

La via opposta è però unica. Nell'educazione linguistica troviamo il parallelo nell'omonimia.



Di decisiva importanza risultano non solo il contesto, ma anche le esperienze dell'alunno. Sin dall'inizio l'alunno si deve rendere conto che è in presenza di diverse possibilità e che per questo deve riflettere, valutare e sceglierne una. I criteri per la scelta, di regola, non si trovano nei libri di testo e raramente emergono negli alunni di più di 15 anni di età. Questi casi risultano per alcuni

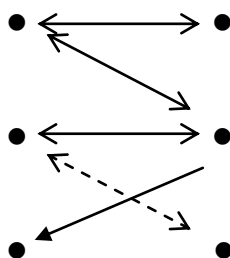
alunni impegnativi dal punto di vista del tempo; qualche volta, nel decidere, li può aiutare una domanda o un dibattito a due.

Appare evidente che **i casi 2 e 3 sono collegati** tra di loro, l'uno é l'inverso dell'altro. Perché allora parliamo di due tipi? Li distinguiamo poiché dipende dal modo in cui l'alunno ne **é venuto a conoscenza**.

Il secondo tipo vuol dire che l'alunno all'andata ha trovato una via univoca che, al ritorno, tutto d'un tratto ha smesso di esserlo. L'alunno non vi era preparato. É possibile, poi, che interpreti queste operazioni come dei 'colpi bassi'.

Il terzo tipo al contrario é difficile all'inizio, ma nel caso in cui il problema converta l'alunno, poi risulta relativamente facile.

4) Il quarto tipo risulta per gli alunni il piú difficile. É la combinazione dei tipi 2) e 3), ed è piú frequente nella scuola superiore.



4. Esempi e loro caratteristiche

All' inizio della prima classe di scuola elementare

- durante la lezione di lingua:

'uno' - come *aggettivo* (numerale cardinale),

'uno (un, una)' - come *articolo indeterminativo*;

- durante la lezione di matematica:

'1' - 'uno' nel senso di *numero* primo tipo

- durante la lezione di scrittura:

'1' - 'uno' nel senso di *cifra* primo tipo

In ogni lezione la trasformazione di '1' funziona sulla base del 'primo tipo', ma anche come secondo o terzo tipo.

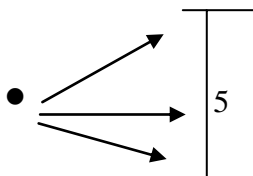
+ - 'piú' terzo tipo

- e (in lingua ceca)

- parentesi - () nel senso che:

indicano cose *importanti* in matematica \leftrightarrow indicano cose *non importanti* nella lingua

- 1.000.000 ‘milione‘
- ‘un milione‘
- 10^6 ‘dieci elevato alla sesta‘
- ‘sesta potenza del numero dieci‘
- quarto tipo



Se osserviamo **le relazioni in base alle differenti possibilità delle trasformazioni**, troviamo quattro caratteristiche.

1. **diversa** (l'esempio di 'una')
2. **uguale** (l'esempio di '+')
3. **contrasto** (l'esempio delle parentesi se parliamo di *interpretazione e contesto*)
4. **simile** (l'esempio di 'milione' se discutiamo su *forma e senso*)

5. In questa fase la conclusione non risulta possibile, propongo un dibattito.

La bibliografia non viene riportata perché è solo in ceco e polacco.

**Laboratorio ‘Funzioni’: riflessioni sui materiali proposti
nelle attività in compresenza 2001/02 in quattro quinte elementari**

Antonella Giacomini

Istituto Magistrale ‘G. Renier’, Belluno

antongiaco@tin.it

docenti: Clea Ferro, Serena Rui, Dirce Slongo, Tiziana Zaetta

lucidi

Una **funzione** f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (**dominio**) fa corrispondere un elemento y di un certo insieme C (**codominio**).

Si dice che y è l'**immagine** di x tramite f e simbolicamente si scrive $y = f(x)$.

In questo contesto, x ed y hanno il ruolo di “pronomi”, in quanto stanno a denotare generici elementi di D e di C . La lettera f rappresenta invece il “nome proprio” della funzione che si intende considerare.

Si noti che, in base alla definizione data, ad *ogni* elemento del dominio resta sempre associato tramite f un ben determinato elemento del codominio. Non è invece escluso che a due o più elementi *distinti* del dominio possa essere associato *uno stesso* elemento del codominio. Le funzioni per le quali sussiste l'ulteriore proprietà che ad elementi distinti del dominio restano sempre associati elementi distinti del codominio si dicono **funzioni iniettive**.

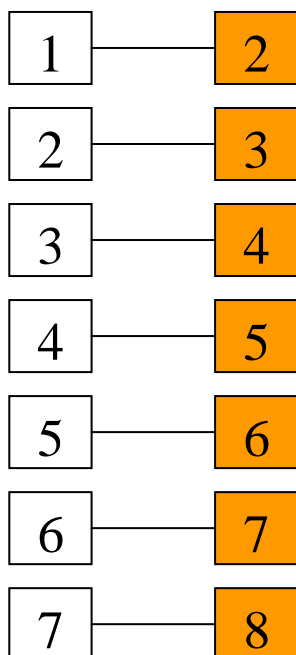
Non è detto neppure che *ogni* elemento del codominio provenga tramite f da qualche elemento del dominio. Le funzioni per le quali sussiste l'ulteriore proprietà che ogni elemento del codominio è l'immagine di almeno un elemento del dominio si dicono **funzioni surgettive o suriettive**.

Le funzioni che sono contemporaneamente iniettive e surgettive si dicono **funzioni bigettive o biiettive**.

Da Vinicio Villani

IL PERCORSO IN CLASSE

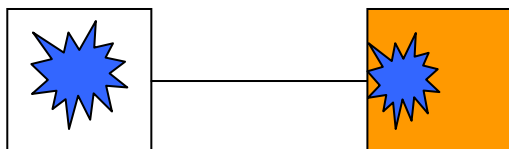
Il primo robot



“Che cosa fa questo robot?”. I bambini rispondono:

- Il robot dice il numero che viene dopo quello che ho pescato
- Sceglie il numero successivo
- Il robot fa +1

Toh, sono cadute delle macchie...



“Che cosa scriverà il robot sul cartellino arancione?”. I bambini rispondono:

- “Nel secondo cartellino otteniamo due macchie!”
- “No, secondo me sarà macchia + macchia”
- “Ma no, c’è una macchia sola”
- “Non possono essere due macchie, perché se sotto una macchia c’è 5, allora nell’altro cartellino per il robot dovrebbe esserci 6, ma $5+5$ non fa 6”
- “Forse il robot fa -1 ”
- “Nel cartellino bianco c’è una macchia, quindi nel cartellino arancione c’è una macchia più grande”
- “Può darsi, ma non due macchie, comunque, perché con due macchie si fa il doppio, non si fa +1”
- “Facciamo nel cartellino arancione: macchia +1”

Proposta accettata: ecco come completiamo il cartellino:

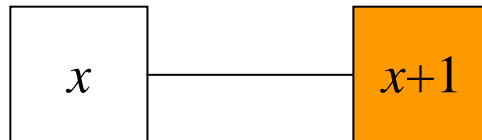


Descriviamo ora quello che fa questo robot:
 IO FACCIO DA BIANCO AD ARANCIONE
 RISPONDO IL NUMERO DOPO
 CERCO IL NUMERO SUCCESSIVO.

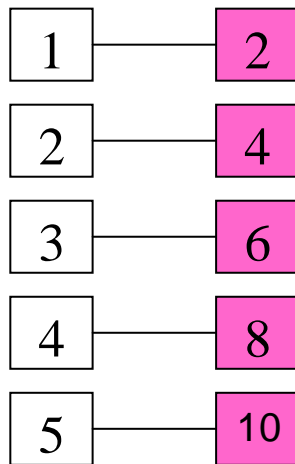
“Se io dico un numero, ma c’è un “Bip” che copre la mia voce, cosa mi risponderà il robot?” Le risposte:

- ”Cip” (legato al fatto che c segue b nell’ordine alfabetico, è dunque il successivo)
- “Bip bip”
- “biip”
- “bip + 1”
- “usiamo mister x ”
- “sì, ma come scriviamo?”
- gli studenti delle superiori: “usate anche mister y !”
- “sì, idea geniale! Allora possiamo scrivere $y = x + 1$ ”

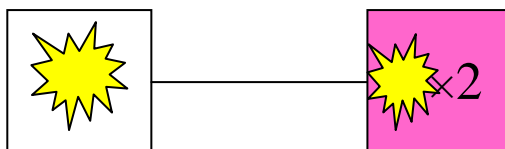
L’ultimo cartellino viene così compilato:



Il secondo robot



I bambini completano il cartellino con la macchia:



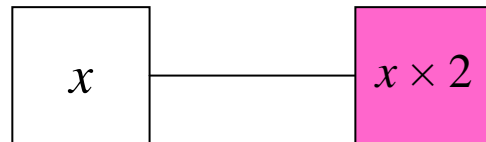
E sui cartellini da riempire, cosa possiamo scrivere?

I bambini:

- Possiamo scrivere $2x$
- Sì, ma anche $x+x$
- E anche $x \times 2$

- E allora anche $2 \times x$
- Sì, perché la moltiplicazione ha la proprietà commutativa
- Possiamo scrivere anche xx senza niente in mezzo
- Questo no, questo non lo possono capire

Infine, scrivono così:



E alla lavagna scrivono:

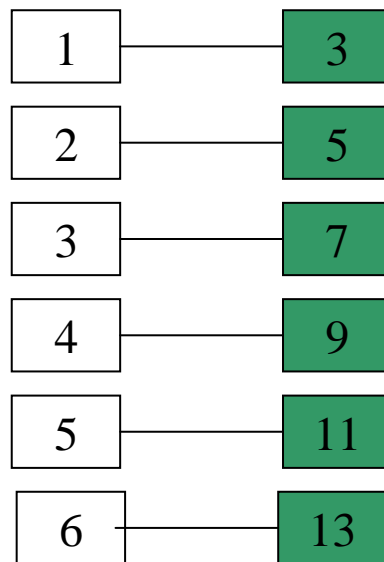
$$x \times 2 = y$$

$$y = x + x$$

$$x + x = y$$

$$y : 2 = x$$

Il terzo robot



Sulla scatola si decide di scrivere:

$$y = x \times 2 + 1$$

Le osservazioni dei bambini:

- Questo robot fa il lavoro dei due robot precedenti messi assieme: prima fa il doppio, poi aggiunge 1

- Se facesse il contrario, cioè se prima aggiungesse 1 per poi fare il doppio, otterrebbe un risultato diverso, più grande di 1 unità
- Quest'ultimo robot ci risponde sempre numeri dispari
- Il robot rosa ci risponde sempre numeri pari

Una discussione in classe

Peschiamo ora una coppia di cartellini per volta, la prima coppia è:

1 ----- 1

I bambini cominciano a fare ipotesi:

- “Forse il robot fa +0”
- “Forse fa per 1”
- “Forse fa diviso 1”
- “Forse ripete lo stesso numero”
- “Prendiamo un'altra coppia di cartellini, così possiamo controllare!”
10 ----- 28
- “Forse è +18”
- “No, non va bene perché non funziona con la coppia 1---1”

La necessità di trovare la regola che funzioni per tutte le coppie costringe i bambini ad un continuo lavoro di verifica dei risultati.

Peschiamo un'altra coppia:

2 ----- 4

“Potrebbe fare $\times 2$, ma non va bene con le coppie di prima, allora non può essere”

“Forse fa 2 operazioni in fila!”

“Ho capito: prende il numero del cartellino bianco, lo fa $\times 2$, toglie 2, aggiunge ancora il numero del cartellino”

Proviamo a tradurre in un linguaggio diverso costruendo un grafo:

$$* \xrightarrow{\times 2} \xrightarrow{-2} \xrightarrow{+*} = \textit{soluzione}$$

I bambini provano, e scoprono che questa procedura è corretta, decidono di pescare altre coppie per fare dei controlli.

Pescano:

4 ----- 10

13 ----- 37

5 ----- 13

7 ----- 19

La formula funziona.

Scriviamo la formula in linguaggio formale:

$$y = x \times 2 - 2 + x$$

Altri bambini fanno delle altre proposte. Sono:

$$y = x - 2 + x \times 2$$

$$y = x \times 2 + x - 2$$

$$y = x \times 3 - 2$$

Dalla discussione emerge che le prime tre formule sono equivalenti, perché è stata applicata la proprietà commutativa dell'addizione. Ma la quarta? I bambini sostengono che la quarta formula è un riassunto delle formule precedenti, che conviene usare quella perché è più corta. Ad un certo punto un bambino si accorge che fare $x \times 2$ e poi aggiungere x è come fare $x \times 3$. I compagni

accettano prima perplessi, poi convinti, la spiegazione del compagno. Abbiamo scoperto che $x \times 2 + x = x \times 3$

Presi dall'entusiasmo, i bambini scrivono anche:

$$x + x \times 2 = x \times 3$$

$$x + x + x = x \times 3$$

Il quarto robot

$$4 \text{ ----- } 16$$

“Forse il robot aggiunge 4 e poi raddoppia”

$$2 \text{ ----- } 18$$

“No, la nostra idea non funziona”

$$14 \text{ ----- } 6$$

“E' strano, perché c'è prima il numero grande e poi il numero piccolo, a volte invece è il contrario, prima il piccolo e poi il grande”

“Peschiamo ancora”

$$13 \text{ ----- } 7$$

$$7 \text{ ----- } 13$$

$$8 \text{ ----- } 12$$

$$12 \text{ ----- } 8$$

$$1 \text{ ----- } 19$$

$$9 \text{ ----- } 11$$

$$10 \text{ ----- } 10$$

Si fanno molte considerazioni:

- Se il primo numero è pari anche il secondo è pari, e viceversa
- Se il primo numero è dispari anche il secondo numero è dispari, e viceversa
- La differenza fra i due numeri è sempre pari
- Se c'è una coppia c'è anche la sua simmetrica
- Io vedo che se faccio 20 meno il primo numero che sta sul cartellino bianco trovo il secondo numero che sta sul cartellino giallo
- E' vero!

A questo punto proviamo ad indovinare cosa c'è sui cartellini gialli corrispondenti ai vari numeri. I bambini capiscono la regola. Proviamo a formalizzarla:

$$20 - x = y$$

O anche

$$x + y = 20$$

Un altro gioco: partiamo dal nome del robot e scriviamo i numeri sui cartellini.

Il robot che vogliamo studiare è:

$$y = 5 \times x - 3$$

I bambini non incontrano difficoltà a compilare i cartellini, nel compilarli fanno delle osservazioni estremamente interessanti. Ecco:

- Si concentrano sulle coppie (5, 22) e (50, 247).
“Se a 5 corrisponde 22, a 50 sarebbe dovuto corrispondere 220!”
Controllano più volte i calcoli, sono corretti. Allora perché il ragionamento non va come vorrebbero? E' un bambino che infine, interviene:
” se moltiplico per 10 il numero del cartellino bianco, e voglio che anche quello arancione venga moltiplicato per 10, allora al quintuplo del numero di partenza occorre che tolga non

3, ma 10 volte 3, cioè 30. Infatti in tal caso troverei 220. Ma non è così, si toglie sempre 3, perciò il ragionamento di partenza non viene rispettato”

- se il cartellino bianco contiene un numero pari, quello arancione ne contiene uno dispari, e viceversa. Perché? I bambini costruiscono collettivamente questo ragionamento:

”Prendo un numero, quando lo moltiplico per 5 resta dello stesso genere: se era pari resta pari, se era dispari resta dispari. Però poi tolgo 3. Questa sottrazione cambia il genere. Questo significa che se parto da un numero pari, moltiplicando per 5 resta pari e poi togliendo 3 diventa dispari. Se parto da un dispari, per lo stesso ragionamento alla fine ottengo un numero pari”

Scriviamo due grafi:

$$\begin{array}{l} D \xrightarrow{\times 5} D \xrightarrow{-3} P \\ P \xrightarrow{\times 5} P \xrightarrow{-3} D \end{array}$$

Dato che nello scrivere i cartellini era stato fatto un errore di trascrizione, ci eravamo trovati ad avere in mano un cartellino arancione con valore 3. Chiedo ai bambini se possiamo utilizzare il cartellino, scoprendo a quale valore del cartellino bianco corrisponda. La mia intenzione era di portarli a scoprire che le cifre delle unità dei valori della y possono essere solo 2 e 7. La mia richiesta porta invece su una strada diversa: i bambini cominciano ad invertire la funzione.

”Parto da 3, aggiungo 3 e viene 6. Ora divido per 5 e non trovo nessun numero: non si può fare”

”E’ più di 1, perché con 1 viene 2, che è più piccolo di 3, ma se prendo il 2 trasformato mi viene 7, che è troppo. Allora sarà 1,5”

”No, perché ho fatto i conti, e ad 1,5 corrisponde 4,5, che non va bene”

”Viene 1,2 perché ho preso 3, ho aggiunto 3 ed ottengo 6, divido per 5 e viene 1,2.”

I compagni concordano. Decidiamo comunque di considerare solo i numeri naturali.

Provo ora a fare la stessa domanda di prima:

”Se nel cartellino arancione c’è 13, sapete dirmi cosa c’è scritto nel corrispondente cartellino bianco?”

”Non si può fare”

”Sì che si può fare, basta fare alla rovescia”

”No, perché se io nel bianco scrivo 3 è troppo poco, perché trovo 12, ma se scrivo 4 è troppo, perché trovo 17”

”Non trovo mai numeri arancione con 3 nel posto delle unità”

”Neanche col 4, col 6, col 5, con lo 0, con l’1, con l’8, col 9”

”E’ vero, ci sono solo 2 oppure 7”

Chiedo perché. A questo punto c’è un’altra sorpresa: i bambini arrivano alla soluzione lavorando con la funzione inversa, così:

”Se io nell’arancione ho 2 o 7 come cifra delle unità, quando aggiungo 3 trovo 5 o 0 nel posto delle unità, e quindi posso dividere per 5 e il numero bianco è un numero naturale.”

In pratica, i bambini scelgono se ragionare sulla funzione diretta o su quella inversa a seconda della convenienza, probabilmente la prima operazione da fare nel caso della funzione inversa è un’addizione, che è l’operazione più semplice da gestire.

INVERTIRE FUNZIONI

Ora, invece che partire dal cartellino bianco verso quello colorato, facciamo il contrario: partiamo dal cartellino colorato per andare verso quello bianco.

La prima funzione è $y = x + 1$.

La risposta è molto veloce: l’antirobot deve fare $x = y - 1$.

La seconda funzione è $y = 2x$

Per tornare indietro dobbiamo fare $x = y : 2$.

Ma attenzione:

- Dobbiamo partire da un numero pari!

La terza funzione è $y = x \times 2 + 1$

- da questa funzione possiamo ottenere solo numeri dispari, perché qualsiasi numero viene prima moltiplicato per 2, e quindi diventa pari, e poi aumentato di 1. Si arriva comunque ad un numero dispari.
- Allora quando torno indietro devo partire per forza da un numero dispari!
- L'antirobot è $(y-1) : 2 = x$
- No, è $y : 2 - 1 = x$

I bambini a questo punto non fanno una scelta attivando delle verifiche, ma discutono sulla struttura pari/dispari dei numeri.

- Se io uso il secondo robot, per poter fare :2 il numero di partenza devo prendere un numero pari. Invece abbiamo visto che io devo partire da un numero dispari. Infatti se scelgo il primo robot, al numero dispari devo prima togliere 1, e mi resta pari, poi posso fare :2. Allora l'antirobot giusto è il primo.

Ora l'ultima funzione

$$x + y = 20$$

Le osservazioni:

- i due numeri x ed y sono entrambi pari o entrambi dispari.
- Si deve fare $20 - y = x$

I bambini fanno un po' di prove, e vedono che la proposta di Martina funziona. Desta grande meraviglia l'osservazione che il robot che fa ed il robot che disfa in realtà fanno la stessa cosa, cioè sono lo stesso robot.

Una bambina fa notare che questa identità fra la funzione diretta e quella inversa dipende in realtà dalla commutatività dell'addizione: infatti $x + y = 20$ può anche diventare $y + x = 20$.

Seguono delle tessere in allegato

1

1

2

2

3

3

4

4

5

5

6

6

7

7

8

8

9

9

10

10

11

11

12

12

13

13

14

14

15

15

16

16

17

18

1

3

2

5

3

7

4

9

5

11

6

13

7

15

8

17

9

19

10

21

11

23

12

25

13

27

14

29

15

31

16

33

17

18

**Laboratorio ‘Giochi’: riflessioni sui materiali da proporre
nelle attività in presenza in classi di scuola materna e primo ciclo**

Giancarlo Navarra

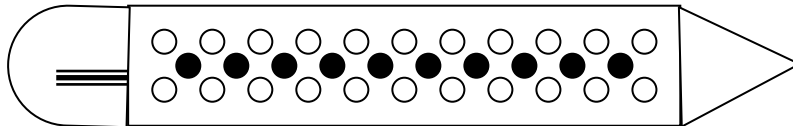
GREM, Università di Modena e Reggio Emilia
ginavar@tin.it

Diapositive Powerpoint (file allegato)

**Presentazione di materiali relativi alla nuova Unità
'La Regolarità: cinture, scarabocchi, sassolini**

Antonella Giacomini
Istituto Magistrale 'G. Renier', Belluno
antongiaco@tin.it

lucidi

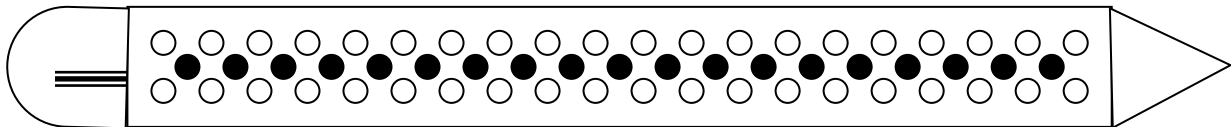


Questa è la cintura di Arabella. Ti piace questo disegno a pallini?

- Prova a descriverlo ad un tuo amico usando solamente le parole.
- Quanti pallini neri ci sono?
- Quanti pallini bianchi?

Questa è la cintura di Gioacchino.

Ha lo stesso disegno di quella di Arabella, infatti è disegnata dallo stesso stilista, ma è un bel po' più lunga, perché Gioacchino è più grasso.



- Quanti sono i pallini bianchi?
- E quanti quelli neri?

Anche Carolina ha una cintura dello stesso tipo: proprio ieri gliel'ho sentito dire: "La mia cintura è come quella di Arabella e di Gioacchino, ma ha 13 pallini neri".

- Secondo te Carolina è più magra di Arabella?
- E di Gioacchino?
- Perché?
- Pensi di poter indovinare quanti pallini bianchi ha la cintura di Carolina?

Mentre i tre amici sono lì che confabulano contando e ricontando pallini bianchi e neri, facendo ipotesi e cercando soluzioni, ecco che arrivano Marilena ed Asdrubale, che dicono:

"Guarda un po' che combinazione, ci siamo comprati due cinture proprio come le vostre!"

Marilena: "Già, la mia è rimasta a casa, ma mi ricordo di aver contato 30 pallini bianchi"

Asdrubale: "Anche la mia è rimasta a casa, però mi ricordo: aveva 37 pallini bianchi!"

A questo punto Arabella dice: "Non è possibile!"

- Cosa ne pensi tu?

Ora riassumiamo la situazione:

	Pallini neri	Pallini bianchi
Arabella		
Gioacchino		
Carolina		
Marilena		
Asdrubale		

Secondo te c'è una regola che mette in relazione il numero dei pallini neri di ogni cintura ed il numero dei pallini bianchi?

La relazione fra i pallini bianchi e neri deve essere espressa sia in lingua naturale sia in linguaggio formale.

Detto b il numero dei pallini bianchi e n il numero dei pallini neri, si può scrivere:

$$b = 2n + 2 \quad \text{oppure} \quad b = 2(n + 1)$$

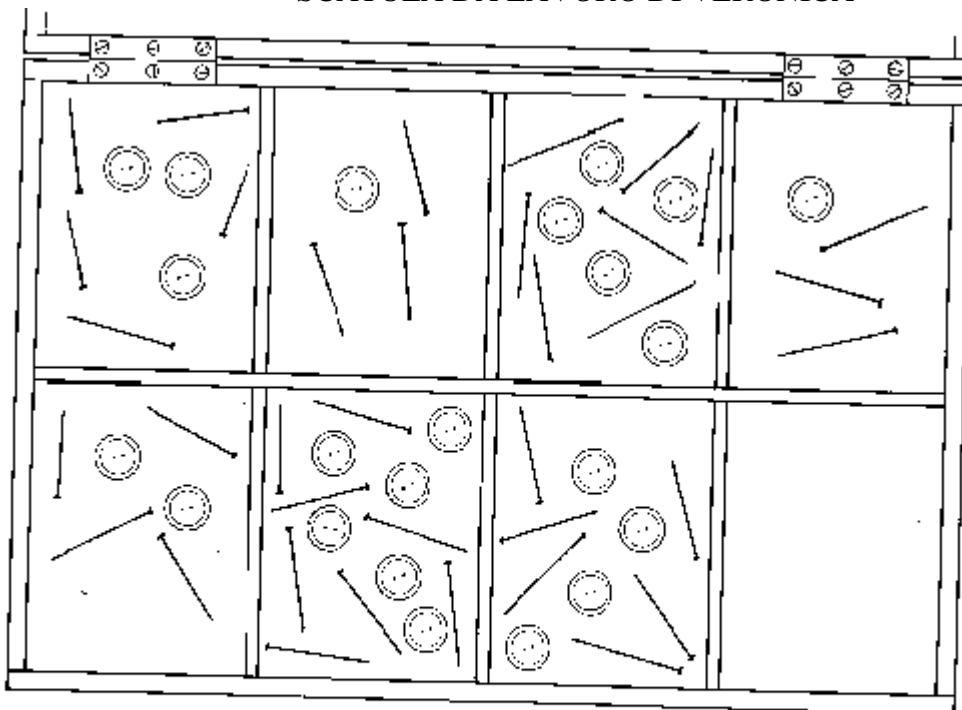
Può diventare un'occasione per parlare della proprietà distributiva (v. lucidi di Navarra).

Ma si può anche scrivere:

$$n = (b - 2):2 \quad \text{oppure} \quad n = b:2 - 1$$

Si tratta di una funzione che, in questo contesto, ha per dominio l'insieme dei numeri pari.

SCATOLA DA LAVORO DI VERONICA



Veronica ha il pallino di contare sempre e comunque gli oggetti. Il modo in cui sta disponendo spilli e bottoni nella scatola da lavoro obbedisce sempre ad una stessa regola.

- Sapresti trovarla?
- Descrivila a parole.
- Ora prova a scrivere la regola completando le frasi:

In ogni scomparto numero dei bottoni = numero degli spilli + _____

In ogni scomparto numero degli spilli = numero dei bottoni - _____

In ogni scomparto numero dei bottoni - numero degli spilli = _____

Nell'ultimo scomparto, quello ancora vuoto, Veronica ha disposto 11 bottoni.

- Quanti spilli ci dovrà mettere?

Ora Veronica vuole scrivere la regola in lingua matematica.

- La aiuti tu? Completa quello che ha scritto. Lei ha usato la lettera s per rappresentare il numero degli spilli, la b per il numero dei bottoni.

$$b = s + \underline{\quad} \quad s = \underline{\quad} \quad b - s = \underline{\quad}$$

Prova ora a disegnare alcuni scomparti della scatola di Rosetta, che segue lo stesso metodo di Veronica, utilizzando la regola $b+s=12$.

LE DECORAZIONI

```

      X
     X O X
      X
  
```

```

      X X
     X O O X
      X X
  
```

```

      X X X
     X O O O X
      X X X
  
```

```

      X X X X
     X O O O O X
      X X X X
  
```

Queste decorazioni sono fatte usando una stessa regola.

- Sai disegnare la decorazione che contenga cinque cerchi?
- Quante crocette devi disegnare ?
- E se i cerchi sono 10?

Girolamo ha disegnato una di queste decorazioni, utilizzando 36 crocette.

- Secondo te quanti cerchi ha usato?
- Come hai trovato la risposta?

Mariuccia pensa che ci debba essere una regola per sapere subito quante sono le crocette delle decorazioni sapendo il numero dei cerchi. Ci ha pensato molto, ha trovato quattro regole, ma non sa quale sia quella giusta. Puoi aiutarla tu?

- Scegli la regola giusta per conoscere il numero delle crocette:

Regola a – Conta il numero dei cerchi e moltiplica per 2

Regola b – Conta il numero dei cerchi, moltiplica per 2 e aggiungi 1

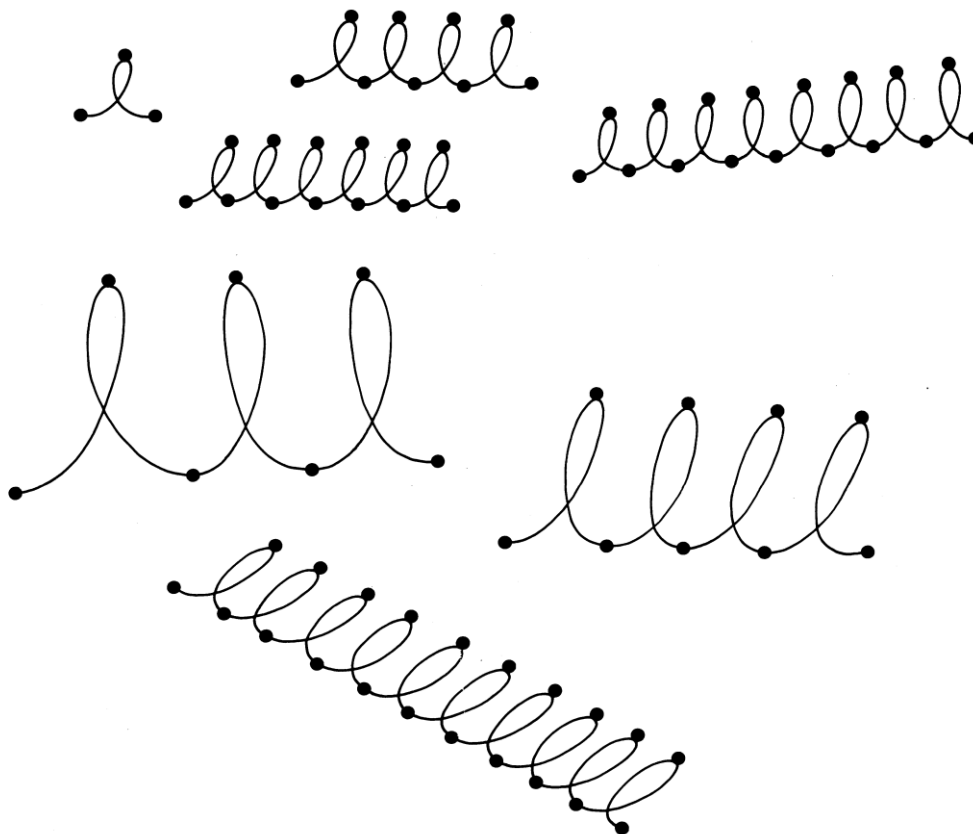
Regola c – Conta il numero dei cerchi, moltiplica per 2 e aggiungi 2

Regola d – Conta il numero dei cerchi, moltiplica per 2 e toglie 2

Regola e – Conta il numero dei cerchi, aggiungi 1 e moltiplica per 2

GLI SCARABOCCHI

Durante la lezione di stamattina Gualtiero si annoiava, ed ha cominciato a disegnare degli scarabocchi, così:



Poi si è messo a contare i puntini e le onde che aveva disegnato, ed ha cominciato a farsi delle domande.

- Prova a disegnare uno scarabocchio con 11 onde. Quanti puntini ci sono?
- E se le onde sono 125?
- Come fai a calcolare il numero dei puntini sapendo il numero delle onde?
- Gualtiero ha scoperto che a 48 onde corrispondono 97 puntini. Secondo te è giusto?

**Presentazione di materiali relativi alla nuova Unità
'La proprietà distributiva'**

Giancarlo Navarra
Istituto Comprensivo 'G.Rodari', S.Giustina (BL)
GREM, Università di Modena e Reggio Emilia
ginavar@tin.it

lucidi

a) la proprietà distributiva in algebra

$$\frac{a^2c - abc}{ac - bc} = a \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad \frac{ac(a-b)}{c(a-b)} = a \quad a = a$$

'estrazione a fattor comune'

(Kieran, USA)

in algebra: difficoltà nel riconoscere la 'struttura' (v. *Glossario ArAl*)

es: $3(x + 2)$

(i) struttura 'di superficie':

riconoscere che il valore di x è aggiunto al valore di 2 e la somma è moltiplicata per 3

(ii) struttura 'di sistema':

riconoscere le forme equivalenti di un'espressione in accordo con le proprietà delle operazioni:

$3(x + 2)$ può essere espressa come $(x + 2) \times 3$ o come $3x + 6$

a) in aritmetica

calcolare a mente 8×23

il calcolo mentale comporta
il controllo di un insieme di regole
per *rompere* o per *trasformare* il calcolo di partenza
in operazioni per le quali è più semplice trovare il risultato



cambiare il compito di partenza

- 1) Rappresentare il numero in una forma più conveniente
- 2) Trasformare il calcolo dato in una serie di calcoli più semplici
- 3) Eseguire i calcoli (automatismo)

- 1) $23 = 20 + 3$
- 2) $8 \times 23 = 8 \times 20 + 8 \times 3$
- 3) $160 + 24 = 184$

in algebra solo la fase della **trasformazione**
(si appoggia sul controllo consapevole della proprietà in ambito aritmetico)



→ nodo: come promuovere la consapevolezza
 (molti alunni usano intuitivamente la proprietà – ‘teoremi in atto’, Vergnaud)

(Università del Sudafrica, Cape Town e Stellenbosh)

Livello 1: utilizzo spontaneo della proprietà distributiva

Livello 2: riconoscimento della proprietà distributiva

Lo studente sa rispondere ad una domanda come:

“ 37×52 e “ $37 \times 30 + 37 \times 22$ danno lo stesso risultato?”

Livello 3: Utilizzo intenzionale della proprietà

Lo studente cerca autonomamente di capire

se l’utilizzo della proprietà produce un’espressione equivalente

che può essere risolta in modo più semplice rispetto all’espressione originale:

es: *rimpiazzare l’espressione data*

$$27 \times 13 + 27 \times 7$$

con la più semplice

$$27 \times 20$$

Livello 4: Generalizzazione della proprietà

La proprietà vale nell’insieme dei reali (grandi numeri, frazioni, decimali) e con le lettere.

Livello 5: Spiegazione della proprietà

Come nel livello 2) e in più sa giustificare la risposta alla domanda:

“Perché danno lo stesso risultato?”

es: “Perché 52 è stato ‘spezzato’ in $30 + 22$ ”

(in effetti non ci sono spiegazioni

perché la proprietà distributiva è un assioma nell’insieme dei numeri reali)

Proporre situazioni significative

Scenario A) Situazioni problematiche

Scenario B) Strategie per il calcolo mentale (senza calcolatrice!)

B1) $27 \times 13 + 27 \times 7$

B2) 8×99

B3) verificare l’equivalenza fra espressioni (rappresentazioni) diverse

Intreccio fra gli scenari A e B (e altre possibili C, e D, ...)

Scenario A): Situazioni problematiche

P1: I giornalini

Lunedì Laura compera 6 ovetti Kinder che costano 0,60€ l'uno.
Giovedì ne compera altri 5 uguali ai precedenti per suo fratello.
(a') Rappresenta il modo *per trovare quanto spende* Maria.
(a'') Rappresenta *quanto spende* Maria

Gli alunni risolvono il problema individualmente. Ci saranno probabilmente più soluzioni (corrette):

- 1) $0,6 \times 6 = 3,6$ $0,6 \times 5 = 3,0$ $3,6 + 3,0 = 6,6$
2) $0,6 \times 6 + 0,6 \times 5$
3) $0,6 \times (6 + 5)$ oppure $(6 + 5) \times 0,6$

P2: Gli acquisti di Filippo

Filippo ha comperato per la scuola 7 quaderni e 3 penne.
Sia i quaderni che le penne costano 1,5€ l'uno.
(a) Rappresenta il modo per trovare quanto spende Filippo.
(b) Rappresenta quanto spende Filippo

Gli alunni risolvono il problema individualmente. Ci saranno probabilmente più soluzioni (corrette):

- 1) $1,5 \times 7 = 10,5$ $1,5 \times 3 = 4,5$ $10,5 + 4,5$
2) $1,5 \times 7 + 1,5 \times 3$
3) $1,5 \times (7 + 3)$ oppure $(7 + 3) \times 1,5$

Questioni

- Quanto interferisce con la proprietà distributiva l'abitudine ad una soluzione tipo 1) ad operazioni separate?
Tipo 2) con sole operazioni in colonna?
- L'abitudine di lavorare con le espressioni favorisce il rapporto dell'alunno con la proprietà distributiva?

Due operazioni, pensiero relazionale
⇕
operazioni staccate, pensiero procedurale

- Quanto interferisce che in P1 gli oggetti siano uguali (ovetti) e in P2 no (quaderni e penne)?
- La soluzione 3) è più evoluta perché presuppone una lettura metacognitiva del problema? (l'alunno non 'vede' solo i dati del problema, ma opera su di essi)
- Ipotesi conseguente: la soluzione 2) è più frequente della 3)?