

Esperienze laboratoriali nelle classi e nella formazione degli insegnanti per un approccio linguistico all'algebra

Nicolina A. Malara

Dipartimento di Matematica – Università di Modena & Reggio E.

Sommario. *Si traccia un quadro degli studi sull'insegnamento/apprendimento dell'algebra e sul ruolo dell'insegnante nell'insegnamento socio-costruttivo. Si richiamano i nostri studi rivolti ad un approccio di tipo linguistico all'algebra e si descrivono strumenti e metodi messi a punto per attività laboratoriali con/per insegnanti finalizzate a promuovere in loro le capacità di gestione delle relative attività nelle classi. Si evidenziano difficoltà emerse negli insegnanti e si conclude con alcune riflessioni circa le consapevolezze da loro maturate.*

1. Il problema dell'insegnamento/apprendimento dell'algebra

A. Siety (2003), nel suo libro “*Matematica, mio terrore*” - in cui tratta dei disagi psicologici generati dall'usuale insegnamento della matematica e del recupero motivazionale degli studenti verso di essa punta il dito su un problema centrale dell'insegnamento/apprendimento dell'algebra: *la mancanza di controllo dei significati di concetti e procedure da parte degli studenti*. Classici studi sulle difficoltà in algebra denunciano come gli studenti non abbiano consapevolezza di proprietà ed algoritmi in aritmetica, del modo in cui essi nascono, manchino delle strutture aritmetiche dalle quali generalizzare e pertanto non possiedano una base concettuale sulla quale costruire le loro conoscenze algebriche. Altri studi documentano che anche allievi abili nel trasformare sintatticamente espressioni non sono in grado di tradurre relazioni in linguaggio algebrico e sviluppare ragionamenti in termini formali.

Tali difficoltà dipendono dal fatto che l'algebra non viene introdotta come linguaggio idoneo allo studio del reale e potente strumento di ragionamento e di previsione grazie alla messa in formula di informazioni (o di ipotesi) su fenomeni ed alle conoscenze su di essi derivate dalle trasformazioni consentite dal formalismo algebrico.

Da molto tempo gli studiosi sottolineano l'importanza e la necessità di riconvertire l'insegnamento tradizionale dell'algebra. Pionieristici al riguardo sono gli studi di A. Bell (1985), il quale sviluppa e sperimenta un ampio progetto di innovazione didattica, in ambienti sia realistici che matematici, centrato su quello che egli chiama *il ciclo algebrico essenziale* costituito da tre tipologie di attività algebriche: *rappresentare, manipolare, interpretare*, attività che considera fondamentali per dare agli allievi *il senso* della disciplina oltre che appropriate competenze algebriche.

Arcavi (1994) sottolinea la necessità che nella scuola si sposti l'attenzione dalla manipolazione simbolica alla attuazione di una didattica dell'algebra finalizzata allo sviluppo del *Symbol Sense* per favorire negli studenti - attraverso attività mirate - un apprendimento caratterizzato da un uso dei simboli per pensare, generalizzare e sviluppare strategie risolutive, che li porti a: acquisire familiarità con i simboli riconoscendone potenzialità e limiti; manipolare i simboli ponendosi su un piano interpretativo; trasformare espressioni non in modo automatico ma in relazione all'obiettivo da raggiungere; vedere nuovi significati in forme equivalenti di una data espressione;

scegliere con ocularità le variabili attraverso le quali rappresentare le relazioni di un problema; svolgere trasformazioni sintattiche con flessibilità, intelligenza e visione di insieme, evitando circolarità; mantenere attenzione ai significati dei simboli nel corso di una trasformazione sintattica; a seconda del contesto e in relazione ai simboli in gioco, saper selezionare tra i loro possibili significati quelli più funzionali allo sviluppo dell'attività.

MacGregor & Stacey (1994), MacGregor & Price (1999) sottolineano l'importanza dell'acquisizione degli allievi di una *consapevolezza metalinguistica*, intendendo con ciò la capacità di controllare significati, forma e funzioni delle espressioni linguistiche. "Senso del simbolo" e "consapevolezza metalinguistica" stanno alla base dello sviluppo de *il pensiero anticipatorio* (Arzarello & Altri 1994, 2001, Boero 2001) ossia la capacità di ipotizzare scritte formali a cui pervenire per poter affermare certi risultati; di prevedere, senza svolgere trasformazioni sintattiche, possibili nuove forme di una certa espressione vagliandone i significati in relazione ad uno scopo; di attivare cambiamenti di frame concettuale ed interpretazioni plurime. Arzarello & Altri (1994) propongono una visione *dell'algebra come strumento di pensiero* che evolve nel tempo verso forme linguistiche sempre più complesse e sofisticate, centrata sul controllo del potere espressivo delle scritte formali per la molteplicità di sensi che sono incorporati in esse e che possono ottenersi attraverso manipolazioni sintattiche.

Al congresso ICME 8 di Siviglia (1996) C. Kieran caratterizza l'algebra da insegnare nella scuola in tre tipologie di attività, da lei viste a livello crescente di complessità. Pone al primo livello le *attività generazionali*, che riguardano la rappresentazione e l'interpretazione di situazioni, proprietà, modelli e relazioni e che consentono di costruire gli oggetti dell'algebra ancorandone i significati all'esperienza; al secondo livello *le attività trasformazionali*, attività classiche quali la semplificazione di espressioni, il lavoro con espressioni equivalenti, la risoluzione di equazioni, lo studio dei polinomi e la loro fattorizzazione, ecc; al terzo livello *le attività globali di livello meta*, non esclusivamente algebriche dove l'algebra è utilizzata come uno strumento, quali ad esempio il problem solving, la generalizzazione, la dimostrazione.

Riguardo alle *attività generazionali* un importante contributo viene dato ad ICME 7 (Laval, Quebec 1992) nell'Algebra Working Group (Linchevski, 1995). In quella sede si concorda sul fatto che nell'aritmetica della scuola elementare vi sia un'ampia gamma di opportunità per lo sviluppo del pensiero algebrico e viene concepito un nuovo spazio di insegnamento, la *pre-algebra*, per lo sviluppo di concetti aritmetici evoluti, di tipo strutturale, basilari per l'innesto dei concetti algebrici più astratti e formali.

Dalla seconda metà degli anni novanta, a livello internazionale, vi è un fiorire di studi di tipo generazionale per allievi di 11-13 anni. Alcuni di tali studi si distinguono per la formulazione di modelli di sviluppo concettuale in algebra di tipo linguistico e socio-costruttivo, in altri è promosso l'uso di mezzi fisici come strumenti di mediazione semeiotica. L'affermarsi di queste concezioni porta alla nascita di specifici progetti di innovazione per la scuola primaria. In parecchi di tali studi si affronta anche il problema della formazione degli insegnanti in riferimento alle insegnamento socio-costruttivo, problema su cui ci soffermiamo (per approfondimenti e riferimenti bibliografici rinviamo a Cusi & Malara 2008).

2. Insegnamento socio-costruttivo e ruolo dello insegnante

Il modello di insegnamento socio-costruttivo si basa su una visione degli allievi come artefici della propria conoscenza, si sviluppa per 'situazioni problematiche' che vengono devolute dall'insegnante agli allievi e si articola attraverso le discussioni di classe centrate sulle argomentazioni degli allievi per la conquista di nuove conoscenze, il loro assetto e la riflessione su di esse.

Nel modello socio-costruttivo il compito dell'insegnante diviene più variegato e complesso, in classe egli deve assumere consapevolmente un'ampia gamma di ruoli (ascoltatore, provocatore, maieuta, orchestratore di discussioni, mediatore, modello, attivatore di atti ed atteggiamenti metacognitivi, ...), deve attuare una didattica che consenta l'affermarsi di una autentica attività matematica socialmente condivisa, dando grande spazio agli aspetti metacognitivi e grande attenzione alle strutture linguistiche. In particolare egli deve avere cura di pianificare percorsi di insegnamento idonei a promuovere le costruzioni matematiche degli studenti, deve creare un ambiente che favorisca l'esplorazione matematica e la formulazione di congetture, deve adottare strategie comunicative, che facilitino l'interazione e la condivisione delle idee. In base alle questioni matematiche che si pongono deve prevedere possibili processi di pensiero degli studenti e loro reazioni a specifiche domande, ma soprattutto deve fronteggiare sul momento sviluppi del discorso matematico che divergono da quello previsto.

Tutto questo richiede nell'insegnante la capacità di prefigurarsi i problemi che si possono incontrare sul campo prima ancora della loro risoluzione.

Al riguardo, parecchi studiosi hanno sottolineato l'importanza della riflessione critica dell'insegnante sulla propria attività di classe perché egli acquisisca controllo di sé nell'azione e consapevolezza delle conseguenze delle proprie decisioni. Nell'ultimo decennio, a livello internazionale, sono stati realizzati numerosi studi con e per insegnanti finalizzati a produrre in questi una 'messa in discussione' delle proprie concezioni circa la matematica ed il suo insegnamento e per acquisire nuovi e più appropriati modelli di comportamento (per approfondimenti e riferimenti bibliografici rinviamo a Malara & Zan 2008)

3. I nostri studi per l'avvio al pensiero algebrico

I nostri studi sono rivolti sia al rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico-algebrica che alla formazione degli insegnanti. Sono attuati attraverso modalità socio-costruttive sin dalla scuola dell'obbligo e promuovono un insegnamento dell'aritmetica in chiave relazionale con un uso precoce delle lettere per la codifica di relazioni e proprietà e per l'elaborazione di nuove conoscenze. Si studiano: *sul versante degli allievi* processi di pensiero, comportamenti e produzioni collettive; *sul versante degli insegnanti* la loro azione di classe e gli effetti dei processi di riflessione congiunta (tra pari e con esperti) circa la ristrutturazione delle loro conoscenze disciplinari e metodologie di insegnamento ed il potenziamento della loro capacità di auto-osservazione e controllo.

I nostri studi si inquadrano nel *Progetto ArAl - Percorsi in aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico* (Malara & Navarra 2003, Navarra & Al. 2003-2009)¹. Il progetto si sviluppa nelle classi con modalità socio-costruttive attraverso l'esplorazione di situazioni. Promuove l'argomentazione, il problem solving e il problem posing, la

¹ Si veda il sito www.aralweb.unimore.it

modellizzazione, l'uso del linguaggio algebrico, tutte competenze contemplate dal test di valutazione internazionale PISA. Elementi matematici di base sono: la simmetria del segno 'uguale'; la pluralità di rappresentazioni di un numero; l'oggettivazione delle proprietà delle operazioni aritmetiche dall'analisi delle modalità di risoluzione di problemi; il confronto del valore di espressioni numeriche senza fare calcoli; la modellizzazione algebrica e soluzione di problemi con dati incogniti; l'individuazione e la rappresentazione di regolarità numeriche e di leggi di corrispondenza.

L'ipotesi di fondo del progetto, maturata dopo svariati studi a livello di scuola media, è che i modelli mentali propri del pensiero algebrico vadano costruiti sin dalla scuola elementare in ambito aritmetico (ma non solo) attraverso un contratto didattico basato sul principio *prima rappresenta poi risolvi* e la costruzione di un ambiente di classe che consenta l'elaborazione autonoma di quello che noi chiamiamo *balbettio algebrico*, ossia l'appropriazione sperimentale di un nuovo linguaggio, interno alla matematica, nel quale le regole vengono a trovare la loro collocazione gradualmente attraverso l'analisi e la discussione di rappresentazioni iniziali sintatticamente promiscue. Attraverso un *gioco di traduzione e interpretazione* tra espressioni in linguaggio naturale e linguaggio formale gli allievi si avvicinano all'uso delle lettere, attivano la costruzione e l'elaborazione di prime espressioni algebriche, costruiscono e risolvono equazioni riflettendo sui processi soggiacenti, interpretano il significato di scritture formali in relazione a specifiche questioni. In tal modo vengono ad acquisire consapevolezza del significato di segni e simboli, del loro ruolo nelle scritture formali.

In questo approccio elemento chiave è l'insegnante, occorre infatti che egli attui una didattica di interazione sociale in cui si dia grande spazio agli aspetti linguistici, di rappresentazione di dati e di processi, ed a quelli meta-cognitivi per il controllo della pertinenza ed adeguatezza delle rappresentazioni, per il riconoscimento e l'identificazione di quelle equivalenti e per la selezione delle ottimali. Tutto questo richiede una profonda ristrutturazione delle sue concezioni sia sul versante dei contenuti sia su quello metodologico-didattico.

Per promuovere un tale cambiamento la nostra ipotesi è che occorra immergere gli insegnanti in *'comunità di indagine per l'insegnamento'*², ambiente in cui si attuano *processi di co-apprendimento* per reindirizzare l'attività di classe: si progettano e sperimentano percorsi di insegnamento che si assumono come oggetto di studio critico comune. In tal modo si dà agli insegnanti l'opportunità di impegnarsi in modo attivo e, attraverso scambi di esperienze e riflessioni a tutto campo, di divenire artefici di un nuovo modo di operare nelle classi e di (ri)costruire la loro professionalità docente.

La nostra metodologia di lavoro in queste comunità di indagine si basa su un interscambio continuo tra i partecipanti (docenti, mentori e ricercatori) circa: le letture svolte (risultati e loro valenza, metodologie, trasferibilità didattica, questioni ...); i processi di classe da attuare (pianificazione dei calendari, delle prove, delle metodologie didattiche, canovacci di discussioni, i criteri di analisi e valutazione ...); i processi di classe attuati (correlazioni nei comportamenti insegnante/studenti, conflitti tra modelli preesistenti e nuovi nell'insegnare, valutazione degli apprendimenti ...).

² I costrutti *'comunità di indagine per l'insegnamento'* e *'co-apprendimento'* sono di Jaworski (2003). Alla studiosa va riconosciuto il merito di avere oggettivato attraverso essi ambienti e processi di interazione tra insegnanti e ricercatori, modalità su cui storicamente si è basata sin dal suo nascere la ricerca italiana in Educazione Matematica.

Tali comunità sono di fatto autentici laboratori di apprendistato professionale in cui si utilizzano metodi e strumenti come quelli che sotto descriviamo.

4. Strumenti e metodi per attività laboratoriali finalizzate all'affinamento professionale degli insegnanti

I nostri studi ci hanno reso sempre più consapevoli delle difficoltà che gli insegnanti incontrano nella gestione delle discussioni matematiche di classe. Spesso essi parcellizzano il problema in gioco e non lo devolvono agli allievi, tendono a dialogare con i singoli, ratificandone gli interventi senza coinvolgere la classe, utilizzano un linguaggio operativo, poco attento alla visione relazionale, a volte deviante rispetto alla costruzione matematica. Per il superamento di queste difficoltà abbiamo concepito modalità di intervento e attività laboratoriali con/per insegnanti finalizzate a dare loro la possibilità di riflettere sulla propria pratica, oggettivare e condividere riflessioni, e misurarsi 'a tavolino' con la pratica dell'insegnamento costruttivo.

Una metodologia da noi messa a punto che si è rivelata efficace riguarda la costituzione e lo studio di quelli che noi chiamiamo *i diari dell'insegnante pluricommentati*. I diari dell'insegnante sono costituiti dalle sue trascrizioni delle registrazioni delle discussioni matematiche accompagnate da suoi commenti e riflessioni. Tali diari vengono successivamente commentati per iscritto dal mentore, da eventuali partner, dal responsabile della ricerca.

I commenti evidenziano nodi nella conduzione dell'attività attorno ai quali è necessario (ri)costruire competenze e affinare sensibilità. La loro ricchezza e varietà porta ad oggettivare un'ampia gamma di considerazioni e di approfondimenti che mettono a nudo, amplificandoli, aspetti diversi della professionalità dell'insegnante: la sua conoscenza matematica e pedagogica, il suo modo di concepire l'insegnamento e di rapportarsi agli allievi, lo stile di contratto attuato, le sue divagazioni o frettolosità, la sua affettività. I diari danno una vera 'radiografia' dell'insegnante di fronte alla quale, in caso di distorsioni, questi ha un salutare momento di crisi seguito quasi sempre da una positiva reazione di sfida verso se stesso che lo porta ad agire per una riconversione della sua professionalità. Riportiamo qui, come esempio, un estratto dalle riflessioni di una coppia di insegnanti sulla valenza dei diari (R. Fantini & C. Lugli).

La rilettura delle trascrizioni arricchite di commenti e suggerimenti ha, infine, permesso una seria e autentica autovalutazione sulla propria professionalità, una metariflessione critica sul proprio modo di condurre la discussione collettiva, sul proprio modo di rilanciare i suggerimenti dei ragazzi, di intervenire o di indirizzare, a volte anche in modo categorico, la discussione. Riflessione che ha portato successivamente ad una maggior consapevolezza professionale: in particolare è emersa la necessità di affinare la capacità di cogliere significativamente il feed-back immediato dei ragazzi senza perdere di vista lo scopo del percorso intrapreso. Maggior consapevolezza è stata poi raggiunta circa la propria mediazione didattica e soprattutto sull'importanza che riveste il linguaggio specifico e la mediazione tra linguaggio specifico e linguaggio naturale. E' emerso come particolarmente significativo sia il ruolo dell'insegnante che in una discussione collettiva deve saper rilanciare e valorizzare gli interventi dei ragazzi, non deve lasciar trasparire giudizi di valore cercando di mantenere coerenza tra linguaggio verbale e non verbale, deve saper lasciar spazio alla dialettica del gruppo pur continuando a orientare la lezione, deve saper offrire ai ragazzi occasione per riflettere continuamente sulle idee, sulle opinioni, sugli errori e sui successi conseguiti insieme.

L'indagine sulla tipologia dei commenti svolti ha portato alla individuazione di cinque aree chiave, interconnesse, che offrono spunti di approfondimento per il ricercatore e di formazione per l'insegnante: 1) questioni culturali e didattiche; 2) questioni metodologiche attinenti aspetti matematici; 3) relazioni teoria-prassi; 4) questioni linguistiche; 5) conduzione delle discussioni in classe. Vediamo brevemente degli esempi di commenti a carattere generale svolti dai vari mentori, per approfondimenti specifici in relazione a ciascuna area rinviamo a (Malara 2008).

L'insegnante viene guidato verso una rilettura dei suoi interventi didattici attraverso delle 'lenti teoriche' che attingono sia alla letteratura, sia al Glossario ArAl, i cui termini appaiono in grassetto del corpo dei commenti, come in questo esempio: *"Suggerirei un'apertura in direzione dell'early algebra e introdurrei il concetto di **rappresentare**. Questo conduce come conseguenza ad affrontare a tempi brevi il binomio chiave: **processo – prodotto** assieme all'altro binomio ad esso collegato **trasparente – opaco**. Questi concetti sono validi sempre, indipendentemente dal contesto, sia esso algebrico, geometrico, ecc."*. Un elemento costantemente sottoposto alla riflessione dell'insegnante riguarda il saper prestare attenzione nell'argomentazione degli allievi anche a motivazioni apparentemente estranee alla 'logica' della situazione. Un commento frequente dei mentori è la seguente citazione di Both: *"Gli errori e le misconcezioni degli allievi spesso non sono né prese a cuor leggero né stupide, ma rappresentano il risultato di riflessioni e di tentativi ragionevoli per dare un senso ad espressioni matematiche altrimenti prive di significato"*.

Una questione che emerge spesso, legata ai temi 1) e 2), riguarda la consapevolezza dell'insegnante della importanza della valorizzazione della visione relazionale in aritmetica. Questo un altro commento frequente dei mentori: *"spesso il pensiero aritmetico (operazioni, prodotto, calcolare, risolvere, 'quanto fa', 'viene', ...) è il carattere dominante, quello algebrico (relazioni, processo, rappresentare, ...) quello recessivo. Le attività dell'early algebra vogliono indurre l'emergere di quello recessivo per una armonizzazione tra i due"*.

Circa gli aspetti metodologici dell'insegnante nella classe nei commenti si sottolinea spesso la necessità di una maggiore attenzione nel guidare gli allievi nella traduzione dal linguaggio naturale a quello simbolico e viceversa. Questo un esempio: *Gli alunni devono imparare a esprimere aritmeticamente 'precedente' in relazione con il numero che segue, se sono capaci di parafrasarlo solo con 'che precede', 'che viene prima', rimangono al palo, perché queste parafrasi sono opache, mentre invece è necessaria una vera e propria ristrutturazione del campo. Solo se questa ristrutturazione avviene, gli alunni possono arrivare ad esprimere il precedente in funzione del successivo. Il linguaggio naturale aiuta a conquistare 'n-1'. Chiedere di esprimere in più modi la relazione porta quasi sempre all'individuazione, del punto di vista 'produttivo'.*

Una cura particolare si ha nell'indurre nell'insegnante una riflessione circa sue domande alle quali gli allievi rispondono con 'boh', o 'non so' che spesso danno luogo a 'false discussioni', centrate di un dialogo tra l'insegnante e qualche allievo 'spalla' oppure a domande conclusive quali: E' chiaro per tutti? Avete capito? Siete d'accordo? E' vero? Va bene per tutti? evitando di rilanciare alla classe il riesame di un percorso svolto per consolidarlo ed assicurarsi della effettiva acquisizione di tutti di una certa costruzione matematica. Questo un commento generale frequente dei mentori: *"Attenzione alle domande che conducono a risposte monosillabiche 'Sì', 'No', 'Boh'. Non è facile*

costruire **discussioni** ordinate, **argomentazioni** complete e coerenti, uso del **linguaggio** appropriato, ma questi sono obiettivi fondamentali. La comprensione della matematica passa anche attraverso un uso **collettivo** significativo del linguaggio. L'insegnante deve cercare di costruire costantemente l'ambiente più adatto affinché ciò si realizzi. Gli alunni devono essere guidati verso la **verbalizzazione** e **l'argomentazione**. Bisogna cercare di favorire anche il dialogo fra pari e limitare allo stretto necessario il ruolo dell'insegnante (non è facile). Se egli è il perno costante della **discussione** si impoveriscono gli aspetti **sociali** della costruzione della conoscenza. Porre domande stimolanti, e tirarsi oculatamente in disparte al momento delle risposte, sono aspetti determinanti nella dialettica di classe.

Gli effetti delle pratiche di condivisione a più livelli sono molteplici. Risulta particolarmente efficace il confronto collettivo sul lavoro di classe dei singoli insegnanti in relazione ad una stessa attività in quanto l'azione didattica di un insegnante può divenire un modello di buona pratica per i colleghi. E' riportato qui un esempio della pratica di un insegnante divenuta patrimonio di tutto il gruppo.

Classe prima. Insegnante R. Fantini

I ragazzi avevano esplorato la successione indicata attraverso i suoi termini iniziali

4, 11; 18; _; _; _; _; _; _; _; _; _;

erano arrivati non solo ad elencare i termini mancanti ma attraverso una discussione durata un'ora erano riusciti a 'descrivere la strategia' (parole loro) per ottenere l'n-mo termine della successione attraverso la formula $4 + 7(n-1)$. A completamento l'insegnante chiede una riflessione sul significato dell'attività.

Insegnante: Secondo voi quali sono gli obiettivi di questa discussione collettiva? (*Scrivete alla lavagna tutte le idee dei ragazzi.*)

Marika: Scoprire la regola

Jessica: Scoprire i diversi modi per rispondere

Riccardo B.: Confrontare le diverse strategie. E poi volevo aggiungere che dovevamo motivare, quindi metterei saper motivare.

GianMaria: Ipotizzare.

Giulia P.: Abbiamo anche verbalizzato.

Riccardo B.: Un obiettivo poteva essere anche usare meglio la logica perché per completare la successione bisognava ragionarci

Giulia F.: Abbiamo confrontato le idee.

GianMaria: Abbiamo verificato che tutti sapessimo quello che abbiamo scoperto con la scheda finale.

Giulia P.: Abbiamo anche sviluppato il linguaggio.

Jessica: Scritto, orale, matematico.

Giulia P.: Anche quello non verbale con il feed-back.

Khalid: Abbiamo anche trasformato le frasi in frasi matematiche per Brioshi.

Riccardo B.: Abbiamo anche usato le lettere.

Giulia F.: Abbiamo algebrato

Insegnante: Bene. L'attività come vi è parsa? *I ragazzi si rilassano e intervengono senza più il ottenere il turno di parola.*

GianMaria: Facilissima

Giulia P.: Facile e bella

Andrea: Faticosa. Abbiamo discusso tanto, ragionato, io mi sono stancato.

Jessica: Facile e coinvolgente.

Khalid: Interessante.

Soffermiamoci adesso su un altro strumento per la formazione, particolarmente efficace

per indurre gli insegnanti ad affrontare la stesura di canovacci preparatori di discussione.

5. L'analisi previsionale di scene di classe

La metodologia dei diari dell'insegnante, per la ricchezza e significatività dei materiali raccolti ci ha consentito di mettere a punto uno strumento didattico per attività laboratoriali degli insegnanti che dà loro la possibilità di confrontarsi anche in una prospettiva teorica con la pratica dell'insegnamento costruttivo e li guida a concentrarsi su aspetti previsionali e di riflessione a diversi livelli circa i processi di classe (sviluppo delle conoscenze matematiche, azione dell'insegnante, partecipazione individuale, ecc..)

Il compito si sviluppa solitamente in cinque o sei "Scene di classe" strutturate come un insieme connesso di compiti e in una "Riflessione Finale". Ciascuna scena è costituita da due sezioni: la prima riguarda la presentazione della situazione (un compito, un brano di discussione di classe, una riflessione condivisa, ...) la seconda riguarda la proposizione di questioni relative alla situazione. Complessivamente le scene portano l'insegnante dentro il processo di classe e lo pongono nel ruolo di osservatore riflessivo e di ipotetico attore. Gli insegnanti ricevono le Scene da studiare ad intervalli regolari di tempo (in media 20-30 minuti). Dopo aver analizzato l'input proposto nella prima parte di ogni Scena, ciascuno formula delle ipotesi sulle reazioni della classe; nella scena successiva confronta le sue ipotesi con ciò che è davvero accaduto nel prosieguo dell'attività e così via fino all'ultima Scena. Alla fine del percorso viene chiesta una riflessione a due diversi livelli: a) sull'attività didattica in sé (valenza dei processi di classe analizzati dal punto di vista della costruzione dei concetti matematici e da quello della valutazione educativa degli alunni); b) sul genere di prova (sua valenza in relazione allo sviluppo professionale di un docente).

Riportiamo un esempio di compito riguardante l'analisi previsionale frutto di una discussione in una prima media sulla individuazione di leggi generazionali soggiacenti ad una data successione e alla rappresentazione algebrica delle leggi individuate. Altri esempi si trovano in Malara 2007 e Malara & Navarra 2009.

Scena prima

L'insegnante propone la seguente sequenza numerica:

4 -11 -18 - ...

L'obiettivo dell'attività è di indurre gli allievi ad esplorare i legami tra un certo numero della sequenza e quello del suo posto in modo da trovare una o più rappresentazioni che possano essere generalizzabili.

Questioni per l'insegnante: 1. Immaginando di essere voi gli insegnanti di questa classe, illustrate il percorso che intendete seguire e ipotizzate le difficoltà che gli alunni possono incontrare. 2. Illustrate brevemente le ragioni per le quali la ricerca di regolarità costituisce uno dei campi d'esperienza più importanti per la costruzione del pensiero algebrico.

Scena seconda

Gli alunni formulano individualmente delle ipotesi. Attraverso il confronto collettivo ne selezionano due che vengono trascritte alla lavagna in linguaggio matematico e in linguaggio naturale:

4	11	18	25	32	39
(1)	+7	+7	+7		

(2) $7 \times 2 - 10$ $7 \times 3 - 10$ $7 \times 4 - 10$ $7 \times 5 - 10$ $7 \times 6 - 10$ $7 \times 7 - 10$

Legge1: Bisogna aggiungere 7

Legge2: Moltiplico per 7 poi tolgo 10

L'insegnante guida la classe alla riflessione sulle proposte favorendo la concentrazione sulla seconda.

Gli alunni la analizzano e la verificano, aggiungendo numeri alla successione, su 46, 53, 60, 67.

Questioni per l'insegnante: 1) Analizzate e commentate le due leggi. 2) Un commento di uno dei tutor al diario dell'attività fa notare all'insegnante che non ha favorito negli alunni la comprensione che le due leggi, così come sono state esplicitate, non sono confrontabili. Argomentate attorno a questa non-confrontabilità e formulate delle ipotesi sui modi nei quali l'insegnante potrebbe condurre gli alunni a rappresentazioni che consentano una loro equiparazione.

Scena terza

La prosecuzione dell'attività conduce ad una terza Legge:

Legge1: Bisogna aggiungere 7

Legge2: Moltiplico per 7 poi tolgo 10

Legge3: Moltiplico per 4, 5, 6, ecc. e poi aggiungo o sottraggo il numero che manca

Per favorire l'individuazione di una formula generale l'insegnante guida la classe verso la costruzione di una tabella.

Questioni: 1) Illustrate le potenzialità della tabella come impalcatura di supporto nella ricerca di regolarità. 2) Ipotizzate come impostereste la tabella.

Scena quarta

Alla lavagna è stata costruita collettivamente la seguente tabella:

Posto	Numero	Operazioni	Ricetta matematica
11°	74		$4+7 \times 10$
31°	214		$4+7 \times 30$
n°			?

Insegnante «Domanda: il numero n vuol dire un numero in un posto qualsiasi, senza che vi dica che numero è, questo è il difficile! Che formula scrivo per il numero al posto ennesimo?»

Sergio «Cioè... secondo me non si può trovare perché ennesimo è un numero che non si sa...»

Andrea «Come ha detto lei, ennesimo indica... un numero in qualsiasi posto, quindi dico come Sergio, se il posto è indefinito, non potremo mai sapere che numero è!»

Insegnante «Esatto, sono d'accordo anch'io! Se non vi dico al 3°, al 4°, al 100°, al 7003° posto, non si può sapere... Ma se io, invece di dirvi il numero di posto, vi dico che è al posto n , posso fare un calcolo... posso scrivere una formula per trovare questo numero?»

Stefano «Secondo me sì... non sappiamo che numero è n e anche se non lo sappiamo possiamo trovare una formula».

Questioni per l'insegnante: 1) Commentate gli interventi di Sergio e Andrea e i conflitti cognitivi che esprimono in relazione alle richieste dell'insegnante. Commentate le richieste dell'insegnante. 2) L'insegnante di classe sta cercando di giungere ad una scrittura generale che contenga quindi anche delle lettere. Illustrate le principali difficoltà che alunni giovani possono incontrare nell'approccio alla lettera e quali strategie possono essere più produttive per favorirlo.

Scena quinta e ultima

Uno dei commenti invita l'insegnante a riflettere sull'opportunità di impostare la tabella in modo diverso e suggerisce questo esempio:

n. di posto successione	termine della successione	rappresentazione del termine della mediante il n. di posto
1	4	$4+7\times 0$
2	11	$4+7\times 1$
3	18	$4+7\times 2$
4	25	$4+7\times 3$
...

Questioni: Confrontate la tabella elaborata dalla classe con quella suggerita nel commento e analizzate la sua efficacia per la conquista della generalizzazione. Ipotizzate come, partendo da questa tabella, potreste condurre l'attività favorendo il riconoscimento di analogie fra le varie scritte fino alla rappresentazione della successione in termini generali.

Riflessioni conclusive

- 1). Scrivete una breve riflessione sulla situazione didattica che vi è stato chiesto di commentare anche in base alla sua eventuale riproducibilità in una vostra classe.
- 2). Scrivete una breve riflessione conclusiva sulla struttura di questa prova in relazione soprattutto alla sua significatività come modello di compito che aiuti dei docenti in formazione ad esplorare ciò che hanno appreso sia a livello matematico che pedagogico.

Vi è un generale riconoscimento da parte degli insegnanti, soprattutto novizi, della validità del compito come mezzo per accostarsi a questioni tipiche dell'attività docente quali: la previsione dei comportamenti degli allievi; l'interpretazione delle loro produzioni; l'impostazione di discussioni. In particolare la struttura del compito in sequenza di scene viene considerata efficace per guidare passo passo l'insegnante a confrontarsi con lo sviluppo di un percorso di classe ed a riflettere su di esso. Queste alcune dichiarazioni di specializzandi SSIS classe A059 in relazione ad un compito di questo tipo:

Credo sia molto utile abituarsi a riflettere (livello metacognitivo) sulla situazione didattica concreta cercando di pianificare l'azione pedagogica in funzione delle possibili risposte della classe, sfruttando ogni intuizione/errore degli alunni per arrivare ad una costruzione della conoscenza il più possibile condivisa. (DG)

Ragionare sulle varie possibilità che si possono verificare durante una lezione permette innanzi tutto di essere pronti ad ogni 'cambio di rotta' e, inoltre, di capire che i ragazzi hanno diversi stili cognitivi e che non sempre la nostra risposta sia l'unica possibile. In questo modo si è anche più disposti a mettersi in discussione e a criticare il proprio operato in prospettiva di un miglioramento. Nella lezione frontale non si ha mai un ritorno in questi termini. (L O)

La tipologia di prova è molto positiva. Non saper cosa mi aspettava dopo mi ha costretta a ragionare maggiormente e a vagliare tutte le possibilità che mi venivano in mente. Le scene successive invece si possono utilizzare come conferma o meno del ragionamento fatto e permettono di analizzare a livello meta ciò che abbiamo sviluppato e acquisito come nostro nella scena precedente. (E M)

Nei protocolli viene evidenziato come la prova forzi l'insegnante a prevedere i comportamenti degli allievi

Questa prova può aiutare ad immedesimarsi nel modo di pensare degli allievi, a tenere in

considerazione aspetti che spesso si danno per scontati ed a prevedere sviluppi ‘insoliti’ (spesso le reazioni degli studenti non sono quelle che noi ci aspettiamo). (S A)

La prova è sicuramente significativa perchè aiuta i docenti a comprendere i meccanismi messi in atto dagli allievi e le situazioni cognitive individuali. (A B)

Le difficoltà che emergono riguardano principalmente l'impostazione di canovacci di discussione, l'interpretazione ed il commento di scritture formali, la gestione dell'attività di classe e più in generale l'attuazione di un insegnamento costruttivo

Se devo essere sincera ho trovato particolarmente complesse due tipologie di richieste: impostare un canovaccio di discussione nelle scene e commentare le scritture formali proposte nella scena 6 (S L)

La difficoltà maggiore si ha quando i ragazzi propongono le loro situazioni in termini simbolici. Se in parte le loro risposte sono prevedibili a volte è difficile entrare nei loro ragionamenti e capire quale pensiero li ha spinti ad elaborare certe pseudo-equazioni (G B)

Dai protocolli emerge chiaramente la preoccupazione degli insegnanti circa la valorizzazione dei contributi offerti dagli allievi nella costruzione delle conoscenze ed il controllo della partecipazione della classe

L'aspetto che mi preoccupa maggiormente (che ho scarsamente analizzato in questa prova) è la gestione della discussione collettiva e la possibilità di condurre la classe ad una condivisione di significati corretti. Ho abbastanza chiaro l'obiettivo di ogni fase proposta, più difficile è riuscire in pratica a condurre la classe a quell'obiettivo, guidando la discussione in modo costruttivo senza stroncature o forzature di vario tipo.(D G)

La difficoltà che mi spaventa di più è non riuscire a trovare una spiegazione/giustificazione ad una proposta fatta, sia per mancanza di esperienza e di preparazione sia perchè non sempre si riesce a intuire cosa il ragazzino voglia indicare. (MC M)

La partecipazione potrebbe permettere una maggiore comprensione da parte di tutti. Certo l'esperienza del docente -nel gestire le varie fasi, l'irruenza dei ragazzi, le loro risposte e domande- deve essere grande e non so se sarei in grado. (F M)

Le osservazioni degli insegnanti mostrano molto chiaramente come la prova consenta al docente di collegare criticamente fra loro tre nodi: il suo rapporto con la matematica, il conflitto indotto dall'incontro con l'early algebra, la mediazione fra questi due nodi imposta da una simulazione credibile con una micro-realtà di classe.

6. Brevi considerazioni conclusive

L'attuazione di un insegnamento dell'aritmetica in chiave relazionale finalizzato ad un approccio linguistico all'algebra implica negli insegnanti una riconversione delle loro convinzioni sull'insegnamento matematico. L'approccio costruttivo all'insegnamento richiede sensibilità didattica, capacità di ascolto e di coordinamento delle voci nella classe e un grande controllo delle dinamiche e dei tempi didattici. Quanto abbiamo presentato si ripropone di guidare gli insegnanti in questo e punta anche ad una ricostruzione dei loro personali atteggiamenti nella classe. Riguardo a ciò occorre tenere presente quanto J. Mason (2002) scrive:

ogni professionista, indipendentemente dall'ambito in cui opera, desidera essere consapevole, essere sensibile alle situazioni e rispondere in modo adeguato. Ma ciò che considera adeguato dipende da ciò a cui attribuisce valore, che dipende sua volta da ciò che è capace di notare” ... “è sin troppo ovvio dire che non si può intervenire su ciò che non si nota; non si può scegliere di fare qualcosa se non si ravvisa l'opportunità di farlo (*Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*).

Sulla base della nostra esperienza possiamo affermare che la capacità di osservazione e controllo di sé nell'azione di classe si potenzia nel tempo, purché l'insegnante pratichi una costante analisi dei processi didattici in cui è coinvolto e rifletta sulle micro-decisioni che ne determinano lo sviluppo anche grazie al confronto con i colleghi (in modo da riconoscere per differenza eventuali limiti nella propria azione) ed impari a sentire il 'bisogno intellettuale' di riferirsi alla letteratura come supporto.

Il problema che si pone tuttavia, da un punto di vista sociale, riguarda la possibilità di estendere queste pratiche educative su tutto il territorio nazionale, dati i tempi lunghi, la cura, il personale e gli investimenti che richiede.

Riferimenti bibliografici

- Arcavi, A.; 1994, Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Arzarello F., Bazzini L. and Chiappini, G.: 1994, *L'Algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Collana TID-CNR, serie IDM, vol. 6
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., and Purdy, D. (1985). *Diagnostic Teaching for Long Term Learning. Report of ESRC Project HR8491/1*. Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.
- Cusi, A., Malara N.A., 2008a, Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences, *Quadrante*, vol. XVI, n.1, 57-80
- Kieran, C. (1996), The changing face of school algebra. In C. Alsina & Alii (a cura di) *8th International Congress on Mathematics Education: Selected Lectures*, S.A.E.M. Thales.Siviglia, Spagna, pp. 271-290
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14, 113-120.
- Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.
- Malara, N.A. Approccio all'early algebra e modalità di formazione degli insegnanti, XVIII Conv. Naz. UMI, *Notiziario UMI*, anno XXXV, n.1.2, inserto speciale.
- Malara, N.A., 2007, Strumenti e metodi per promuovere un approccio socio-costruttivo all'insegnamento della matematica, *Università e Scuola*, anno XII, n. 2, 70-84
- Malara, N.A., Navarra G.: 2003, *Progetto ArAl: Quadro teorico e glossario*, Pitagora, Bologna
- Malara, N.A. and Navarra, G.: 2009, The analysis of classroom-based processes as a key task in teacher training for the approach to early algebra. In B. Clarke & Alii (a cura di) *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education*, Springer. 235-262
- Malara N.A, Zan, R.: 2008, The Complex Interplay between Theory and Practice: Reflections and Examples, in English, L. (ed) *Handbook of International Research in Mathematics Education- II Edition*, LEA, NJ. 539-564
- Mason, J.: 2002, *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.
- Navarra, G., & A.A.V.V.: 2004-2009, Progetto ArAl: Unità 1-11, *Pitagora, Bologna*.