DIMOSTRAZIONE E INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA

Nicolina A. Malara
Dipartimento di Matematica, Università di Modena & Reggio E.

Ci si sofferma sui seguenti punti: valenza educativa della dimostrazione, la dimostrazione nell'insegnamento, dimostrazione e insegnamento dell'algebra, comportamenti e difficoltà di studenti e di futuri insegnanti coinvolti in attività dimostrative, i nostri studi più recenti in ambito dimostrativo via linguaggio algebrico

1. Una piccola premessa

in *The Mathematical Experience* (1981) Davis ed Hersh sostengono che la dimostrazione caratterizzi univocamente la matematica e che non vi sia matematica se non vi è dimostrazione; richiamano il valore sociale della dimostrazione, per il costante processo di critica e di conferma cui è sottoposta, che ne suggella la rispettabilità e l'autorità. G. Hanna (1995) sottolinea l'antiautoritarismo della dimostrazione ed il suo essere strumento di democrazia per il vaglio critico intrinseco alla sua attuazione. L. Russo (2000) lamenta le conseguenze sociali della diffusa pratica di evitare le dimostrazioni, anche a livello universitario, per il generale impoverimento della competenza argomentativa che determina.

Puntare nella scuola sulle attività argomentative e dimostrative ha dunque una valenza non solo matematica ma educativa generale, con una stretta ricaduta sull'assetto sociale di un paese.

2. La dimostrazione nella scuola

Nelle nostre scuole per tradizione la dimostrazione si affronta al biennio della secondaria superiore, in geometria, e seppure con minore enfasi, nel triennio, in analisi. Il carattere del suo studio è però di tipo prevalentemente riproduttivo. Ciò che si richiede allo studente è esporre il dipanarsi di un ragionamento fatto dal docente o che si trova sul libro di testo. Raramente gli si chiede di collegare tra loro teoremi studiati, di riflettere sulla rete di conoscenze che via via si apprendono, di esercitare un controllo meta sul corpus teorico che vengono a costruire. Completamente assenti poi sono le attività di costruzione di dimostrazioni, strettamente connesse con l'esplorazione di situazioni aperte, la modellizzazione, il problem solving.

Così il carattere induttivo-sperimentale proprio dell'attività matematica non emerge e gli studenti vengono a formarsi una visione riduttiva di essa, costituita da una serie di fatti culturalmente poveri, da loro considerati di puro utilizzo tecnico. Così non è in paesi nord europei o di loro influenza, dove il fare matematica prevale sullo studiare fatti matematici. In tali paesi la dimensione sperimentale dell'attività dimostrativa è dominante, gli studenti sono posti di fronte ad attività che favoriscono la formulazione di congetture, imparano ad esplorare situazioni, a costruire contro-esempi, ad analizzare casi in un'ottica di generalità, a confrontarsi argomentando su strategie e soluzioni intraviste, a costruire teoremi. Questo comporta anche la loro graduale appropriazione ed il loro uso autonomo di sistemi di rappresentazione connessi ai fatti esplorati e l'attivazione di collegamenti fra sistemi diversi di rappresentazione.

Nel documento di discussione del recente ICMI study sulla dimostrazione (Hanna e de Villiers, 2008) si sottolinea come oggi, grazie anche alla diffusione di software informatici, una tale visione della dimostrazione - che va al di là della verifica della validità logica di una proposizione e che dà enfasi alla ricerca di giustificazioni della validità di congetture - sia oggi molto diffusa nei curricoli scolastici in corso in vari paesi e di come questo ponga il problema di studiare percorsi e modalità per aiutare gli studenti a giungere nel tempo produrre da se stessi dimostrazioni autonome in diversi contesti.

Nel nostro paese occorre cominciare ad operare per una conversione nell'insegnamento passando dall' "esposizione di ragionamenti" alla "costruzione di ragionamenti".

G. Lolli (2006) sostiene l'importanza che nell'insegnamento non si appiattisca il significato e il senso della dimostrazione, dando di essa la visione di una serie di passaggi formali da riprodurre senza alcun commento esplicativo. Egli scrive

> *In generale, la regola dominante deve essere quella di distruggere (o ancor prima, non instillare) l'opinione che la risposta (a un quesito che richiede una dimostrazione) debba o possa essere un flusso diretto lineare ininterrotto di formule matematiche. Instillare al contrario, anche nel caso di successioni di uguaglianze e disuguaglianze, servendosi proprio dei vari artifici di dispiegamento dei commenti, l'idea che la dimostrazione è più simile ad una passeggiata, senza fretta, con deviazioni e ritorni e visite su percorsi laterali, in un paesaggio abitato da pensieri e parole.*

Nell'insegnamento andrebbe dunque valorizzata la dimensione meta cognitiva ossia l'esercizio di riflessioni sulla dimostrazione come oggetto di conoscenza, sia in riferimento alla teoria in cui si inserisce sia in riferimento alle funzioni che essa viene a svolgere.

In '*QED - Fenomenologia della Dimostrazione'* (Lolli 2005), troviamo la descrizione di una serie di funzioni assolte dalla dimostrazione, ricca di tanti esempi: *evitare i calcoli, fornire spiegazioni, suggerire generalizzazioni, spiegare mediante generalità, risolvere problemi, creare concetti, raffinare l'intuizione, sostituire l'intuizione, predire risultati, fare economia, trasportare risultati, stabilire collegamenti, estrarre algoritmi, confermare l'intuizione, permettere l'intuizione, spiegare perché non.* Tuttavia, si può considerare una ulteriore funzione della dimostrazione, collaterale rispetto ad essa ma importante per lo sviluppo della competenza matematica: la funzione di *affinare ed ampliare l'uso degli strumenti linguistici e l'interpretazione del linguaggio formale*.

Quest'ultimo punto è chiave nell'approccio alla dimostrazione da noi proposto, visto in intreccio con l'apprendimento del linguaggio algebrico e dell'algebra stessa.

2. Dimostrazione e insegnamento dell'algebra

Al congresso ICME 8 di Siviglia (1996) C. Kieran caratterizza l'algebra da insegnare a scuola in tre tipologie di attività, da lei viste a livello crescente di complessità. Pone al primo livello le *attività generazionali*, che riguardano la rappresentazione e l'interpretazione di situazioni, proprietà, modelli e relazioni e che consentono di costruire gli oggetti dell'algebra ancorandone i significati all'esperienza; al secondo livello *le attività trasformazionali,* attività classiche quali la semplificazione di espressioni, il lavoro con espressioni equivalenti, la risoluzione di equazioni, lo studio dei polinomi e la loro fattorizzazione, …; al terzo livello *le attività globali di livello meta,* attività non esclusivamente algebriche dove l'algebra è utilizzata come uno strumento quali: il problem solving, la generalizzazione, la giustificazione, la dimostrazione. Kieran sottolinea la necessità di devolvere più tempo alle attività di terzo livello poiché queste inducono gli studenti ad affrontare attività trasformazionali in modo naturale dal momento che è il significato che guida e supporta la manipolazione algebrica.
Diversi autori avevano già sottolineato l'importanza di affrontare attività dimostrative nell'insegnamento dell'algebra. Pionieristici al riguardo sono gli studi di A. Bell. Già nel 1976 questi affronta ricerche sperimentali nelle classi sul problem solving dimostrativo in ambito aritmetico e documenta difficoltà e inabilità a sviluppare una dimostrazione via linguaggio algebrico anche di studenti

bravi nelle trasformazioni sintattiche. Per superare queste difficoltà ritiene fondamentale condurre gli allievi attraverso *il ciclo algebrico essenziale*, caratterizzato da tre tipi di attività: *rappresentare, manipolare, interpretare.* Su questa base sviluppa un ampio progetto sperimentale centrato su attività di esplorazione in ambienti sia realistici sia matematici che dà ampio spazio alla dimostrazione in senso sperimentale (Bell & Altri 1985)

Arcavi, (1994), sottolinea la necessità che la scuola sposti l'attenzione dal problema della manipolazione simbolica alla ricerca di stimoli da fornire ai propri studenti per favorire un apprendimento caratterizzato da un uso dei simboli per pensare, per realizzare astrazioni e generalizzare, per sviluppare strategie risolutive. Sottolinea l'importanza che gli studenti raggiungano la consapevolezza che il linguaggio algebrico costituisce un potente strumento per capire, esprimere e comunicare generalizzazioni, stabilire connessioni, produrre argomentazioni e dimostrazioni. Propone una didattica dell'algebra finalizzata allo sviluppo del *'Symbol Sense',* espressione che condensa competenze quali: scegliere oculatamente le variabili attraverso cui rappresentare le relazioni in situazioni sottoesame; Acquisire familiarità con i simboli e manipolarli ponendosi su un piano interpretativo; Trasformare espressioni 'ad hoc', con flessibilità, intelligenza e visioni di insieme, evitando circolarità, mantenendo attenzione costante sui significati dei simboli e riuscendo a selezionare tra i possibili quelli funzionali allo sviluppo della situazione in gioco; saper vedere nuovi significati di una espressione attraverso sue forme equivalenti,

MacGregor e Price (1999) inoltre sottolineano l'importanza dell'acquisizione degli allievi di una *"consapevolezza metalinguistica"* nell'apprendimento dell'algebra, ossia la capacità di controllare i significati delle espressioni linguistiche, così come la loro forma e la loro funzione.

Senso del simbolo e consapevolezza metalinguistica stanno alla base dello sviluppo de *“il pensiero anticipatorio*” (Arzarello & Altri 1994, 2001, Boero 2001), ossia la capacità di: ipotizzare scritture formali a cui pervenire per poter affermare certi risultati; prevedere, senza svolgere trasformazioni sintattiche, possibili nuove forme di una certa espressione vagliandone i significati in relazione ad uno scopo; attivare cambiamenti di frame concettuale ed interpretazioni plurime.

Arzarello & Altri (1994) propongono una visione dell’algebra *come strumento di pensiero* centrata sul potere espressivo delle scritture formali, che evolvono nel tempo verso forme linguistiche sempre più complesse e sofisticate,. Concentrano l’attenzione verso i sensi che un allievo può associare ad una data formula per la molteplicità di sensi che sono incorporati in esse. Introducono il costrutto di *frame concettuale*, come “insieme organizzato di conoscenze (enti matematici, loro proprietà, algoritmi, strategie di ragionamento…), che suggeriscono ad un soggetto come ragionare, manipolare formule, anticipare risultati”, quali ad esempio nella teoria elementare dei numeri, i frame: ‘pari/dispari’, ‘multipli’, ‘numeri primi’, ‘scomposizione in fattori’, etc. . Sottolineano la dimensione soggettiva della nozione di frame concettuale poiché riguarda ciò che l’allievo ha incorporato circa un dato insieme di conoscenze, alla gamma di azioni che vengono sollecitate in lui, alle aspettative implicate dalla loro attivazione. Chiamano ‘*mondo risolutivo’* un ambiente nel quale un allievo produce un interpretante in riferimento ad una situazione problematica e vedono *lo sviluppo del pensiero algebrico come gioco di interpretazioni attraverso mondi risolutivi diversi*.

Tali autori sostengono che la dimostrazione di congetture è attività tipica nella quale gli studenti sono chiamati ad operare con flessibilità un efficiente gioco di interpretazioni. Gli studenti devono saper intervenire sulle espressioni simboliche al fine di attuare quelle trasformazioni che sono in grado di mostrare proprietà non evidenti nell'espressione di partenza. Cruciale per questo non è solo la padronanza nella manipolazione simbolica, quanto la qualità e la quantità di pensieri anticipatori che lo studente è in grado di mettere in atto in relazione alla nuova forma di una espressione per una possibile trasformazione.

La capacità di produrre pensieri anticipatori è a sua volta strettamente connessa alla flessibilità nell'effettuare cambiamenti di frame per interpretare una data espressione e nel controllare le mutue relazioni tra frame concettuali attivati e il passaggio da un frame ad un altro in uno specifico mondo risolutivo. In questo quadro va anche considerato quanto evidenziato da Duval (2002, 2006) circa: i problemi di coordinamento tra registri di rappresentazione che intervengono, i trattamenti in ciascun registro ed i legami tra essi, le conversioni tra un registro ed un altro.

3. La dimostrazione in ambito aritmetico

Svariati autori indicano l'ambiente dei numeri naturali come contesto ideale per affrontare attività dimostrative a carattere algebrico (Wheler 1996, Brown & Coles 1999, Edwards & Zazkis 2002, Sadovsky 1999, Selden & Selden 2002, Campbell 2006), in quanto consente di considerare un'ampia gamma di problemi a vari livelli, offre la possibilità di generare esempi e controesempi senza troppe difficoltà, permette di concentrare l'attenzione sulla costruzione di dimostrazioni grazie alla familiarità degli enti in gioco. Tali autori mettono in luce come il far lavorare gli studenti su attività di costruzione di giustificazioni e dimostrazioni consente loro di:

- introdurre tecniche di trasformazione sintattica come strumenti al servizio della costruzione dei significati creati durante il loro lavoro matematico;
- percepire la potenza del linguaggio algebrico come strumento per spiegare e dimostrare*;*
- acquisire la consapevolezza che gli strumenti dell'algebra portano alla scoperta di nuova conoscenza ed anche alla creazione di nuovi oggetti.

In particolare Sadovsky (1999) vede nei problemi dimostrativi aritmetici risolubili per via algebrica, la doppia possibilità di evidenziare, agli occhi degli studenti i limiti delle pratiche esclusivamente aritmetiche ed il significato nelll'uso del linguaggio algebrico. Definisce questo ambiente di lavoro come "*spazio didattico di articolazione e di rottura tra aritmetica ed algebra":*

- *spazio di articolazione* in quanto consente agli allievi, nell'esplorazione, di servirsi delle conoscenze aritmetiche a loro disposizione*;*
- *spazio di rottura* poiché attraverso questi problemi gli studenti sperimentano il bisogno di abbandonare certe pratiche tipiche dell'ambito aritmetico.

Vediamone un esempio attraverso una semplice esplorazione numerica.

Quesito per gli allievi

Osserva le somme
15 + 51 = 66 ; 23 + 32 = 55; 31 +13 = 44; 54 + 45 = 99;
83 + 38 = 121; 73 + 37 = 110.
*Vedi qualche regolarità? (*Si è nello spazio di articolazione).
Dall'osservazione una prima, intuitiva risposta è: *ciascuna somma è un multiplo di 11*
Si domanda agli allievi: *il secondo fattore ha una qualche relazione con i due addendi?*

Gli allievi sono indotti ad esplicitare le somme come multipli 11, ad osservare il secondo fattore nelle trasformate:
15+51 = 11×6; 31+13 = 11×4; 54+45 = 11×9; 83+38 = 11×11; 73 + 37 =11×10
mettendo in relazione 6 con 1 e 5; 4 con 1 e 3; 9 con 5 e 4; 11 con 8 e 3 risulta loro evidente che il secondo fattore è la somma fra le cifre.
Nasce il problema*: come si può fare per capire se la regolarità si presenta sempre?*
Per indagare sulle ragioni della regolarità si ragiona sugli esempi cercando di trovare un legame fra i vari casi: 15+51=11x6; 31+13=11x4; 54+45=11x9; 83+38=11x11 ; 73 + 37 =11×10
Avviene il passaggio allo spazio di rottura: le scritture si complicano per cercare di "farle parlare". Attraverso la conversione di rappresentazioni posizionali nelle corrispondenti polinomiali e la sospensione della esecuzione dei calcoli (con la valorizzazione delle proprietà aritmetiche) si giunge a queste rappresentazioni

(1•10 + 5)+(5•10 + 1) = (1+5)10+(5+1) = (1+5)(10+1)
(3•10 + 1)+(1•10 + 3) = (3+1)10+(1+3) = (3+1)(10+1)
(5•10 + 4)+(4•10 + 5) = (5+4)10+(4+5) = (5+4)•(10+1)
(8•10 + 3)+(3•10 + 8) = (8+3)10+(3+8) = (5+4)•(10+1)
(7•10 + 3)+(3•10 + 7) = (7+3)10+(3+7) = (3+7)•(10+1)

Gli allievi, indotti all'osservazione, colgono l'analogia tra i vari casi e rileggono le espressioni come *schema di processo.* Sviluppano la capacità di vedere il generale nel particolare, comprendono che le ragioni della regolarità stanno nella validità delle proprietà delle operazioni aritmetiche.
L'esprimere tale processo in generale comporta l'uso delle lettere. La lettera viene a rappresentare una cifra qualsiasi non determinata, variabile da 1 a 9. La catena di trasformazioni: (a•10+b) + (b•10 + a) = (a + b) •10 + (a + b) = (a + b) •10 + (a + b) = (a + b) • (10 + 1) = 11(a+b) dà luogo alla dimostrazione della regolarità osservata, che si fonda sulle

proprietà associativa e commutativa dell' addizione e sulla proprietà distributiva.

Questi processi non sono affatto spontanei da attivare. Da quanto esposto ci si rende conto che il ruolo dell'insegnante è fondamentale: occorre che egli agisca con gli allievi ponendosi come modello ed attivatore di atti meta cognitivi, di tipo previsionale ed interpretativo, per forzare in questi i significati delle scritture via via ottenute ai fini del problema e per educarli alla pratica del pensiero anticipatorio.

Comportamenti e difficoltà di studenti e futuri insegnanti coinvolti in attività dimostrative

In un classico studio sulla connessione aritmetica-algebra Lee e Wheeler (1989) riportano che gli studenti tendono ad operare solo a livello aritmetico, senza riuscire ad esprimere generalizzazioni attraverso l'algebra. Citano il caso di uno studente che, di fronte alla richiesta di analizzare una dimostrazione condotta via linguaggio algebrico, afferma: "se dovessi spiegare questo problema ad un amico, prima lo risolverei attraverso l'algebra e poi lo dimostrerei attraverso gli esempi".

Barnard e Tall (1997) individuano difficoltà di traduzione nel codice algebrico di semplici concetti numerici (doppio, successivo, pari, dispari, quadrato), ma soprattutto difficoltà di interpretazione nel dedurre dalle espressioni algebriche via, via costruite informazioni che esse portano in sé.

Diversi studiosi (Healy & Hoyles 2000; Boero & Altri 2002; Alcock & Weber 2005) evidenziano la preferenza degli studenti verso processi dimostrativi di tipo empirico o narrativo. Rilevano che gli studenti: sentono il bisogno di riferirsi ad argomenti verbali, perché fortemente radicati al versante semantico, piuttosto che ricorrere a scritture formali; considerano i dati empirici come strumenti più convincenti, le parole e le immagini come i migliori strumenti per spiegare.

Furinghetti e Paola (1997) evidenziano nelle produzioni degli allievi un doppio effetto ombra di interferenza tra i contesti aritmetico ed algebrico:

- un effetto ombra dovuto all'algebra, che interviene a livello del significato ed impedisce agli studenti di servirsi delle loro conoscenze in ambito aritmetico mentre affrontano dimostrazioni.
- un effetto ombra dovuto all'aritmetica, che porta gli allievi a considerare gli esempi numerici come dimostrazioni ed impedisce loro di costruire esplicite generalizzazioni.

Neria e Amit (2004) rilevano che la maggioranza degli allievi non utilizza un approccio algebrico, ma sceglie di comunicare attraverso rappresentazioni verbali, scrivendo a parole, usando esempi numerici, includendo nelle loro spiegazioni calcoli e manipolazioni. Sottolineano che principale compito del docente è operare affinchè divenga patrimonio di tutti gli studenti la consapevolezza che il linguaggio algebrico rappresenta un mezzo di comunicazione potente e di vasta portata.

Passando sul versante degli insegnanti non può non considerarsi il problema delle loro competenze dimostrative.

Nostri studi sui comportamenti di futuri insegnanti di matematica di scuola secondaria (Malara 2002a, 2002b) rivela una dominanza di verifiche numeriche e blocchi nell'uso del linguaggio algebrico. Chi si cimenta nell'uso del linguaggio algebrico mostra difficoltà nei trattamenti sintattici, difficoltà di coordinamento tra rappresentazioni aritmetiche ed algebriche, difficoltà interpretative, inabilità ad attivare cambiamenti di frame e pensieri anticipatori. Vediamo degli esempi.

Esempio 1

Problema. Scrivi un numero naturale di due cifre. Scrivi quello che ottieni da questo invertendo le cifre. Prova che la somma è

divisibile per 11. Indaga cosa accade quando il numero è di tre o quattro cifre.
"Prova"
25+52=77 è vero;
52+25=77; 13+31=44; 44+44=88 è vero,
la somma ha sempre le cifre ripetute come i multipli di 11.
132+231=363 è vero; 345+543=888 non è vero.
1246+6421=7667=11x697 è vero;
1234+4321=5555=11x505; 5051+1505=6556=1x596;
2468+8642=11110 = 11x1010.
Non funziona nel caso di 3 cifre.

Esempio 2
Problema. *Scrivi un numero di tre cifre decrescenti, inverti l'ordine delle cifre, fai la differenza dei due numeri. A questa differenza aggiungi la medesima con le cifre invertite. Qualunque sia il numero si ottiene sempre 1089. Perché?*

"Prova"

Suppongo che il numero sia abc (a>b>c)

a b c -	u 9 (9-u) +
c b a =	(9-u) 9 (u) =
u 9(9-u)	1 0 8 9

dove u è un numero.

Infatti 431 – 134 = 297 ; 297 +792 = 1089.

Nel primo esempio l'autore si limita a verificare la regolarità su casi numerici e, paradossalmente, nel caso dei numeri a tre cifre non esegue alcuna verifica che provi la dichiarata non validità della congettura. Nel secondo esempio l'autore utilizza le lettere ma rivela la dominanza degli schemi degli algoritmi numerici, introduce la lettera u per rappresentare il numer a-1-c, che erroneamente considera qualsiasi, e fa ricorso ad una proprietà che andrebbe dimostrata attraverso le relazioni: 10+c-a = 9+(1+c-a) ; (c+1-a) = - (a-c-1) = - u.

Ma ciò che più colpisce è la sorpresa, lo smarrimento ed anche il senso di frustrazione dei soggetti di fronte alle loro incapacità, questa è la dichiarazione di uno di loro: *Mi sono trovata incapace di formulare un ragionamento. Non ho la più pallida idea di come si risolvano i quesiti. Non so perché queste regolarità accadono.*

Studi successivi analoghi, basati sull'analisi delle prove attraverso particolari elementi teorici, confermano questi risultati (Cusi & Malara 2007, 2008). Una questione che emerge vistosamente da entrambi gli studi riguarda il difficile coordinamento tra rappresentazione posizionale a rappresentazione polinomiale. Per questo riteniamo importante far lavorare gli studenti sul passaggio dalla rappresentazione posizionale a quella polinomiale in ambito numerico, come illustrato dall' esempio sotto riportato.

Quesito per gli allievi

Si consideri la seguente tabella di numeri

11011	12012	13013	14014	15015	16016	17017	18018	19019
21021	22022	23023	24024	25025	26026	27027	28028	29029
31031	32032	33033	34034	35035	36036	37037	38038	39039
41041	42042	43043	44044	45045	46046	47047	48048	49049
51051	52052	53053	54054	55055	56056	57057	58058	59059
61061	62062	63063	64064	65065	66066	67067	68068	69069
71071	72072	73073	74074	75075	76076	77077	78078	79079
81081	82082	83083	84084	85085	86086	87087	88088	89089
91091	92092	93093	94094	95095	96096	97097	98098	99099

Cosa accomuna questi numeri? Cosa si può dire per loro?

La struttura dei numeri favorisce la visione di ciascuno come somma di termini analoghi

11011=11000 + 11; 21021=21000 + 21; 31031=31000 + 31 … … … 99099 = 99000 +99.

La proprietà distributiva fa emergere un invariante

11011 = 11000 + 11 = 11 (1000+1)

21021 = 21000 + 21 = 21 (1000 +1)

…

$99099 = 99000 + 99 = 99\ (1000 + 1)$

Si pone il problema: *Come esprimere questa regolarità in generale?* A questo punto è fondamentale è il passaggio alla notazione polinomiale

$11011 = 10^4 + 10^3 + 10 + 1$

$21021 = 2\times10^4 + 1 \times 10^3 + 2 \times 10 + 1$

…

$99099 = 9\times10^4 + 9 \times 10^3 + 9 \times 10 + 9$

L'analogia tra i casi numerici esaminati porta all' uguaglianza

$a\times10^4 + b \times 10^3 + a \times 10 + b = (a \times 10 + b)\ (1000+1)$

che si giustifica sintatticamente attraverso raccoglimenti parziali ed osservando che $1000 = 10^3$

Ci si può spingere a indagare su eventuali generalizzazioni

Considerando i prodotti $(1000+1)\ (a \times 10^2 + b \times 10 + c)$

Qual è la loro rappresentazione canonica come numeri naturali? E più in generale cosa si può dire?

Molti sentiranno l'esigenza di particolarizzare i valori di a, b e c ma è sempre la proprietà distributiva che mette in luce tale rappresentazione, basta esplicitare il prodotto

$a\times10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + a\times10^2 + b \times 10 + c$

Si tratta dei naturali da 111111 a 999999. Sono tutti numeri che contenendo come fattore 1001 sono divisibili per i fattori di questo.

Esplorazioni come queste rendono chiara la genesi di quesiti dimostrativi e di teoremi e consentono inoltre di affrontare il problema della formulazione degli enunciati.

Il rapporto linguaggio naturale linguaggio algebrico

Alcuni ricercatori non sono concordi nell'enfatizzare l'uso del linguaggio algebrico per la dimostrazione in ambito aritmetico, sostenendo che esso inibisce l'intuizione e che il linguaggio verbale risulta più semplice ed in certi casi più efficace, per l'avvio alla dimostrazione. Esempio classico a cui si riferiscono è il seguente problema: "*provare che il prodotto di tre numeri consecutivi è divisibile per sei*", la cui dimostrazione verbale è effettivamente molto semplice ed immediata (dati tre numeri consecutivi, almeno uno dei tre deve essere pari, almeno uno dei tre diviso per 3 ha resto zero. Il loro prodotto è perciò divisibile per 2 e per 3 e quindi per 6.)

Questo atteggiamento mentale comporta che spesso nella prassi didattica si faccia ricorso a proprietà aritmetiche che vengono accettate intuitivamente, ad esempio: la somma di due pari è pari, il quadrato di un dispari è dispari, il prodotto di due naturali consecutivi è pari. Non si pone agli studenti il problema di dover dare una giustificazione della loro validità, né si educano a rappresentare le proprietà in gioco (essere pari, dispari, consecutivi, …). Questo inibisce la possibilità degli studenti di affrontare attività dimostrative di un qualche rilievo.

Occorre perciò non solo porre agli studenti il problema di esplicitare le ragioni che determinano la validità delle proposizioni ma soprattutto educarli ad esprimere formalmente i loro pensieri, aiutandoli a controllare i processi di traduzione tra i due registri espressivi, in modo che questi possano costruirsi il retroterra esperienziale per affrontare problemi dimostrativi per i quali il ricorso al linguaggio algebrico è essenziale. Riportiamo a titolo d'esempio un problema dimostrativo didatticamente molto utile e significativo perché non risolubile per via verbale.

> Problema: *Dati due numeri interi a e b se 3a = 2b allora la somma a+b è multiplo di 5"*
>
> Il problema ha una difficoltà intrinseca, poiché coinvolge le strutture additive e moltiplicative, cosa che richiede il coordinamento tra i due ambienti e la conversione di rappresentazioni.
>
> La sua soluzione si basa su un teorema di teoria elementare dei numeri che spesso non è una conoscenza oggettiva ed esplicita degli studenti: *se un numero divide un prodotto ed è primo con un fattore allora deve dividere il rimanente fattore*.
>
> Questa la dimostrazione: Da 2a = 3b segue, per il teorema citato, che b risulta pari. ponendo b = 2h, sostituendo e dividendo per 2 segue che a = 3h. a+b è allora rappresentabile

mediante h ossia a+b = 3h +2h, per la distributiva segue l'asserto.

Questo esempio è interessante anche perché il controllo del processo dimostrativo e la consapevolezza dei fatti che ne stanno alla base porta a vedere immediatamente la sua generalizzazione: basta considerare l'uguaglianza di multipli di due numeri rispetto a fattori primi tra di loro. Si ha il teorema *se due numeri a e b sono tali che ua = vb con MCD (u,v)=1 allora a+b è divisibile per u+v.* La dimostrazione precedente può essere ripercorsa leggendola in termini generali ed operando semplici variazioni formali. Questa è un'altra importante attività meta che deve essere indotta dall'insegnante.

Riassumendo, riteniamo essenziale educare gli studenti a sviluppare ragionamenti via linguaggio algebrico, per la semplificazione e controllo della complessità argomentativa, per la facilitazione della comunicazione e della generalizzazione, per la valorizzazione del ruolo di metalinguaggio del linguaggio naturale.

Un percorso sperimentale di avvio alla dimostrazione via linguaggio algebrico

Recentemente, in collaborazione con A. Cusi abbiamo realizzato un progetto sperimentale d'insegnamento dell'algebra al biennio della scuola secondaria superiore centrato su attività dimostrative con l'obiettivo di sviluppare in loro il 'senso del simbolo' e un'idea di algebra come strumento di pensiero.

Il progetto di studio è stato molto complesso, i principali problemi affrontati hanno riguardato: il coinvolgimento nel progetto e la formazione di alcuni insegnanti motivati, la messa a punto di un percorso didattico ad hoc con il contributo attivo degli insegnanti coinvolti tenendo conto di opportuni quadri teorici; l'individuazione di modalità di raccolta dei dati e di specifiche 'lenti' teoriche con cui analizzare le produzioni degli studenti ed i comportamenti dell'insegnante; lo studio dei

comportamenti e delle produzioni degli allievi, l'analisi delle azioni dell'insegnante e delle interrelazioni tra comportamenti dell'insegnante e produzioni degli studenti (per approfondimenti si vedano Cusi 2008a, 2008b, 2009, Cusi e Malara 2007, 2008).
Il lavoro con gli insegnanti si è svolto su più piani: della loro formazione, della azione di classe, della riflessione su di essa. Si sono realizzate sessioni di lavoro congiunto su:

- le letture consigliate (risultati e loro valenza, metodolologie, trasferibilità didattica, questioni);
- i percorsi di classe da attuare (calendari, delle prove, metodologie didattiche, ruoli da assumere nelle discussioni, criteri di analisi da adottare …)
- i processi di classe attuati (comportamenti dell'insegnante e sue abilità nel porsi come modello di azioni efficaci ai fini dimostrativi via linguaggio algebrico, conflitti tra vecchi e nuovi modelli di insegnamento, abilità espresse e concezioni maturate in insegnanti e studenti …).

L'obiettivo di fondo perseguito sul versante degli insegnanti, è stato di indurre in loro un ripensamento sul modo di concepire e praticare l'insegnamento dell'algebra; di sostenerli nell'attuare una didattica nuova, centrata sulle discussioni di classe rendendoli consapevoli della gamma di ruoli da svolgere; favorire l'auto osservazione nella azione di classe e la riflessione sui processi attuati in modo da acquisire consapevolezza dei comportamenti da assumere ed ottenere nel tempo lo sviluppo di una loro nuova professionalità. (Per approfondimenti su questo versante rimandiamo a Cusi 2008b ed a Cusi 2009)
Sul versante degli studenti gli obiettivi principali sono stati quelli di individuare le competenze che è necessario che gli allievi arrivino a sviluppare affinché non solo possano riuscire ad affrontare con successo attività dimostrative via linguaggio algebrico, ma anche individuare gli effetti 'meta' del percorso da noi progettato sugli studenti nel caso in cui l'insegnante

sappia adottare strategie appropriate ed efficaci nel proporlo alle sue classi, in riferimento allo sviluppo del senso del simbolo ed alla conquista di una visione dell'algebra come strumento di pensiero. L'ipotesi è che, nell'ambito delle dimostrazioni in aritmetica, le buone produzioni richiedono la *coniugazione tra tre principali componenti:*

a. una appropriata *attivazione di frames* ed un buon *coordinamento* tra diversi frames (Arzarello 2001);

b. una corretta messa in atto di *pensieri anticipatori* (Boero 2001);

c. una buona flessibilità nel *coordinamento tra registro algebrico e registro verbale*, sia a livello di traduzione che di interpretazione (Duval 2006).

Il lavoro nelle classi si è articolato attraverso l'alternanza di prove individuali, momenti di lavori a piccoli gruppi e momenti di discussione collettiva. Le discussioni di classe relative ai lavori a gruppi si sono, in particolare, articolate in tre momenti essenziali: (a) *Raccolta delle produzioni dei singoli gruppi*; (b) *Confronto e discussione sulle produzioni*; (c) *Sintesi conclusiva dell'insegnante*.

Per questioni di spazio e di articolazione degli interventi[1] ci limitiamo qui ad dare indicazioni sul percorso messo a punto, esplicitando le varie tipologie di attività concepite per le sue diverse fasi ed esemplificazioni delle attività realizzate.

Queste le tipologie di attività:

1. Traduzione di proprietà e di procedure
2. Interpretazione di espressioni contenenti variabili e individuazione di condizioni per queste ultime sulla base di specifiche proprietà note per le prime

---

1 Questa relazione è stata impostata in concordanza con quella di A. Cusi presente in questi atti (Cusi 2009). Per approfondimenti su obiettivi e difficoltà delle attività indicate rinviamo a Cusi 2008a

3. Analisi della verità/falsità di enunciati e giustificazione della risposta data
4. Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e loro dimostrazioni
5. Analisi di strategie dimostrative di studenti e giustificazione della loro correttezza o erroneità
6. Costruzione di dimostrazioni di dati teoremi.

Esempi di attività del percorso

Attività 1.

Proposizioni assegnate da tradurre in linguaggio algebrico

Il successivo di un pari, Il successivo pari di un pari
Il quadrato del successivo di un numero
Il successivo del quadrato di un numero
Il quadrato del successivo di un pari
Il quadrato del successivo di un dispari

Il precedente di un numero
L'antecedente del triplo di un numero
Il precedente di un pari
Il precedente di un dispari
L'antecedente del triplo di un numero pari
L'antecedente del triplo di un numero dispari

La somma di due dispari consecutivi
Il prodotto di due numeri consecutivi
La somma dei quadrati dei reciproci di due numeri
La somma del quadrato dei reciproci di due numeri
Il quadrato della somma dei reciproci di due numeri

Attività 2.

Esempi di attività interpretative di scritture algebriche e di riconoscimento di loro equivalenze

Dopo aver valutato la correttezza delle seguenti uguaglianze, esprimi il loro perché.

$2(2k+2)=4k+4$; $3(2k+1)^2=12(k^2+k)+3$;

$(2h)^2-1=4h^2-1$ $((2h+1)+2)+1=(2h+1)+2$

Riconosci, tra le seguenti espressioni, quelle equivalenti ad 8k. Esprimi il perché di tali equivalenze:

$2 \cdot 4k$ $4 \cdot 2k$ $6+2k$ $(5+3)k$.

Riconosci, tra le seguenti espressioni, quelle equivalenti a 2k+3. Esprimi il perché di tali equivalenze:

$2(k+1)+2$ $(2k+2)+1$ $2(k+2)-1$.

Determina per quali valori di k (numero naturale qualsiasi) sono soddisfatte le seguenti condizioni:

k+3 è multiplo di 3,	k+3 è pari
k+3 è dispari ;	k+3 è multiplo di 4
3k è pari	k^3 è dispari
3k è multiplo di 6	k^3 è divisibile per 8
3k è dispari	k^3 è multiplo di 4

Rappresenta algebricamente tali valori in modo da provare la tua conclusione.

Individua e rappresenta espressioni algebriche equivalenti alle seguenti espressioni. Esprimi tale equivalenza mediante il linguaggio verbale.

$4k+2$; $4k^2+2k$; $6k+3$

Attività 3

Esempi di esplorazioni numeriche

Considera un numero naturale. Determina la differenza tra il suo quadrato e quello del suo precedente. Che regolarità osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi?

Considera un numero naturale. Determina la somma tra esso ed i due numeri naturali successivi. Cosa osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi? Secondo te è possibile generalizzare questa congettura?

Cosa puoi dire della differenza tra il cubo di un numero naturale ed il numero stesso? Fai qualche esempio numerico per aiutarti nella congettura richiesta. Sapresti dimostrare quanto affermi?

Scrivi un numero naturale di due cifre ed il numero che ottieni da questo invertendo le cifre. Calcola la differenza tra il maggiore ed il minore. Ripeti il procedimento a partire da altri numeri di due cifre. Che regolarità puoi osservare? Sapresti dimostrare quanto affermi?

Attività 4.

Analisi di strategie dimostrative

• In relazione ad una certa proprietà numerica si propongono come 'dimostrazioni' da vagliare:

• una serie di verifiche numeriche della proprietà indicata

• una argomentazione verbale corretta su un caso prototipo

• una 'dimostrazione' algebrica della proprietà con errori sintattici seguita da esempi numerici di conferma

• una dimostrazione algebrica corretta

• Attività 5

Costruzione di dimostrazioni di teoremi

Esempi di teoremi da dimostrare

Dimostra che la somma di due numeri dispari consecutivi è uguale al doppio del numero pari compreso tra essi.

Dimostra che la somma di un numero naturale, del suo doppio, del suo triplo e del suo quadruplo è un numero che ha come cifra delle unità lo zero.

Dimostra che la somma di cinque numeri naturali consecutivi è un multiplo di 5.

Dimostra che se un numero di due cifre è divisibile per 3 la somma delle sue cifre è un multiplo di tre. Prova a generalizzare

Gli aspetti considerati nell'analisi dei protocolli hanno riguardato: la corretta modellizzazione, l'attuazione di trattamenti sintattici intelligenti, il buon coordinamento tra linguaggio verbale ed algebrico, il buon coordinamento tra rappresentazioni aritmetiche ed algebriche. In riferimento ai processi interpretativi si sono osservati: l'attivazione di frame concettuali appropriati, il ricorso e la flessibilità nei cambiamenti di frame, l'attivazione di pensieri anticipatori.
Dalle sperimentazioni, è emerso che gli elementi teorici da noi selezionati come 'lenti' attraverso cui analizzare il

comportamento degli allievi (componenti a), b) , c) sopra esposte) risultano efficaci e che una corretta applicazione e combinazione di tali componenti risulta una condizione necessaria per un appropriato sviluppo di dimostrazioni via linguaggio algebrico. Dai protocolli analizzati e si è evidenziato il ruolo giocato dalle tre componenti considerate e le mutue relazioni tra esse, in particolare la correlazione *tra mancanza di flessibilità nel coordinamento di diversi frames*, difficoltà nell'eseguire conversioni da linguaggio verbale ad algebrico *ed assenza di giochi interpretativi* nell'analisi delle espressioni prodotte e la *stretta interrelazione tra assenza di pensieri anticipatori* e *fallimenti nell'attivazione di frames* e *nelle successive interpretazioni* delle espressioni prodotte. Si sono inoltre delineate quattro categorie di produzioni-prototipo, distinte a seconda dei blocchi messi in luce e delle diverse modalità di attivazione delle componenti chiave (Cusi e Malara 2008).

In relazione all'azione dell'insegnante nel porsi come guida e modello di comportamento per gli allievi, il lavoro ha consentito di:

- identificare le relazioni tra approccio adottato dall'insegnante durante le discussioni di classe ed approccio proposto dagli studenti durante il lavoro a piccoli gruppi, in particolare evidenziando come la scelta, da parte degli allievi di riproporre un approccio simile a quello visto in classe sia associata alla consapevolezza del senso dell'approccio stesso;
- confrontare gli approcci adottati da diversi docenti e mettere in luce come scelte inopportune possono condurre ad una mancata acquisizione di competenze e consapevolezze da parte degli allievi;
- delineare un primo profilo di insegnante che si pone come modello di azioni efficaci per la costruzione di dimostrazioni via linguaggio algebrico.

Globalmente, il lavoro di analisi storica delle produzioni individuali di alcuni allievi, dei loro interventi durante i momenti di discussione e delle loro riflessioni a posteriori ha consentito di:

- mettere in luce i cambiamenti positivi e l'evoluzione degli allievi verso l'acquisizione delle competenze necessarie allo sviluppo di un symbol sense;
- evidenziare l'acquisizione di nuove consapevolezze nei confronti del ruolo del linguaggio algebrico, anche da parte di studenti molto fragili, che non hanno una altrettanto solida acquisizione delle competenze associate al percorso didattico.

Brevi riflessioni conclusive

Abbiamo visto che nell'approccio alla dimostrazione l'insegnante dovrà porsi come modello mostrando agli allievi, in varie situazioni, come tradurre le ipotesi in linguaggio algebrico; trasformare una scrittura in più modi aprendo il campo a sue diverse interpretazioni e mostrando in vivo come attivare cambiamenti di frame e pensieri anticipatori; interpretare formule ottenute per elaborazione sintattica e selezionare quelle utili ai fini della tesi e mettendo in atto processi di 'apprendistato cognitivo' (Collins & Altri 1991).

Nei nostri studi è ampiamente documentato come - anche insegnanti motivati e convinti della valenza di questo tipo d'attività - nella pratica didattica ricadono in atteggiamenti trasmissivi che bloccano lo sviluppo negli allievi di atteggiamenti idonei alla produzione di pensiero via linguaggio algebrico.

In riferimento all'approccio alla dimostrazione Cusi (2009) dall'anali delle azioni degli insegnanti nei processi didattici espone i caratteri costitutivi del profilo di un insegnante che si pone adeguatamente nella classe riuscendo ad attivare negli studenti atteggiamenti efficaci e funzionali allo sviluppo di competenze dimostrative via linguaggio algebrico. Tali caratteri sono evidenziati, per contrapposizione, nella seguente tabella riassuntiva.

Profili di insegnanti a confronto	
insegnante consapevole ed adeguato alla attivazione di atteggiamenti efficaci negli allievi	**insegnante non consapevole dei suoi comportamenti e delle implicazioni su quelli degli allievi**
Si pone da “*soggetto che indaga*”, stimolando un atteggiamento di ricerca negli allievi.	Non stimola un adeguato atteggiamento di indagine.
Si pone come *partecipante*, elemento costituente del gruppo classe.	I suoi studenti si pongono quasi come spettatori passivi.
Si pone da *guida operativa/strategica*, proponendosi mediante un atteggiamento di condivisione.	Si limita a svolgere il ruolo di “suggeritore”.
Si pone da *guida riflessiva*, esplicitando e stimolando riflessioni sugli approcci adottati e portando la classe ad individuare	Trascura quasi completamente la dimensione meta.

modelli operativi/strategici efficaci.	
Stimola e provoca (1) La costruzione delle competenze relative agli ambiti del saper tradurre, anticipare, manipolare, interpretare, assumendo il ruolo di *"Attivatore" di processi interpretativi*; *"Attivatore" di pensieri anticipatori*. (2) Atteggiamenti meta, assumendo il ruolo di *"Attivatore" di atteggiamenti riflessivi e di atti metacognitivi*	Non sa guidare in maniera efficace i processi interpretativi che tenta di stimolare. Non sottolinea il senso delle trasformazioni che suggerisce. Attiva, inconsapevolmente, un approccio cieco ai problemi dimostrativi.
Realizza un armonico equilibrio tra aspetti semantici e sintattici.	Non attiva connessioni tra aspetti semantici e sintattici, a scapito della conquista dei significati.

Tutto questo ci riporta al problema della formazione degli insegnanti sul versante della azione di classe.

A nostro avviso occorre urgentemente investire sul versante della formazione e su più piani. Quanto alle attività di tirocinio andrebbero attentamente strutturate e guidate, centrando l’attenzione non solo sulla osservazione degli allievi ma sulle interazioni insegnante-allievi, affiancando le stesse da raffinate pratiche di riflessione critica dei processi di classe per l’osservazione di sé (Malara 2008). Questi bisogni e la vastità e portata degli interventi necessari risultano drammaticamente chiari a tutti coloro che, come la scrivente, da anni si occupano di formazione degli insegnanti, sia iniziale che in servizio. L’attuale preoccupante situazione, non lascia ben sperare.

Riferimenti bibliografici

Alcock, L. J. & Weber, K.: 2005, Referential and syntactic approaches to proof: Case studies from a transition course, In *Proc. PME 29*, vol. 2, 33-40.

Arcavi, A.: 1994, ‘Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics’, *For the Learning of Mathematics* 14(3), 24–35.

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G.: 2001, ‘A model for analyzing algebraic thinking’, in Sutherland R. & Al. (Eds), *Perspectives on School Algebra*, 61-81. Kluwer (Netherlands)

Barnard, T. e Tall, D.: 1997, Cognitive units, Connections and Mathematical Proof. *Proc. PME 21*, vol.2, 41-48.

Bell A., 1976, A study of pupils' proof explanations, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 7, 23-40

Bell, A.W., Onslow, B., Pratt, K, Purdy, D., & Swan, M.B.: 1985, *Diagnostic Teaching: Teaching from long term learning*, Report of ESRC project 8491/1, Schell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham

Boero, P.: 2001, 'Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving', in R. Sutherland & Al. (Eds), Perspectives on School Algebra, pp. 99-119. Kluwer (Netherlands).

Boero, P., Douek, N. e Ferrari, P. L.: 2002, Developing mastery of natural language: approaches to theoretical aspects of mathematics. In English, L. D. (a cura di), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 241-268. LEA Publishers. Mahwah (NJ)

Collins, A.; Brown, J.S.; Holum, A. (1991). Cognitive apprenticeship: making thinking visible. *American Educator* 6(11), pp. 38-46.

Cusi, A: 2008a, *Il ruolo del linguaggio algebrico nell'approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico: competenze/ consapevolezze dell'allievo ed azione dell'insegnante*, tesi di dottorato Università di Modena & Reggio Emilia

Cusi, A.: 2008b, An approach to proof in elementary number theory focused on representation and interpretation aspects: the teacher's role. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research*, (pp. 107-122) Rzeszów University Press.

Cusi, A.: 2009, Il linguaggio algebrico come strumento per dimostrare: l'interazione insegnante-allievo per uno sviluppo di nuove consapevolezze. Su questi atti

Cusi, A., Malara, N.A.: 2007, proof of statements in elementary number theory: analysis of trainee teachers productions, in Pitta Pantazi, D. & Philippou, G. (a cura di) *Proc. CERME 5*, CD-Room, Larnaka, Cipro, febbraio 2007, 591-600

Cusi, A. and Malara, N. A.: 2008, Future teachers facing proof problems: games of interpretation, anticipating thought and coordination between verbal and algebraic register. *Proc. 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics* (Canea, Creta, aprile 2008) in versione italiana più ampia su

L'educazione Matematica, anno XXIX, serie VIII, vol. 4(2), 7-23.

Davis, P.J., Hersh, R.,: 1981, The Mathematical Experience, Birkhäuser, Boston,(tr. it. *L'e sperienza matematica* , ed. La Comunità, Milano, 1985)

Duval R., 2000, Basic Issues for Research in Mathematics Education*, proc. PME 24*, vol.1, 55-69

Duval, R.: 2006, A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 61, 103–131.

Furinghetti, F. e Paola, D. (1997). Shadows on proof. *Proc PME 21*, vol.2, 273-280

Hanna, G.: 1995, Challenges to the importance of proof, *For the Learning of Mathematics*, vol. 15, n. 3

Hanna, G, de Villiers, M.: 2008, Proof and prooving in matehmatics education, documento di discussione per 19° ICMI Study, *ZDM*, **40** (2)

Healy, L. e Hoyles, C.: 2000, A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(4), 396–428.

Kieran, K. 1996, The changing face of school algebra, in Alsina C. *et al.* (eds), *8th International Congress on Mathematics Education: selected lectures*, Siviglia: S.A.E.M. Thales, 271-290

Lee, L. e Wheeler, D.: 1989, The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics* 20 (1), 41-54.

Lolli, G.: 2006, '*I turbamenti dell'uguale'* 'Se viceversa', *Polymath (*http://www2.polito.it/didattica/polimath/)

Lolli, G.: 2005, *QED. Fenomenologia della Dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino

Malara N.A,. 2002a, Commportamenti di futuri insegnanti di fronte a problemi dimostrativi in ambito aritmetico *L'Educazione Matematica,* 2002, anno XXIII, serie VI, vol. 4, n. 1, 38-52

Malara N.A,. 2002b, La dimostrazione in ambito aritmetico, quale spazio nella scuola secondaria?, in Malara N.A (a cura di): 2002, *Educazione Matematica e Sviluppo Sociale: esperienze nel mondo e prospettive,* Rubettino editore, Cosenza, 129-166

Neria, D. e Amit, M.: 2004, Students preference of non-algebraic representations in mathematical communication. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3 (pp. 409-416).

Russo, L.,: 2000, Scienza e tradizioni culturali, relazione al Convegno "*Perché l'antico*", Firenze

Sadovsky P. 1999, Arithmetic and algebraic practices: possible bridge between them, *proc. PME 23,* vol. 4, 145-152

Vailati, G.: 1904, Il testo di F. Enriques e U. Amaldi "Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori" in Quaranta M. (a cura di), 1987, *Giovanni Vailati Scritti,* vol. 3, Forni Editore, Bologna, 267-273