

# Il concetto di funzione: aspetti epistemologici e didattici

Nicolina A. Malara

*Dipartimento di Matematica – Università di Modena & Reggio Emilia*

**Abstract.** *We recall the main steps of the historical process which brought to the modern concept of function. We face some didactical questions related to its learning, such as: the question of the control of its different conceptions appeared over the years; the limits of the persistence of an old language; the conflict between definitions and images of a concept; the question of the coordination among different registers of representations. We then indicate the new trends in its teaching and present some results concerning an innovative path, experimented at compulsory school level, aimed at exploring binary relationships between variables and at studying simultaneously the pair <function, inverse function> in the case of 1-1 correspondence.*

## 1. Richiami storici sul concetto di funzione

La costituzione del concetto di funzione nella sua moderna accezione investe molti secoli. Le prime definizioni di funzione appaiono tra la fine del XVII e l'inizio del XVIII secolo e sono originate dalle esplorazioni di curve. Queste curve inizialmente vengono descritte da proporzioni tra segmenti ausiliari nell'ambito di specifici problemi (come documentato in Fermat, Descartes, Newton, Leibnitz) ma non sono riguardate come grafici rappresentanti relazioni tra questi segmenti, al contrario sono considerate per quello che appaiono: oggetti geometrici o traiettorie di punti in movimento. Nel corso della soluzione dei problemi, le proporzioni usate vengono a perdere il loro significato e diventano pure espressioni algebriche su cui sono eseguite operazioni formali. Questo progressivo abbandono dei significati viene a determinare la visione di funzione come *espressione analitica*.

Una prima definizione degna di nota è quella data da J. Bernoulli (1718):

*Una funzione di una quantità variabile è una quantità composta in un modo qualsiasi con questa variabile e con quantità costanti*

È una definizione 'colta', per specialisti, che mette in risalto l'arbitrarietà della composizione delle operazioni tra variabili e costanti. È interessante confrontare tale definizione con quella data trenta anni più tardi da Eulero (1748):<sup>1</sup>

*Una funzione di una quantità variabile è una espressione analitica composta in modo qualsiasi da questa quantità e da numeri o costanti*

---

<sup>1</sup> L. Eulero, 1748, *Introductio in analysis infinitorum*.

Si vede come, mentre per Bernoulli una funzione è *una quantità* (variabile) risultante da un qualsivoglia processo su una data variabile, con Eulero avviene lo spostamento *dal risultato al processo* e la reificazione di quest'ultimo in termini di 'espressione analitica'. Questa definizione tuttavia rimarca la rappresentazione di una variabile mediante il processo agente su di un'altra, per ciò stesso detta funzione di questa.

È interessante riflettere sulla modernità della definizione di variabile di Eulero:

*una quantità variabile è una quantità indeterminata o una quantità universale, che include tutti i valori determinati*

anche se c'è da notare che per lui i valori assunti da una variabile possono essere di natura numerica qualsiasi (dal numero naturale al numero complesso).

Il XVIII secolo e la prima metà del XIX secolo vedono svariati studi e dibattiti che portano a superare la concezione operativa e procedurale di funzione. Ricordiamo: la famosa polemica tra Eulero, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Clairaut, sul problema delle corde vibranti; lo sviluppo della teoria delle serie trigonometriche di Fourier; la nozione di funzione continua (Chauchy, Dirichlet, Abel, Bolzano, Weierstrass, ...). Queste questioni producono, grazie al contributo di diversi studiosi, tra i quali Lacroix, Condorcet, Fourier, ad un'estensione della definizione di Eulero, con l'abbandono dell'idea che debba essere necessariamente una espressione analitica o più in generale una formula ad esprimere il legame tra le due variabili in gioco, separando la visione di funzione dalla continuità di cui essa è fino allora intrisa. Si giunge così alla definizione di Dirichlet (1837):<sup>2</sup>

*Se una variabile  $y$  è collegata ad una variabile  $x$  in modo che qualsiasi sia il valore numerico assegnato a  $x$  c'è una legge secondo cui risulta determinato un unico valore di  $y$ , allora si dice che  $y$  è funzione della variabile indipendente  $x$ .*

Questa definizione porta al superamento della visione di funzione come processo di calcolo a vantaggio di una visione relazionale più ampia e viene ad inglobare funzioni molto strane, quali funzioni continue e non ovunque derivabili o funzioni che non possono essere rappresentate da una curva disegnata a mano libera.

La definizione di Dirichlet viene accettata ed ampiamente usata fine alla metà del XX secolo. Tuttavia essa provoca anche accese discussioni nei circoli fondazionisti già dalla fine del XIX secolo. Studiosi di varie scuole (intuizionisti, logicisti e formalisti) sono contrari ad essa anche se per ragioni

---

<sup>2</sup> È riconosciuto dagli storici che Lobachevskii (1934) anticipò Dirichlet nel presentare una funzione come corrispondenza univoca arbitraria tra (insiemi di) numeri, tuttavia essi non concordano circa la primogenitura da attribuire a Lobachevskii poiché nella concezione di quest'ultimo la continuità è ancora qualcosa di intrinseco alla funzione stessa (si veda Medvedev, 1991, p. 55 e seguenti).

diverse, i primi vogliono una legge che permetta di trovare il corrispondente  $y$  di un dato  $x$  in un tempo finito o in un numero finito di passi; gli altri considerano la definizione non sufficientemente rigorosa. L'idea perciò di ricondurre la definizione di funzione ad una nozione primitiva 'nuova' (rispetto alla aritmetica) diviene inevitabile.

Con la nascita della teoria degli insiemi, il concetto di funzione si estende ad oggetti non necessariamente numeri. In particolare, si deve a Dedekind (1887), grazie anche ai suoi studi in ambito algebrico, la concezione di *funzione come trasformazione agente su un insieme astratto* nonché l'introduzione di simbologia e nomenclatura utilizzata tutt'oggi.

Dedekind scrive (citazione tratta da Medvedev, p. 67):

*Per trasformazione  $\varphi$  di un sistema  $S$  intendiamo una legge attraverso cui per ciascun definito elemento  $s$  di un sistema si determina un cosa completamente definita detta immagine di  $s$  e denotata dal simbolo  $\varphi(s)$ ; la stessa situazione può essere espressa in vari modi:  $\varphi(s)$  corrisponde all'elemento  $s$ , o  $\varphi(s)$  si ottiene da  $s$  per mezzo della trasformazione  $\varphi$ , oppure  $s$  va in  $\varphi(s)$  per mezzo della trasformazione  $\varphi$ .<sup>3</sup>*

A Schroeder (1895) risale l'idea di *funzione come relazione*, Russell invece riconduce tale definizione al concetto di proposizione o di funzione proposizionale in una o più variabili (da lui assunto come primitivo) definendo 'relazione' una funzione proposizionale a due variabili e definendo 'funzione' una relazione univoca.

Peano (1911), in sintonia con la teoria delle relazioni di Russell, Whitehead (1910), riduce il concetto di funzione a quella di relazione, considera la nozione di 'relazione univoca' ma riconduce il concetto di relazione a quello di *coppia ordinata*, da lui assunto come primitivo.

Con lo sviluppo della teoria assiomatica degli insiemi, vengono date varie definizioni di coppia ordinata da: Hausdorff (1914):  $(a,b) = \{\{a,1\}, \{b,2\}\}$ ; Wiener (1914):  $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$ ; Kuratowski (1921)  $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ , secondo visioni via via più raffinate dal punto di vista logico e di economia di pensiero.

Una nuova formulazione nella più generale veste di applicazione nasce nell'ambito del gruppo Bourbakista (1939), formulazione che successivamente si consolida nella accezione di terna:

*una applicazione è una terna  $(X,Y,F)$  di insiemi dove  $F$  è un sottoinsieme di  $X \times Y$  soddisfacente le seguenti condizioni:*

*1)  $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in F$ ; 2)  $[(x, y) \in F, (x, y') \in F] \rightarrow y = y'$*

In quest'ultima definizione spariscono 'tempo e azione' così come il concetto intuitivo di 'legge di corrispondenza', inoltre gli elementi degli insiemi non sono più necessariamente numeri ma sono oggetti di natura qualsiasi. Essa viene a coinvolgere nuovi concetti matematici quali: il dominio, il codominio

---

<sup>3</sup> Dedekind usa il termine 'sistema' come sinonimo di 'insieme'.

di una funzione; l'iniettività e suriettività di una funzione, la composizione di funzioni, le condizioni di invertibilità di una funzione, la struttura dell'insieme delle funzioni biunivoche su un campo. La funzione si viene inoltre a caratterizzare come oggetto di studio nella moderna didattica dell'algebra.

## **2. Concezioni e difficoltà di apprendimento del concetto di funzione**

Il concetto moderno di funzione viene introdotto nell'insegnamento secondario negli anni 60, nel periodo della riforma verso la 'new math' (o 'matematica moderna'). La nuova definizione si sovrappone sulle precedenti, e genera numerose e delicate questioni didattiche circa il coordinamento tra il vecchio concetto (procedurale e dinamico) ed il nuovo concetto (relazionale e statico). Inoltre, il bisogno di distinguere tra il concetto, nelle sue accezioni differenti, e le sue rappresentazioni, la necessità di coordinare tipi diversi di rappresentazioni (tabelle, frasi verbali, formule algebriche, insiemi e frecce, grafici cartesiani, grafici su linee parallele, insiemi di coppie ordinate) e le notazioni associate pone altri importanti questioni didattiche e amplifica le difficoltà degli studenti.

Numerosi sono gli studi dedicati alle difficoltà d'apprendimento del concetto di funzione, ci limitiamo qui a richiamarne alcuni classici, rilevanti per la didattica.

Un primo importante studio è quello di A. Sierpiska (1988), riguardante lo studio di concezioni e difficoltà di apprendimento circa la funzione in studenti di 15-17 anni. La studiosa classifica le concezioni emerse distinguendole in concrete ed astratte, intendendo per concrete quelle legate alla visione di curve generate attraverso costruzioni geometrico-meccaniche o legate ad equazioni algebriche esprimenti luoghi di punti; mentre per concezioni astratte intende quelle in cui le funzioni sono viste come leggi trasformazionali o di corrispondenza funzionale tra variabili (concezioni a loro volta distinte in algebriche, analitico-geometriche o fisiche, a seconda della visione dominante negli allievi). Sottolinea che tali concezioni trovano riscontro nella storia stessa del concetto di funzione e sostiene che nell'insegnamento tali tappe devono essere esperite e discusse dagli studenti prima che essi affrontino la nozione moderna.

Un'analoga posizione si ritrova in A. Sfard (1992) che sostiene che gli studenti devono venire a conoscenza dell'evoluzione storica del concetto per poter comprendere la portata della definizione moderna. La studiosa considera il concetto di funzione come esempio paradigmatico della sua visione dello sviluppo della matematica: una continua iterazione di trasformazioni *processo-oggetto* a diversi livelli di complessità.

Importanti per comprendere la genesi di molte difficoltà degli studenti sono gli studi di Tall, Vinner (1981) e Vinner (1983, 1992) su 'concetti per definizione' e 'concetti per immagine' nel caso della funzione. Gli autori sostengono che in matematica le definizioni sono verbali, basate su concetti

primitivi o nozioni precedenti e non sono mai circolari e che un concetto si acquisisce a partire dalla definizione attraverso il formarsi di appropriate immagini. Sottolineano che quando si introduce una nozione (non solo per definizione ma anche intuitivamente), la mente di una persona reagisce ad essa evocando varie associazioni che vengono a costituire l'immagine del concetto. Sostengono che apprendere un concetto vuol dire: avere l'abilità di identificare e di costruire esempi del concetto; divenire consapevoli delle proprietà tipiche del concetto; conoscere i modi comuni per denotare o rappresentare il concetto. Rimarcano che il concetto immagine è modellato dalla comune esperienza, dagli esempi tipici, da classi di prototipi etc, cosa che spesso genera la fissità del concetto, di conseguenza se il concetto immagine di funzione che una persona ha è costituito solo da rette, parabole, o grafici continui, allora la persona può a buon diritto pensare che il grafico di una funzione non possa presentare salti.

A questo riguardo Bakar, Tall (1991) evidenziano come nei prototipi mentali di studenti di scuola secondaria e università vi siano concezioni errate per funzioni e grafici. Molti di tali studenti, in relazione a grafici quali una retta parallela all'asse  $x$ , un arco di circonferenza nel primo quadrante con centro nell'origine o una funzione poligonale dicono che non sono grafici di funzioni, mentre sostengono che una circonferenza con centro nell'origine degli assi o una parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse  $x$  lo siano.

Ancora, Knut (2000) mette in luce come diversi studenti mancano della cosiddetta *connessione cartesiana*, ossia non coordinano rappresentazioni algebriche e grafiche nella doppia direzione, non riconoscono cioè che un punto è sul grafico cartesiano di una curva  $\Gamma$  se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione di  $\Gamma$ . Addirittura matricole universitarie non riconoscono che le coordinate di un punto di una retta nel piano cartesiano costituiscono una soluzione per la sua equazione.

### **3. Nodi epistemologici e questioni linguistiche relativi al concetto di funzione**

Ci soffermiamo su alcuni studi che mettono in luce la questione della sovrapposizione nel tempo delle diverse concezioni di funzione; l'ambiguità di costrutti linguistici usati nel passato; la questione del raccordo di rappresentazioni diverse di una stessa cosa e viceversa e l'identificazione impropria di notazioni aventi diverso significato.

Iniziamo con il considerare quanto indicato da Grugnetti (1994), citando Batshelet (1971), circa il passaggio dalla concezione classica a quella moderna di funzione, frasi quali: “ $y$  è funzione di  $x$ ”, “la funzione varia tra 0 and 1” nell'accezione moderna non sono più formalmente corrette: un insieme di coppie non può avere valore numerico né variare.

Una questione importante riguarda l'interpretazione della scrittura  $y=f(x)$  come espressione predicativa (non necessariamente calcolativa). La ‘legge’ è

una ‘sentenza aperta a due posti’, la sua caratterizzazione come funzione dipende dall’insieme prodotto cartesiano dove viene interpretata. Quando scriviamo  $y=2x+1$  dobbiamo pensare all’insieme verità di questo predicato in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Questo insieme verità è rappresentato dal grafico nel piano cartesiano. Ma la stessa formula caratterizza un altro insieme verità quando si interpreta in un altro insieme prodotto cartesiano, per esempio  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Grugnetti (1994) sottolinea il fatto che le questioni connesse alle notazioni usate a scuola non deve essere sottovalutato. Sostiene che in una prospettiva didattica, la notazione  $y=f(x)$  riflette la tendenza classica di considerare “f” come il simbolo operativo di una procedura che applicata ad  $x$  dà luogo ad  $y$  e che quando questa notazione è usata, il rischio per gli studenti è di identificare formule e funzioni senza concettualizzare che non tutte le funzioni sono rappresentabili mediante una formula.

Hershowitz et al. (1987) si soffermano sulla questione del dominio nel caso di funzioni reali di variabile reale. Ricordano che a scuola la maggioranza delle funzioni sono solo leggi espresse da formule. Generalmente si assegnano semplici formule predicative senza indicare dominio e codominio, e senza far rilevare la mutabilità delle proprietà delle funzioni al variare di uno di questi (iniettività, invertibilità etc). Nell’attività pratica l’attenzione degli studenti si focalizza sulla formula e così c’è il rischio che questi vengano ad identificare la funzione alla formula senza comprendere di dover assegnare dominio e codominio per avere la funzione. Classiche concezioni improprie degli studenti dipendono da questa mancanza di attenzione su dominio e codominio. Per esempio, gli studenti concepiscono  $1/x$  come la derivata di  $\ln x$  e  $\arcsen x$  come l’inversa di  $\sin x$  o considerano uguali funzioni quali radice cubica di  $x$  ed  $x$  elevato ad  $1/3$ .

Un altro problema didattico è rappresentato dal coordinamento di differenti rappresentazioni simboliche di uno stesso oggetto. Un semplice esempio è costituito dalla funzione identica su  $\mathbb{R}$ . Essa si può rappresentare mediante gli operatori aritmetici: ‘+ 0’ and ‘ $\times 1$ ’; algebricamente, dall’equazione  $y = x$ ; geometricamente dalla bisettrice del primo e terzo quadrante nel piano cartesiano; con la moderna notazione sagittale:  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $i(x) = x$ ; con l’insieme  $\Delta = \{(x, x): x \in \mathbb{R}\}$ . Non è affatto facile per uno studente identificare tutte queste rappresentazioni superando il loro senso specifico.

Marchini (1998) in un interessante articolo discute questioni logiche e sintattiche legate alle notazioni. Lo studioso richiama il fatto che il linguaggio simbolico richiede un attento controllo dei significati delle scritture, osserva come la scrittura  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $f = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  sia una notazione statica che rappresenta la funzione in modo *attuale* mentre la scrittura  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \rightarrow 2n$  è una notazione dinamica che assegna la funzione in modo *potenziale*. Ancora rileva che scrittura  $f: n \rightarrow 2n$  incorpora e nasconde il quantificatore universale. Fa poi presente che le funzioni rappresentate da: (1)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $f = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  e (2)  $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ ,  $f = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  risultano uguali se si

considera  $N \subset Z$  e le funzioni come un insieme di coppie ordinate; risultano invece diverse se si considera la funzione come una terna, poiché i codomini sono differenti. Rileva inoltre come a seconda del punto di vista in cui ci si collochi, una stessa cosa assuma significati differenti. Come esempio di ciò rileva l'eguaglianza tra le forme  $x+1$  e  $(x^2-1)/(x-1)$  nel campo  $R(x)$  dei quozienti dei polinomi di  $R[x]$ , perché sintatticamente equivalenti; e la diversità delle funzioni reali rappresentate da ciascuna di esse,  $y = x+1$  ed  $y = (x^2-1)/(x-1)$ , perché aventi domini differenti. Si sofferma poi su la scrittura  $y = f(x)$  riflettendo sul significato del segno uguale. Sottolinea che esso non rappresenta una uguaglianza, poiché dalle formule  $y=f(x)$ ;  $y=g(x)$  non si trae la formula  $f(x)=g(x)$ , ma rappresenta un'assegnazione:  $y$  è 'data da...'; il cui uso viene dalla storia e che evidenzia come le funzioni abbiano origine dalle equazioni. Per approfondimenti su questi ed altri aspetti si veda Marchini (2002).

Le questioni da noi rilevate nei paragrafi precedenti mostrano quanto sia importante che l'insegnante abbia una buona conoscenza di tipo storico-epistemologico e ne controlli le implicazioni sul piano dell'insegnamento.

#### **4. Attuali indirizzi di insegnamento circa il concetto di funzione**

È oggi ampiamente riconosciuto, data la complessità del concetto di funzione, che il suo approccio debba essere effettuato sin dai primi anni di scuola, in modo graduale e pervasivo, guidando gli allievi lungo le varie tappe di evoluzione del concetto, ma attraverso *attività realistiche*. In Italia i programmi sono in sintonia con questa visione. Per la scuola dell'obbligo, in particolare per la media, contemplan lo studio di relazioni (dirette ed inverse) ed enfatizzano un approccio alle funzioni come strumento di modellizzazione di semplici fenomeni fisici. In questa prospettiva viene a prevalere una visione della funzione come legge di corrispondenza tra grandezze, sensibile di una rappresentazione algebrica e cartesiana. Questa visione, più vicina alla concezione classica, viene poi ampliata nella scuola secondaria superiore, dove viene proposta la definizione moderna di relazione, ossia di sottoinsieme di un prodotto cartesiano, e la funzione viene vista come un particolare sottoinsieme di coppie di un prodotto cartesiano, rappresentabile sul piano cartesiano da un grafico non necessariamente continuo.

Nella didattica corrente tuttavia, il raccordo tra i concetti di relazione e funzione è di solito trascurato, non si opera sul raccordo tra le loro diverse rappresentazioni, né si promuove una visione congiunta della coppia funzione-funzione inversa, in coerenza con quanto avviene per le relazioni. Per il superamento di questo salto, in sintonia con quanto proposto in ambito internazionale (si veda ad esempio Harper, 1987), è nostra convinzione che occorra affrontare la didattica delle funzioni sin dalla scuola dell'obbligo, attraverso l'esplorazione di situazioni coinvolgenti più variabili, individuando relazioni binarie relative a coppie di variabili diverse, attivando

rappresentazioni in registri diversi e coordinandoli tra loro. Riteniamo inoltre importante sin dall'inizio dare spazio allo studio di funzioni invertibili puntando ad una visione paritetica della coppia funzione-funzione inversa e curando il coordinamento delle sue rappresentazioni in vari registri.

In quest'ottica, in seno al progetto ArAl, è stato sperimentato un percorso per la scuola media che ha dato luogo all'unità U9: *Verso le Funzioni* (Fiorini et al., 2006). Si tratta di un percorso finalizzato a portare i ragazzi a comprendere che una relazione funzionale può essere descritta in modi diversi a seconda del soggetto che si assume; che le rappresentazioni verbali si prestano ad essere espresse in formule (non necessariamente uniche) introducendo opportunamente lettere e simboli per indicare termini e operazioni coinvolti; che per ogni scelta del soggetto la relazione è oggettivata da un diverso insieme di coppie; che lo scambio del soggetto nel registro algebrico porta alla formula inversa di quella data, che nella rappresentazione cartesiana si ha invece la rinominazione degli assi e lo scambio delle componenti delle coppie. Particolare cura è data alla interpretazione degli elementi rappresentativi di soggetto, predicato, complemento della espressione verbale di una relazione nelle rappresentazioni algebriche e cartesiane, cosa che facilita l'interpretazione della scrittura  $y=f(x)$  in termini predicativi ed evita l'usuale errore di interpretare la variabile  $x$  come soggetto della frase che tale formula sintetizza.

Nelle sperimentazioni effettuate si è rilevato la potenzialità dell'approccio sul versante degli allievi ma anche l'importanza del controllo dell'insegnante di difficoltà insite in problemi di raccordo tra sistemi diversi di rappresentazione (Malara, 2005).

Un'altra importante questione da affrontare riguarda l'educazione alla visione delle successioni in termini di funzioni con dominio  $\mathbb{N}$  e codominio  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{R}$  a seconda dei valori della successione. Attraverso la proposizione dello studio di successioni modellizzabili algebricamente ed affrontando il problema della individuazione della loro rappresentazione in termini generali si forza la visione di una successione come corrispondenza <numero di posto, termine della successione che figura in quel posto> e si svincola la funzione dalle sue rappresentazioni (può accadere che una stessa funzione sia esprimibile algebricamente in più modi, sintatticamente equivalenti).

La fattibilità e l'efficacia dei percorsi didattici indicati è stata testata attraverso svariate tesi SSIS e lunghe sperimentazioni in seno a nostri progetti di ricerca e formazione, si vedano al riguardo i recenti contributi degli insegnanti Cavazzoni, Fantini, Fantini e Lugli, Pelillo in Turnau (2008), realizzati sotto la guida della scrivente, la cui versione italiana è in stampa sulla rivista *L'Educazione Matematica*.

### **Bibliografia**

Bakar M., Tall D. (1991). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *proc PME 14*, 1, 104-111.

- Fiorini R., Marchi S., Nasi R., Stefani P. (2006). U9-Verso le funzioni. Progetto ArAl. Bologna: Pitagora.
- Grugnetti L. (1994). Il concetto di funzione: difficoltà e misconcetti. L'educazione matematica. XV, IV, 1, 173-183.
- Harel G., Dubinsky E. (eds.) (1992). The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy. MAA Notes. vol. 25.
- Harper E. (ed.) (1987). NMP: Mathematics for Secondary School. Logmann, Essex.
- Herschkowitz R., Arcavi A., Eisenberg T. (1987). Geometrical Adventures in Functionland. Mathematics Teacher. 80, 5.
- Iaderosa R. (2003). Grafici e funzioni. Aspetti algebrici, geometrici e di modellizzazione del reale. Bologna: Pitagora.
- Knut E. J. (2000). Students understanding of the cartesian connection: an exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education. 31, 4.
- Malara N.A. (2005). Leading In-Service Teachers to Approach Early Algebra. In: Santos L. (ed.). "Mathematics Education: Paths and Crossroads". Lisbona: Epigrafe. 285-304.
- Marchini C. (1998). Analisi Logica della funzione. In: Gallo E. et al. (eds.), Conferenze e Seminari Associazione Subalpina Mathesis, 1997-1998. 137-157.
- Marchini C. (2002). Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione. Atti SFIDA 18, 27-39.
- Medvedev F. (1991). Scenes from the History of Real Functions. Birkhäuser.
- Sfard A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification- the Case of Function. In: Harel G., Dubinsky E. (eds.). The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy, MAA Notes. 25, 59 -84.
- Sierpiska A. (1988). Epistemological Remarks on Functions. Proc. PME 12, Vespem Hungary. 2, 568-573.
- Tall D., Vinner S. (1981). Concept immane and concept definition with particular reference to limits and continuity. Educational Studies. 12 (2), 151-169.
- Turnau S. (ed.) (2008). Handbook of Mathematics Teaching Improvement. Rzeszów University press, Rzeszów (Polonia).
- Vinner S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology. 14, 293-305.
- Vinner S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in mathematics Learning. In: Harel G., Dubinsky E. (ed.). The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy. MAA Notes, Birkhauser. 25, 195- 214.
- Youshkevitch A.P. (1991). Le concept de fonction jusq'au milieu du XIXe siècle. In: Ovaert J.L., Reisz D. (eds.). Fragments d'histoire des mathematiques, A.P.M.E.P. 41, 4-68.

**Parole chiave:** aspetti epistemologici del concetto di funzione; questioni didattiche nell'insegnamento/ apprendimento del concetto di funzione; definizioni ed immagini del concetto di funzione; coordinamento tra registri di rappresentazione di una funzione; modellizzazione di relazioni funzionali; funzioni invertibili; la coppia funzione-funzione inversa; successioni come funzioni.