

ATTI DEGLI INCONTRI
DI
LOGICA MATEMATICA

VOLUME 5

XII Incontro: Roma, 6-9 aprile 1988

LA LOGICA MATEMATICA
NELLA DIDATTICA

ESTRATTO

Scuola di Specializzazione in Logica Matematica
Dipartimento di Matematica - Università di Siena

IMPLICAZIONE E MODUS PONENS: SINTESI DI UNA ESPERIENZA DIDATTICA REALIZZATA IN UNA SECONDA MEDIA

NICOLINA A. MALARA

Gruppo di Ricerca sulla Educazione Matematica

Dipartimento di Matematica – Università di Modena

1.- INTRODUZIONE

Descriviamo qui le parti salienti di un'esperienza riguardante l'introduzione dell'implicazione e del modus ponens ad allievi di II media. Tale esperienza è stata realizzata in una classe a tempo pieno della Scuola Media di S. Giustina (Belluno) dagli insegnanti Giancarlo Navarra (Scienze M.F.C.N.) e Laura Buzzatti (Lettere) - in circa 10 ore, prevalentemente di compresenza - con la nostra collaborazione. Essa è parte di una più ampia attività di classe sulla analisi e la riflessione del linguaggio naturale che, evidenziando sia ambiguità linguistiche che identità semantiche, punta all'affinamento delle capacità espressive ed argomentative degli allievi (cfr. [1] p.24-28, [2] p.16).

La nostra attenzione si è accentrata sulle proposizioni condizionali in considerazione sia del ruolo che esse svolgono nell'ambito della deduzione, sia in relazione alle ambiguità di cui sono portatrici nella lingua italiana: spesso "se...allora..." si usa per intendere "...se e solo se..." e questo comporta, di frequente, l'errata identificazione di una implicazione con la sua inversa.

La delicatezza e l'importanza dell'argomento è testimoniata da diversi ed accurati studi quali ad esempio [3], [4], [5], [6], [7]. Inoltre oggi, con l'introduzione dell'informatica nella scuola, tale argomento si impone anche per un confronto con l'uso delle istruzioni condizionali nei linguaggi di programmazione (cfr. [2] p.85).

Le attività realizzate di cui parleremo, miravano in particolare a condurre gli allievi a:

- stabilire il valore di verità di una implicazione in funzione di quello delle proposizioni componenti;

=====

Lavoro eseguito con il contributo del MPI (40%) e del CNR contratto n. 87.00982.01.

- comprendere la differenza tra un'implicazione e la sua inversa;
- conoscere e applicare il modus ponens;
- distinguere, a partire da semplici premesse, conclusioni valide o non;
- individuare, in una data situazione, quando le informazioni date non sono sufficienti per certe conclusioni.

A nostro avviso l'esperienza ha dato buoni frutti. Gli allievi, stimolati nella loro curiosità, hanno partecipato con interesse ed hanno contribuito con i loro interventi a valorizzare le attività proposte. In particolare, come sarà chiarito più avanti, fondamentali sono stati certi loro interventi che li hanno portati a distinguere e separare la sensatezza di una implicazione dal suo valore di verità. Globalmente si è riscontrato in essi un miglioramento dell'esposizione verbale e lo sviluppo di un atteggiamento critico nell'analisi delle informazioni.

Per nostra comodità descriviamo l'esperienza separandola in due parti, la prima riguardante l'implicazione e la seconda il modus ponens; concludiamo poi con un accenno ai previsti suoi sviluppi.

2.- L'IMPLICAZIONE

Si è avviata l'attività presentando alla classe, in tempi successivi, delle schede di lavoro (alcune qui riportate, si vedano gli allegati 1, 2) con l'obiettivo di portare gradualmente gli allievi alla scoperta della tavola di verità dell'implicazione.

L'attività proposta richiedeva una riflessione su alcune vignette, felicemente realizzate da G. Navarra. Ci sembra di poter affermare, a differenza di quanto indicato in [8], che l'utilizzo di vignette ha creato delle condizioni ottimali per la comprensione dell'argomento da parte degli allievi, soprattutto di quelli con modeste capacità. I ragazzi, attraverso il lavoro guidato loro proposto, sono giunti a stabilire senza troppe difficoltà il valore di verità di una implicazione in funzione di quello delle sue componenti.

A consolidamento di questa prima attività, come compito a casa, è stato chiesto a ciascun allievo di pensare un'implicazione e, senza menzionarla, di rappresentare mediante vignette i casi possibili in corrispondenza ai diversi valori di verità delle componenti, precisando per ogni vignetta sia i valori di verità di protasi e apodosi sia il valore di verità dell'implicazione. Successivamente, in classe è stato chiesto ad ogni allievo di studiare il disegno di un compagno e di individuare l'implicazione rappresentata.

I disegni eseguiti dai ragazzi e le successive interpretazioni hanno fornito numerosi spunti di discussione e anche quelli che sembravano, ad un certo punto, dei limiti o degli errori si sono rivelati strumenti per una

comprensione piu' approfondita.

Ad esempio molti sono stati i casi in cui i risolutori hanno individuato implicazioni diverse da quelle immaginate dall'autore e questo e' stato occasione di uno degli episodi piu' significativi dell'esperienza, che ha consentito il superamento di uno dei punti piu' delicati nello studio dei connettivi logici in generale e dell'implicazione in particolare. Del disegno di un'allieva, Samanta, sono state date due interpretazioni (presumibilmente dovute al suo errore di rappresentare l'assenza di sole con la pioggia). Una interpretazione era uguale a quella dell'autrice: "se c'e' il sole esce il coniglio a macchie nere" l'altra, completamente diversa, era piu' vicina al senso comune e rivelava un'immagine dell'implicazione come legame di causa-effetto: "se piove il coniglio si bagna" (in questo caso le macchie del coniglio, nel disegno piccoli pois, erano state ritenute gocce di pioggia sul suo pelo).

Nel discutere la versione di Samanta, da lei accanitamente difesa, ad un certo momento e' apparso chiaro a tutti, anche ai suoi critici - che pretendevano un collegamento tra significato di una implicazione e suo valore di verita' -, che e' legittimo parlare di valore di verita' di un'implicazione anche nel caso in cui le sue componenti non siano collegate nel significato.

A questo punto abbiamo proposto agli insegnanti di:

- effettuare con gli allievi una riflessione sui diversi modi di esprimere una implicazione nella lingua italiana (si vedano gli allegati 3 e 4),
- esaminare un uso diverso della congiunzione "se" (si veda l'allegato 5),
- fare rilevare come spesso il "se" si usi nella lingua italiana al posto di "solamente se" (cfr. [9], p.25) discutendo assieme sul significato di frasi quali "se sarai promosso ti faro' fare un viaggio in premio".

Successivamente si e' passati al confronto tra implicazione e sua inversa. A questo riguardo molto stimolanti per la classe sono state le letture di tre brani (rispettivamente tratti da: [10] p.97, [11] p.95, [12] pp.2-3) il cui commento ha prodotto negli allievi una profonda consapevolezza della netta distinzione tra le due proposizioni.

Durante questa prima attivita', tuttavia, non e' scaturito alcuno spunto che potesse essere utilizzato per avviare lo studio delle contronominati. Questo argomento e' stato introdotto confrontando i significati di alcune proposizioni assieme a quello delle rispettive contronominati e poi verificando, in generale, l'equiveridicita' di $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$ mediante le tavole di verita'.

3.- IL MODUS PONENS

I primi approcci al modus ponens si sono effettuati, via via, durante le discussioni in classe: piu' volte e' stato fatto notare agli allievi che la verita' di una implicazione e la verita' della protasi comportano necessariamente la verita' della apodosi, mentre la verita' dell'implicazione e della sola apodosi non consentono di dire nulla circa la verita' della protasi. Il riscontro di questo sulla tavola di verita' ne ha facilitato la comprensione soprattutto negli allievi meno brillanti.

Il modus ponens come schema di ragionamento e' stato introdotto con l'ausilio di vignette opportunamente predisposte (si veda l'allegato 6) e, grazie al lavoro precedente esso e' stato recepito senza grosse difficolta'.

Per verificare quanto i concetti trattati fossero stati interiorizzati dagli allievi si e' pensato di costruire delle prove che richiedessero l'applicazione delle conoscenze acquisite in contesti diversi, non formali e, eventualmente "di distrazione". Gli insegnanti allora, rivelando notevoli doti di fantasia e creativita', hanno scritto alcuni piccoli racconti ad hoc. Il compito degli allievi era quello di leggere ed analizzare le storie e di stabilire la legittimita' delle conclusioni tratte da qualche personaggio sulla base dei fatti esposti. Qui, per dare un'idea del tipo di prove elaborate, ne presentiamo alcune (si vedano gli allegati 7, 8 e 9).

Inizialmente i risultati di questa attivita' sono stati modesti. In particolare, in accordo con B. Dumont (cfr. [7]) si e' riscontrato che "l'abbigliamento" del problema a volte ne ha condizionato i risultati. Ad esempio l'analisi del brano "La macchia di sangue", un breve dialogo tra due detective (si veda l'allegato 8), ha dato agli allievi maggiori difficolta' rispetto ad altri brani, probabilmente perche' in quel contesto puo' essere considerato legittimo anche un ragionamento di tipo abduittivo. Successivamente la qualita' della risposta degli allievi e' migliorata tanto da poter affrontare con loro l'analisi di deduzioni piu' complesse (cfr. [10] p.92).

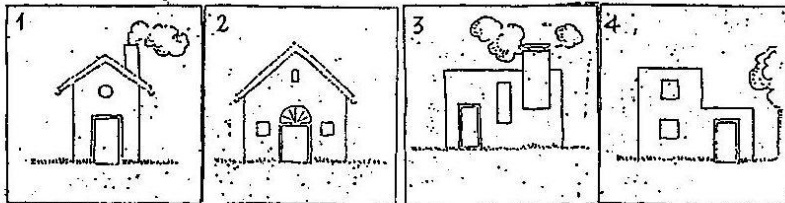
Da un punto di vista linguistico abbiamo consigliato agli insegnanti di effettuare con gli allievi sia un confronto tra espressioni quali "se piove allora prendo l'ombrello" e "siccome piove allora prendo l'ombrello", sia l'analisi e la ricerca di opportune espressioni per lo studio degli indicatori linguistici di premessa e conclusione (cfr. [2] p.16).

C'e' da sottolineare che, pur non essendo stato esplicitamente trattato il modus tollens, in qualche prova, appositamente predisposta, gli allievi lo hanno utilizzato, in modo spontaneo, rimpiazzando una data implicazione con la sua contronominale.

ALLEGATO 1

In un paesino delle Alpi vige ancora questa antica ordinanza:
 "SE UNA CASA HA IL CAMINO ALLORA DEVE AVERE IL TETTO A SPIOVENTE".

Osserva i disegni delle case



Secondo te: quali case non sono in regola con l'ordinanza? Quali lo sono?

Poniamo: A per la proposizione "LA CASA HA IL CAMINO"

B per la proposizione "LA CASA HA IL TETTO A SPIOVENTE"

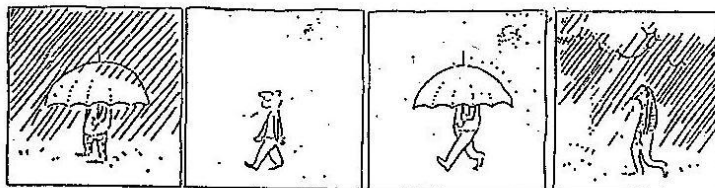
Abbreviamo l'ordinanza con $A \rightarrow B$.

Indica tra le situazioni presentate nei riquadri quelle che verificano oppure no l'ordinanza, usando gli aggettivi "vero" oppure "falso":

riquadro 1) A vera , B vera : $A \rightarrow B$ vera
 riquadro 2) A vera , B falsa : $A \rightarrow B$
 riquadro 3) A falsa , B vera : $A \rightarrow B$
 riquadro 4) A falsa , B falsa : $A \rightarrow B$

ALLEGATO 2

Osserva le seguenti vignette



Poniamo: A per la proposizione "PIOVE"

B per la proposizione "LUIGI USA L'OMBRELLO".

Colloca ciascuna vignetta nel corrispondente riquadro

A vera	A vera	A falsa	A falsa
B vera	B falsa	B vera	B falsa

Considera la proposizione "SE PIOVE ALLORA LUIGI USA L'OMBRELLO" che abbreviamo in $A \rightarrow B$.

Indica il valore di verità di $A \rightarrow B$ in corrispondenza alle diverse situazioni illustrate nei riquadri, completando il seguente schema:

riquadro 1) A vera , B vera : $A \rightarrow B$ vera
 riquadro 2) A vera , B falsa : $A \rightarrow B$
 riquadro 3) A falsa , B vera : $A \rightarrow B$
 riquadro 4) A falsa , B falsa : $A \rightarrow B$

ALLEGATO 3

La lingua italiana e' molto ricca e ci consente di esprimere le stesse cose usando espressioni differenti. Osserva:

- se si studia allora si e' promossi;
- si ha la promozione nel caso in cui si studia;
- studiando si e' promossi;
- basta studiare per essere promossi;
- per essere promossi e' sufficiente studiare;
- quando si studia si e' promossi.

Costruisci un'implicazione e cerca di esprimerla in tanti modi diversi.

ALLEGATO 4

Esprimi ciascuna delle seguenti proposizioni nella forma "Se ... allora ...":

- quando Luigi inizia a parlare non la smette piu';
- premendo l'interruttore la lampadina si accende;
- aiutato opportunamente riuscirà a superare l'ostacolo;
- qualora ti decidessi di venire da me porta con te il libro;
- devi arrivare cinque minuti prima affinché tu possa incontrarlo;
- chiunque lavori può concedersi un po' di riposo;
- la somma di due numeri naturali dispari e' pari;
- andremo al cinema a meno che voi non veniate a trovarci;
- verro' da te purché mi telefoni prima di mezzogiorno;
- vengo a mangiare con te a patto che paghi io.

ALLEGATO 5

Nell'esprimere un'implicazione, spesso, si suole sottintendere la congiunzione "allora" e premettere al "se" la proposizione seconda componente. Ad esempio:

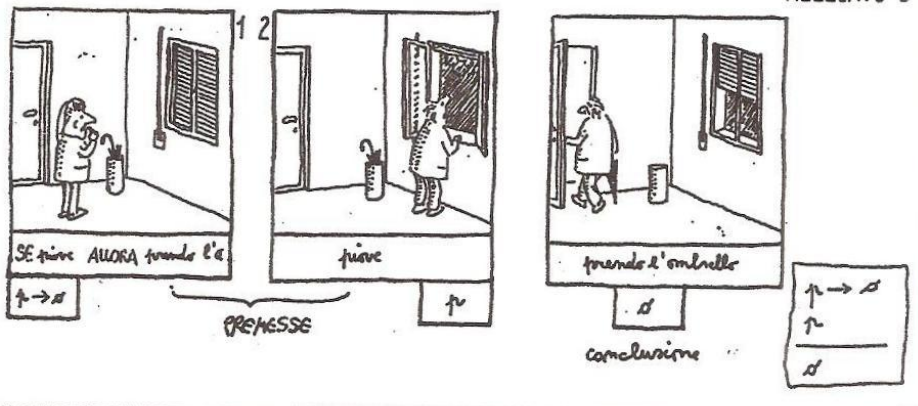
- telefonami se sei libero.

Tuttavia, non sempre due proposizioni collegate con la congiunzione "se" esprimono un'implicazione, ad esempio:

- guarda in libreria se e' arrivato qualche nuovo libro.

Prova a costruire proposizioni analoghe a quest'ultima.

ALLEGATO 6



ALLEGATO 7

LA STORIA DI MESSER GEROLAMO E DEL SUO SERVO MATTIA

Messer Gerolamo ha lasciato il suo vasto podere nella Padania, accompagnato dal suo servo Mattia; sta percorrendo il lungo e pericoloso cammino verso Santiago de Compostela, dove ringrazierà Nostro Signore di averlo salvato da tremende pesti e carestie.

Le strade si sa, sono terribilmente insicure: messer Gerolamo non è uscito dalla terra dei Franchi quando nella foresta è assalito dai briganti.

Mattia riesce a nascondersi, messer Gerolamo viene malmenato e derubato di tutto. Il bottino è abbondante; il capo dei briganti, ormai sazio e piuttosto ubriaco, decide di dare una possibilità al povero Gerolamo: una partita a carte ne deciderà la sorte ed il pellegrino, se vincerà, avrà salva la vita.

Mattia, nell'oscurità del suo nascondiglio, ha sentito tutto: si rende conto che l'attenzione dei briganti è concentrata sulla partita: è il momento di fuggire.

Dopo qualche tempo ed altre avventure, Mattia è a Santiago. Ogni giorno cerca tra la folla un possibile nuovo padrone da servire. Ed ecco che, un pomeriggio, lo vede in lontananza: è proprio lui? Il buon messer Gerolamo!

"Ma allora, è riuscito a vincere la partita!" pensa felice Mattia.

E' CORRETTA LA CONCLUSIONE DI MATTIA?

ALLEGATO 8

LA MACCHIA DI SANGUE

Il detective Malone osservò a lungo la macchia sul pavimento. "E' rossa" esclamo' con sicurezza "e dunque e' di sangue".

"Non sarei così affrettato, vecchio mio" borbottò infastidito il collega Cordell "potrebbe essere qualsiasi altra cosa".

CHI HA RAGIONE: MALONE O CORDELL?

ALLEGATO 9

LA LEGIONE STRANIERA

"Dal momento che non mi ama più, parto per la legione straniera!" si lamentò il povero Pierre con l'amico Robert, mentre le sirene della nave su cui si era imbarcato suonavano tristemente per avvertire i passeggeri della partenza dal porto di Marsiglia.

"Pierre amore mio!" si sentì gridare all'improvviso nella densissima nebbia.

"Oddio, ella è qui! Devo restare!" urlò Pierre e d'un balzo saltò all'ultimo momento sul molo, e corse verso la voce della sua invisibile Odette.

FA BENE PIERRE A SALTARE SUL MOLO?

4.- CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

L'esperienza descritta, a nostro avviso, anche se di per se' significativa, e' aperta a raffinamenti e sviluppi. In particolare prevediamo di ritornare sull'argomento dopo aver avviato lo studio dei quantificatori, sia con attivita' di verifica e consolidamento (quali ad esempio alcune tra quelle riportate in [5] pp.25-27 ed in [7] pp.417-418) ed anche in riferimento alla quantificazione (cfr. [13] p.40 e [14] p.109).

Intendiamo affrontare inoltre attivita' mirate alla distinzione tra validita' di una argomentazione e verita' delle conclusioni (cfr. [13] p.24 e [15] pp.24-25) e lo studio di problemini logici per stimolare negli allievi la realizzazione autonoma di deduzioni (ad esempio cfr. [16] pp.21, 25, 62).

RINGRAZIAMENTI: Ringraziamo Giancarlo Navarra e Laura Buzzatti per averci dato l'occasione di vivere questa esperienza, grazie alla quale abbiamo avuto modo di apprezzare le loro qualita' culturali ed umane.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HODGES W., Logica, Garzanti, Milano, 1986.
- [2] SCHAGRIN M.L., RAPAPORT W.J., DIPERT R.R., Logica e computer, Mc Graw Hill Italia, Milano, 1986.
- [3] O'BRIEN T.C., Logical thinking in adolescents, Ed. Stud. Math. 4 (1972), 401-428.
- [4] O'BRIEN T.C., Logical thinking in college students, Ed. Stud.Math. 5 (1973), 71-79.
- [5] SIWEK H., Logique formelle et raisonnement naturel des eleves dans l'enseignement de la mathematique, Ed. Stud. Math. 5 (1973), 23-37.
- [6] HADAR N., Children's conditional reasoning, Ed. Stud. Math., parti I, II e III, risp.: 8 (1977), 413-438 - 9 (1978), 97-114 e 115-140.
- [7] DUMONT B., L'influence du "Decor" e du langage dans des epreuves de tipe "logique" portant apparemment sur l'implication, Ed. Stud. Math. 13 (1982), 409-429.
- [8] MARKOVITS H., The curious effect of using drawing in conditional reasoning problems, Ed. Stud. Math. 17 (1986), 81-87.
- [9] BERNARDI C., La logica Matematica: metodo e contenuti, Not. U.M.I., suppl. al n.11 (1987), 22-29.

- [10] CARROLL L., Alice, Longanesi, Milano, 1971.
- [11] BORASI R., Un'originale proposta per l'educazione al pensiero critico: "Harry Stottlemeier's discovery", *Ins. Mat. Sc. Int.* vol.7 n.3 (1984), 89-95.
- [12] FETISOV A.I., La dimostrazione in geometria, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1965.
- [13] PROGETTO NUFFIELD, Logica, Zanichelli, Bologna, 1974.
- [14] ADDA J., L'importance des quantifications dans la comprehension des mathematiques. *N.I.C.O. Dec.* (1975), 107-115.
- [15] JOHNSON D.A., GLENN W.H., SCOTT NORTON M., Logica e ragionamento, Zanichelli, Bologna, 1980.
- [16] SMULLIAN R., Qual'è il titolo di questo libro, Zanichelli, Bologna, 1981.