

Settimana ArAl, 19-22 gennaio 2021 (con recuperi il 29.1 e l'1.2)

Commenti alle chat scritte durante alcuni interventi nelle classi
Le frasi scritte in chat sono evidenziate con un altro carattere.

Due parole di introduzione su questo materiale, stimulate dal commento della coordinatrice del gruppo ArAl di Trieste-Muggia, Elena Tavarado, che figura in calce al terzo diario.

Durante il lockdown nel 2020 è stato avviato il progetto ArAl-DaD (Didattica a Distanza): ognuno – docente e alunni - era nella propria abitazione e si è cercato di fare il meglio possibile adattandosi alla situazione. In questa prima fase sono stati proposti dei materiali che abbiamo battezzato *trenini* (formati da una *locomotiva* – un video introduttivo, traino dell'attività - e da *vagoni* costituiti da slide Powerpoint, ognuna contenente una situazione problematica) che abbiamo proposto alle classi. In quel momento d'emergenza erano concepite solo per la scuola dell'infanzia e la scuola primaria.

Nel settembre 2020, (inizio della seconda ondata) si è deciso di riprendere il progetto ArAl-DaD e di modificarlo in Progetto ArAl-DDI (Didattica Digitale Integrata). Gli obiettivi però erano diversi: superare una prospettiva *emergenziale* e affrontare una prospettiva *strutturale*: i trenini DDI dovevano essere realizzati non più / non solo per rispondere ad una necessità drammatica e tutt'altro che risolta, ma perché *fanno parte del futuro di scuola in cui le nuove tecnologie saranno sempre più integrate con la normale attività didattica, indipendentemente dalla pandemia e dalle incertezze della didattica dell'oggi*. Il loro utilizzo è previsto in diverse possibili forme – per una didattica in presenza, a distanza o mista. I *trenini* vanno realizzati come promotori di competenze, rinforzi, sfide, espansioni, approfondimenti, compiti per casa, alternative alle tradizionali verifiche, ... Si è avviata quindi una stretta collaborazione, fra docenti ed esperti, imprescindibile per raggiungere la qualità della realizzazione degli oggetti DDI, e si è deciso di affiancare ad ogni trenino una *Guida per l'insegnante*.

A metà gennaio 2021 sono stati realizzati quattro trenini e altri sono in cantiere.

Nella settimana dal 19 al 22 gennaio è iniziata presso l'Istituto di Monteroni d'Arbia (SI) la *prima settimana ArAl* dell'a.s. 2020/2021, nel corso della quale sono stati effettuati da Navarra 13 meet nelle classi. I meet sono stati accuratamente preparati attraverso incontri con gli insegnanti, nel corso dei quali sono stati definiti:

- il tema ArAl da affrontare in ogni classe;
- le competenze che sarebbe stato auspicabile che gli alunni possedessero;
- le modalità degli interventi nelle classi;
- le possibili/probabili difficoltà che avremmo incontrato;
- una valutazione conclusiva sugli esiti di questa prima esperienza.

Si è discusso molto:

- sul ruolo dell'insegnante di classe;
- sulla presenza di altri docenti come 'ospiti';
- sui modi di interagire con la classe;
- sull'uso delle tecnologie.

Si è deciso che:

- i banchi sarebbero stati lasciati nella posizione abituale per la classe, rispettosa delle norme anti-covid;
- la classe avrebbe visto Navarra alla Lim; sarebbe stato predisposto un banco davanti alla telecamera in modo che un alunno alla volta potesse comunicare con Navarra e scrivere eventualmente frasi sulla chat (questo nella realtà non è avvenuto, principalmente per questioni di tempo; la chat è stata usata dall'insegnante e da Navarra);
- Navarra avrebbe usato soprattutto presentazioni powerpoint e il programma notebook (Smart) assieme alla tavoletta grafica (si è cercato anche di utilizzare la Jam ma l'intenzione non si è concretizzata); con i bambini più piccoli ha lavorato anche con materiali concreti (Cannucce e bicchieri) e con un teatrino (Scatole & Biglie);
- l'insegnante avrebbe mediato tra Navarra e la classe.

Vi sono stati numerosi 'incidenti di percorso' legati alla connessione; due interventi interrotti sono stati recuperati nei giorni successivi.

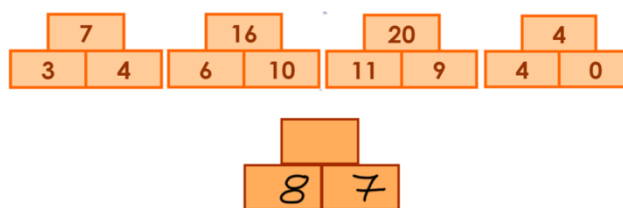
L'idea di raccogliere le chat è nata quasi per caso, ma l'idea di commentarle è venuta spontanea, subito dopo, per consentire agli altri docenti una lettura critica (inevitabilmente parziale) di ciò che è avvenuto durante l'intervento. L'intenzione è di realizzare una nuova famiglia di strumenti per la formazione dei docenti. Come scrive Elna, "*Rispetto a un diario ci sono meno elementi che aiutano a vedere i ragazzi all'opera*". Questo è certamente vero, anche perché le chat sono uno strumento che talvolta, nel fermento dell'attività, viene un po' trascurata. Conterà molto esperienza, e sarà probabilmente necessario una maggiore continuità nella gestione della chat (forse un altro insegnante in classe potrebbe aiutare).

Intanto è stata scritta questa introduzione. Poi vedremo di migliorarci cammin facendo. È fondamentale – si potrebbe dire necessario – che gli insegnanti non coinvolti negli interventi esprimessero dei giudizi su questa che potremmo presuntuosamente chiamare *metodologia delle chat commentate*. Lo immagino, comunque, come uno strumento agile, mediatore fra teoria e prassi, sintetico, accompagnato da immagini.

Dobbiamo capire se questa prima raccolta sperimentale abbia un futuro.

Gruppo ArAl	Insegnante	Classe	Intervento Meet	Tema
Monteroni d'Arbia (SI)	Giglioni B	Prima secondaria	19-01 - Incontro 0	Piramidi

Situazione proposta:



ricavare la 'regola delle piramidi'

INTERVENTI IN CHAT (Navarra: N)

1. Michael: Visto che in basso ci sono due quadratini gli direi di sommarli e di fare il risultato.²
2. Tommaso: lo la regola la farei sommando n di lato a sinistra e n di lato a destra ottengo il risultato che va in alto.³
3. Tommaso: È un numero generico.⁴
4. Tommaso: Devi prendere la tua piramide e sommare le parti in basso, a sinistra e a destra, e mettere la somma nella parte in alto.
5. Tommaso: Secondo me sommiamo parti.
6. Michael: Sommo il numero in basso a destra.
7. Michael: Dovrai sommare un numero con un altro numero.
8. *Costruzione collettiva della regola e affinamenti successivi.*
9. A: Somma il numero nel mattone a sinistra con il numero nel mattone in basso a destra.
10. A: Somma il numero nel mattone a sinistra con il numero nel mattone in basso a sinistra e scrivi il risultato nel mattone in alto.
11. A: Somma il numero nel mattone a sinistra con il numero nel mattone in basso a destra.
12. A: Somma il numero nel mattone a sinistra con il numero nel mattone in basso a destra e scrivi il risultato nel mattone in alto.
13. N: Cos'è il numero nel mattone in alto?
14. Tommaso: Il numero nel mattone in alto è la somma tra i due sottostanti.⁵

¹ Questa chat si riferisce ad un intervento in classe fortemente disturbato dalla cattiva connessione. La ritengo comunque importante perché anche solo pochi interventi di singoli alunni, o gli aggiornamenti (9-14) della discussione collettiva, fanno emergere punti chiave dell'early algebra e del Progetto ArAl. **P.S. (2 febbraio) Il meet con questa classe è stato ripetuto il 29 gennaio con effetti identici causa una connessione molto disturbata. È stato ripetuto una terza volta l'1 febbraio con esiti finalmente ottimi. La chat completa di questo terzo intervento è riportata più avanti.**

² Nodo 'classico' sul quale invito gli insegnanti a far riflettere gli alunni: non si sommano oggetti ('quadratini' (1), 'parti' (4)) ma numeri. Un'insegnante, nel corso di un intervento, mi ha chiesto se andava bene dire che "Il numero rappresenta le arance (per esempio)". Un numero non rappresenta degli oggetti, ma esprime una quantità, quindi va precisato il numero delle arance. È evidente inoltre l'atteggiamento procedurale di Michael ((1) "sommare e fare il risultato"); vedi anche Tommaso (2). Ritengo che l'insegnante debba iniziare ad affrontare due concetti chiave: l'uguale e la rappresentazione canonica/non canonica di un numero. Consiglio, come primo approccio, la lettura di Navarra G.. (2019). Il progetto ArAl per un approccio relazionale all'insegnamento nell'area aritmetico-algebrica. Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 5, 70-94. DOI: 10.33683/ddm.18.5.3

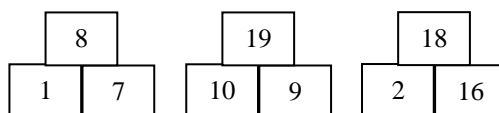
³ Ho il dubbio che Tommaso usi 'n' senza la consapevolezza di cosa significhi l'uso di una lettera (o in generale di un simbolo) in matematica. Nel progetto ArAl le riflessioni su questi aspetti iniziano sin dalla prima primaria, ma vanno condotte accompagnando con gradualità la classe nell'esplorazione di questo mondo completamente nuovo. Suggestivo la lettura nel Glossario di Lettera, Rappresentare/Risolvere, Ebbrezza da simbolo.

⁴ Tommaso, alla mia domanda "Cos'è per te 'n'?" risponde "Un numero generico". Sarebbe interessante chiedergli cosa intenda con questo aggettivo e avviare una riflessione collettiva.

⁵ La domanda (13) intende aprire ad una definizione relazionale. V. dualità procedurale/relazionale nel Glossario.

Gruppo ArAl	Insegnante	Classe	Intervento Meet	Tema
Monteroni d'Arbia (SI)	Boccagna F	Terza primaria	21-01 - Incontro 0	Piramidi

1. Presento alcune minipiramidi e chiedo di ricavare la 'regola delle piramidi'.



2. A: Perché 1 più 7 fa 8.

3. A: 10 e 9 e $10+9$ fa 19.

4. A: Devi fare 2 più 16 e poi nel mattone sopra devi scrivere 18.

5. A: Devi sommare due addendi.

6. A: Devi sommare il mattone di sinistra e quello di destra per fare la somma.⁶

7. Si discute sul fatto di 'sommare mattoni'.

8. A: Devi sommare il numero nel mattone di sinistra e quello nel mattone di destra per fare la somma.

9. A: Devi sommare il numero nel mattone di sinistra e quello nel mattone di destra e scrivere il risultato nel mattone sopra.

10. Navarra chiede la differenza tra la frase (5) e l'ultima.⁷

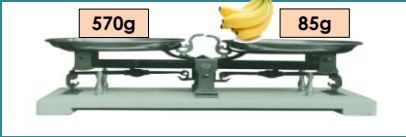
⁶ In merito alle frasi (2-6) v. commenti alla chat precedente

⁷ Lo scopo della domanda è quello di promuovere una riflessione sulle parafrasi per cogliere la maggiore correttezza dell'ultima frase (9) rispetto alla (5); invito l'insegnante a proporla comunque anche facendo riferimento a questa chat (noi non siamo riusciti a proseguire perché ormai l'intervento era finito). Possono emergere numerose questioni: (i) questioni linguistiche: l'importanza di sostituire il generico 'fare' (5) con 'sommare' (10); (ii) l'approccio alla generalizzazione: il confronto tra una definizione 'riferita ad una sola piramide ("fare 2 più 16") e una frase come (10), in cui si parla di 'numero nel mattone di sinistra' e 'numero nel mattone di destra' è molto importante, ed è un passaggio che va affrontato con grande gradualità.

Gruppo ArAl	Insegnante	Classe	Intervento Meet	Tema
Monteroni d'Arbia (SI)	Santoro A.	Seconda secondaria	29-01 - Incontro 0	Bilancia

Viene proiettata questa situazione (dal secondo vagone del trenino-DDI 'Dalla bilancia a piatti all'equazione'):

V2-3: Confronto di strategie



I: Piero, come faresti per trovare il peso delle banane?
 Piero: Toglierei 85 da tutte e due le parti.
 Laura: Non sono d'accordo. È impossibile togliere 85 g dal piatto di sinistra, se lì c'è un peso da 570 g.
 Piero: Devo trovare il modo di togliere 85 g da entrambi i piatti, altrimenti non saprò quanto pesano le banane.

Come può fare Piero a risolvere questo problema?

ARGOMENTA LA RISPOSTA Progetto ArAl-DDI - AS 2020/2021 4

1. (Parte iniziale non riportata nella chat) l'alunno invitato a parlare (Venas) non capisce che non può togliere 85g da entrambi i piatti perché sul piatto di sinistra, in questo momento, c'è un peso di 570g. Passano alcuni minuti di tentativi e finalmente la situazione si sblocca.⁸
2. Venas: Nel piatto di sinistra devo sostituire il peso da 570g con 85g e 485g.
3. Venas: Tolgo 85g da entrambe le parti.
4. Venas: Il piatto di sinistra ha un peso equo⁹ a quello di destra.
5. Navarra chiede ad un altro alunno di rappresentare in linguaggio matematico la situazione.
6. Samuele: $570+85+X=\text{peso equo}$ ¹⁰.
7. Navarra chiede ai compagni se condividono la proposta di Samuele. Siccome la situazione non si sblocca chiede di spiegare il significato della scrittura. Con una certa fatica si capisce che la frase di Samuele non rappresenta la situazione.
8. N: Inoltre Broshi non capirebbe le parole 'peso equo'. Credo che vi risponderebbe in questo modo (scrive) $570+85+X=?$
9. Venas, Samuele e i compagni non capiscono come collocarsi di fronte alla situazione.
10. N: Abbiamo tre cose: 1) il piatto di sinistra 2) l'equilibrio 3) il piatto di destra. Cominciate rappresentando il contenuto del piatto di sinistra.
11. Samuele: Si può scrivere anche $570=X+85$.
12. N: E cosa significa 'X'?
13. Samuele: X sono le banane.¹¹
14. Navarra fa riflettere sul significato della lettera. La situazione non si chiarisce e scrive: x è il peso delle banane.
15. Navarra cerca di promuovere una riflessione il più possibile collettiva; mentre parla, fa domande, attende risposte, scrive le frasi più importanti: UNA LETTERA NON RAPPRESENTA UN OGGETTO MA UN NUMERO.
16. Navarra: TI CHIEDO DI INTERPRETARE IL TUO ERRORE.¹² Samuele non risponde e Navarra chiede ad un'alunna cosa significa 'interpretare'.

⁸ La difficoltà è tipica con gli alunni alle prime armi con l'attività con la bilancia. Devono essere guidati a superare la logica dell'operazione (in questo caso la sottrazione) e capire che, per poter togliere 85, bisogna operare una sostituzione (atto tipico della manipolazione algebrica) e rappresentare questo passaggio.

⁹ 'Equo' è un termine del linguaggio comune nelle classi toscane. Suggesto di riflettere assieme agli alunni sul fatto che la lingua italiana viene usata anche per parlare di matematica, ma che bisogna rispettare il fatto che molti suoi termini assumono significati diversi e codificati nell'ambito di questa disciplina. In questo caso è meglio che si abituino ad usare il termine 'uguale'.

¹⁰ Invito ad approfondire le potenzialità legate al ricorso a Brioshi. L'amico di penna algebrica è molto efficace, a condizione che gli alunni facciano propria, e capiscano quali ripercussioni ha, la sua impossibilità di capire la lingua italiana. In (8) Navarra fa riflettere su questo aspetto chiedendo di interpretare la frase (6).

¹¹ Altra misconcezione 'classica' che l'insegnante deve affrontare; questo significa promuovere riflessioni collettive sull'uso della lettera in matematica.

¹² L'aspetto dell'interpretazione delle scritture matematiche (corrette o sbagliate che siano) è fondamentale per costruire delle competenze, sempre più necessarie man mano che lo studente si addentra nell'algebra. Interpretare una frase in linguaggio algebrico significa individuare la struttura della frase, cioè le relazioni fra i numeri che vi compaiono, noti o meno che siano.

17. A: Fare una parte... come fanno gli attori.¹³
18. Navarra: Interpretare vuol dire attribuire un significato.
19. Navarra: Provate a pensare a cosa avete fatto all'inizio di questa situazione. Nella realtà cosa è stato fatto?
20. Samuele: Hanno cambiato l'ordine dei pesi. Cioè dicevano di togliere 85 da 570g.
21. Navarra: All'inizio è stato detto questo, poi è stato detto altro.
22. Venas: Non si può togliere 85 da tutti e due. Si deve sostituire 570 con 85g e 485g.
23. Navarra scrive: Hai sostituito 570 con 85 e 485.
24. Navarra scrive: Devi dare un significato matematico alla 'e'.¹⁴
25. Navarra: Cosa metti al posto di 570g?
26. Venas: 485+85 grammi, questo nel piatto di sinistra.
27. Navarra: Bravissimo! Scrive $570=X+85$.
28. Navarra scrive: $485+85=X+85$.
29. Navarra: Adesso, come avete detto all'inizio, devi togliere contemporaneamente 85g da entrambi i piatti.
30. Venas detta e Navarra scrive: $485+85-85$.
31. Navarra: Adesso devi inventare un modo per dire in linguaggio matematico che toglie.¹⁵
32. Venas detta e Navarra scrive: $X+85-85$.
33. Navarra: Bravo! E adesso devi dire in linguaggio matematico che i piatti sono sempre in equilibrio.
34. Venas detta e Navarra scrive: $485+85-85=X+85-85$.
35. Navarra: E allora adesso cosa rimane nei piatti?
36. Venas: $485=X$.¹⁶
37. Navarra: Cosa è successo a $85-85$?
38. Venas: Fa zero.
39. Navarra scrive $485+0=X+0$.
40. Venas detta e Navarra scrive $485=X$.
41. Navarra: Quindi puoi concludere che...
42. Venas: ... il peso delle banane è di 485g.
43. Navarra invita un'alunna e le chiede di interpretare la sequenza delle scritture:¹⁷
- $570=X+85$
 $485+85=X+85$
 $485+85-85=X+85-85$
 $485+0=X+0$
 $485=X$
44. Alessia: 570 è uguale al peso delle banane più 85g.
45. Navarra la invita a formulare la frase in un modo diverso pensando a cos'è $X+85$.
46. Alessia: 570 è uguale alla somma fra il peso delle banane e 85g.
47. Navarra: Da $570=X+85$ a $485+85=X+85$ cosa è cambiato?
48. Alessia: Il 570 è stato sostituito dalla somma di 485 e 85.
49. Navarra: Poi da $485+85=X+85$ a $485+85-85=X+85-85$ cosa è stato fatto?
50. Alessia: È stato aggiunto il meno 85 da tutti e due i piatti. Navarra la invita a continuare da sola. Nella riga dopo è stato sostituito $85-85$ con zero... nell'ultima riga è stato scritto senza zero, $485=X$.

18

¹³ Confesso che questa risposta mi ha spiazzato. È una conferma di quanto sia vitale affrontare la matematica privilegiando, in senso ampio, gli aspetti del linguaggio.

¹⁴ Ancora una volta l'importanza della riflessione, individuale e collettiva, sul significato delle scritture, aritmetiche prima, e algebriche poi (questo avviene quasi subito quando alunni di prima primaria incontrano le 'equazioni per gioco')

¹⁵ Vanno curate l'interpretazione e la traduzione (v. commento a (24)). L'obiettivo costante per l'insegnante è quello di costruire significati, e questa operazione molto spesso è tutt'altro che indolore anche perché, per questione di tempo e altro, l'insegnante trascura di verificare questi aspetti, come abitudine da consolidare costantemente nel tempo.

¹⁶ Venas è stato molto bravo e disponibile a mettersi in gioco, cosa che all'inizio faceva senza convinzione.

¹⁷ Si ruota attorno ai medesimi obiettivi: interpretare, verbalizzare.

¹⁸ (Elena Tavarado) Ho avuto qualche difficoltà di "interpretazione" della situazione, ossia di visualizzazione della scena didattica nel corso del suo svolgimento. Rispetto a un diario, ci sono meno elementi che aiutano a vedere i ragazzi all'opera. D'altra parte ciò dipende dal fatto che non ho ancora esperienza diretta dell'intervento di Giancarlo nelle classi, lacuna da colmare quanto prima. Forse si potrebbe pensare a un cappello introduttivo che presenta il setting: disposizione dell'aula, dei banchi, degli schermi per il collegamento... proprio per i docenti a cui il materiale è destinato, i quali potrebbero non appartenere ai protagonisti del Progetto ArAl. Ho apprezzato molto il tempo dedicato a ciascuno studente, che permette di seguire lo svolgersi del suo pensiero e di approfondire alcuni scogli.

Gruppo ArAl	Insegnante	Classe	Intervento Meet	Tema
Monteroni d'Arbia (SI)	Gigliani B.	Prima secondaria	1-02 - Incontro 0	Piramidi

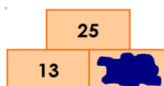
Il meet con questa classe è stato ripetuto tre volte causa problemi di connessione. La chat del primo meet (19.1) è stata comunque riportata all'inizio di questo file.

1. Si inizia da questa situazione:¹⁹

Situazione proposta:

ricavare la 'regola delle piramidi'

2. Agata: Sommando i numeri nelle scatole in basso possiamo trovare il numero della scatola alta.
3. N: Perché dici si può ottenere e non si ottiene?
4. Agata: Mi è venuto spontaneo.
5. N: Cos'è il numero in alto nella minipiramide?
6. Agata: Il numero del mattoncino in alto è la somma o il risultato dei numeri in basso.
7. Navarra commenta con l'insegnante che la definizione di Agata è procedurale (Agata dice 'somma o risultato').
8. Francesco prende il posto di Agata.
9. Navarra presenta questa situazione e chiede a Francesco che domanda si aspetta che gli si faccia.



10. Francesco: Mi aspetto che mi chieda il numero nel mattone in basso.
11. N: Se fossi l'insegnante, cosa ti aspetteresti di leggere nei quaderni dei tuoi compagni?
12. Francesco: Mi aspetterei di leggere 25-13.
13. Navarra: Questa è l'operazione, e come risposta?
14. Francesco: Il numero nel mattoncino in basso a destra è 12.
15. Navarra (riporta nella Lim del suo pc l'evoluzione dell'attività, v. Fig. 1):

Una macchia di gelato è caduta sul mattone in basso a destra e non si vede il numero che c'è scritto.

17: Esprimete per Briochi le relazioni fra gli enti del problema.

① $13 + \text{macchia} = 25$

② $25 - 13 = \text{macchia}$

③ $25 - \text{macchia} = 13$

④ $\text{macchia} + 13 = 25$

⑤ $25 = \text{macchia} + 13$

⑥ $25 = 13 + \text{macchia}$

⑦ $\text{macchia} = 25 - 13$

⑧ $13 = 25 - \text{macchia}$

NON INVENTATE OPERAZIONI

RAPPRESENTARE IL 13 LO VOGLIO AGGIUNGERE AL NUMERO CHE STA SOTTO LA MACCHIA

macchia = NUMERO NASCOSTO

macchia + 25 = 37 (somma)

macchia + 25 - 13

ALGEBRA EQUAZIONI

Fig. 1

¹⁹ Il meet è stato molto interessante, e lo si può cogliere dalla ricchezza dei concetti emersi. È andato nella direzione prevista grazie anche alla partecipazione attiva della classe: iniziando dalla macchia che nasconde un numero si è giunti a parlare di pensiero procedurale e pensiero relazionale, passando attraverso la dualità rappresentare/risolvere, i significati dell'uguale, le rappresentazioni canoniche e non canoniche di un numero, le proprietà sino alla proprietà simmetrica dell'uguaglianza. Si è concluso ben oltre l'ora e, 'fuori tempo massimo', due alunni hanno voluto porre delle questioni, la prima delle quali particolarmente interessante. È emersa nitidamente la mentalità di fondo procedurale; il lettore la può cogliere anche se non la commenterò ma mi limiterò ad evidenziarne i sintomi. Sarà per lui un buon 'esercizio' individuarla.

16. Adesso esprimete per Brioshi le relazioni fra gli enti, cioè fra i numeri, del problema.
17. Viola: **Fai** 13 più il numero che non sappiamo.
18. Navarra *scrive alla Lim* $13+$ (①). *Viola non sa come continuare*. Cosa significa per te il 13?
19. Viola: 13 è un numero.
20. Navarra: Il 'più' cosa indica? *Viola non risponde*. Perché hai scritto '+' e, per esempio, non 'per'?
21. Viola: Ho messo + e non il \times per perché **non voglio moltiplicare** i numeri, ma il 13 **lo voglio aggiungere** al numero che sta in basso.
22. Navarra: E quindi come rappresenti 'aggiungere'?
23. Viola: Con il +.
24. Navarra: Bene! Conosci altre parole che ti dicono di usare il '+'?
25. Michael: 'Addizionare' o 'Sommare'.
26. Navarra: Ora bisogna capire quale simbolo si può usare per Brioshi per rappresentare il numero sotto la macchia.
27. Daniel: **Fai** $13+\text{macchia}=25$ (*Navarra completa la frase di Viola* ②).
28. N: E cosa vuol dire la macchia?
29. Daniel: Il disegno è il numero che sta sotto la macchia.
30. N: Saresti capace di rappresentare in un altro modo queste relazioni?
31. D: $25-13=$ macchia (*Navarra trascrive*).
32. Navarra: Altri modi?
33. Tommaso: $\text{Macchia}+25=37$.
34. N: Mi spieghi questa frase che hai scritto?
35. Tommaso: Perché **se sottraggo** 37 a 25 **trovo** macchia (*Navarra commenta con l'insegnante il punto di vista procedurale di Tommaso*).
36. N: Siete tutti d'accordo?
37. Davide: Non va bene perché **non puoi trovare** 37.
38. Navarra: Quali sono i tre numeri, conosciuti o meno, nella piramide?
39. Tommaso: Sono 25, 13 e il numero incognito che chiamerò a.
40. Michael: Io farei $\text{macchia}+25-13$. *Navarra lo invita a riflettere su quello che propone*. Cioè la macchia che sarebbe $12+25-13...$ no... non torna.
41. Navarra: Come potreste mettere in relazione i tre numeri in modo diverso?
42. Agata: **Un'altra operazione** può essere $25-\text{macchia}=13$. (*Navarra scrive e la chiama C*), Fig. 1, ③)
43. Tommaso: **Aggiungendo** 13 al numero nascosto **ottengo** 25. *Detta: macchia+13=25*.
44. Navarra *la chiama D*): Bene. Sappiate che ce ne sono ancora altre: E), F), G), H).
45. *Gli alunni pensano ma non ci sono proposte*.
46. Navarra: Spiegateci cosa c'è per voi a sinistra e a destra dell'uguale.
47. Agata: **La cosa che sta a sinistra dell'uguale è l'operazione invece a destra c'è il risultato**.
48. *Man mano che si svolge la discussione (44-60) Navarra scrive un'altra pagina alla Lim*. (Fig. 2)

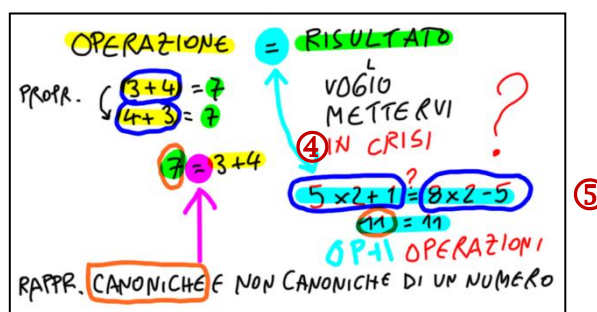


Fig. 2

49. Navarra (*fa riflettere sulle scritture* $3+4=7$ e $4+3=7$ e chiede quale proprietà è stata applicata. Agata risponde "La commutativa". Navarra chiede di definirla).
50. Agata: Nelle due operazioni è stata applicata la proprietà commutativa cioè cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia.
51. Navarra (*propone una nuova scrittura: $7=3+4$. La classe dice che va bene*): Come la mettiamo con 'l'operazione a sinistra e il risultato a destra'? Come può esserci il risultato prima dell'operazione? 7 è un'operazione? $3+4$ è un risultato? La classe sta in un silenzio molto attento. Navarra scrive: 'Voglio mettervi in crisi' ④. *Sorrisini 'adulti'*.
52. Agata: L'uguale rappresenta un modo per dire che quello che sta a destra e quello che sta a sinistra sono uguali.
53. Navarra *si complimenta per l'osservazione*. Spiega che l'uguale di cui parla Agata permette di scrivere anche, per esempio: $5 \times 2 + 1 = 8 \times 2 - 5$ ⑤. Perché secondo voi sono uguali?
54. Davide: Ho fatto 5 per 2 più 1 che fa 11 e poi 8 per 2 meno 5 che fa 11.
55. Navarra: Avete parlato di rappresentazioni canoniche e non canoniche di un numero. Spiega cosa hai capito.

56. Davide: La forma canonica di un numero è quando... (*non continua*)
 57. Navarra: Riconosci nelle cose scritte (Fig. 2) quali sono le rappresentazioni canoniche?
 58. Davide: 7 è una forma canonica del numero.
 59. Michael: Anche 11.
 60. Navarra: Quali sono le forme non canoniche?
 61. Davide: $3+4$, $5 \times 2+1$, $8 \times 2-5$ e $4+3$.
 62. Si ritorna alla Fig. 1. Navarra chiede in quali altri modi si potrebbero esprimere le relazioni fra i tre numeri.
 63. Francesco: $25 = \text{macchia} + 13$ (Navarra aggiunge E)).
 64. Alunno: $25 = 13 + \text{macchia}$ (F).
 65. Alunno: $\text{Macchia} = 25 - 13$ (G).
 66. Alunno: $13 = 25 - \text{macchia}$ (H).
 67. Navarra ricopia le otto frasi in una pagina nuova della Lim e chiede quali proprietà sono state applicate (Fig. 3)

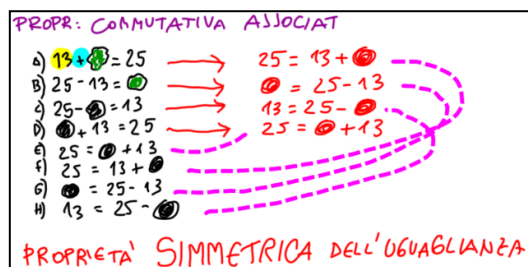


Fig. 3

68. Michael: Commutativa, invariantiva, associativa, dissociativa²⁰ (Navarra interviene "Lasciamo perdere...")
 69. Navarra introduce la proprietà simmetrica dell'uguaglianza. Poi chiede di applicare le proprietà man mano che indica le varie rappresentazioni. Gli alunni verbalizzano correttamente.
 70. Navarra riassume l'incontro costruendo un'altra pagina centrata su due voci: 'Procedurale' e 'relazionale' (Fig. 4):

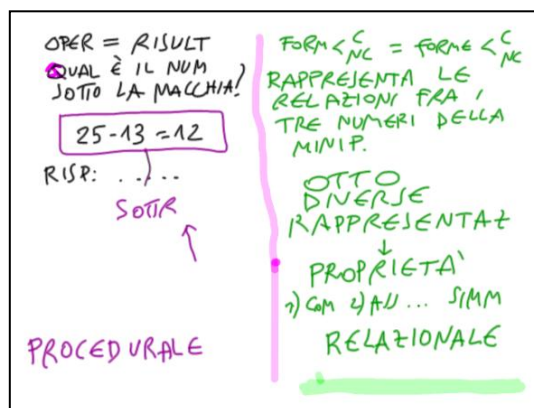
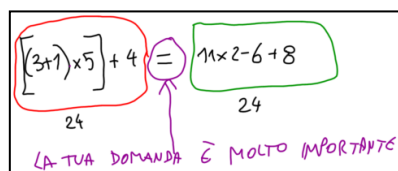


Fig. 4

71. Navarra propone di concludere l'intervento. L'insegnante dice che Agata vuole fare una domanda.
 72. Agata: La proprietà simmetrica si applica alle operazioni?
 73. Navarra si complimenta per la domanda e risponde organizzando un'altra pagina in cui spiega come la proprietà non si applichi alle operazioni ma all'uguaglianza fra due rappresentazioni dello stesso numero (Fig. 5):



²⁰ Vexata quaestio. Michael parla di proprietà dissociativa, come molti libri di testo, ma ribadisco che questa non è una proprietà delle operazioni ma una semplice sostituzione di rappresentazione, per esempio: 8 e $2+6$ sono due rappresentazioni dello stesso numero, pertanto si possono tranquillamente sostituire una all'altra per il principio logico detto appunto di sostituzione. Un tempo, non essendoci distinzione tra numero e sua rappresentazione, si parlava di proprietà dissociativa. Quella visione è superata perché la proprietà è qualche cosa di intrinseco all'operazione, o alle operazioni, cui si riferisce, mentre la sedicente 'proprietà dissociativa' non riguarda l'operazione ma le rappresentazioni numeriche.

Fig. 5

74. Un altro alunno pone una questione che purtroppo non è stata registrata.

Gruppo ArAl	Insegnante	Classe	Intervento Meet	Tema
Monteroni d'Arbia (SI)	Pandolfi MI.	Terza secondaria	22-01 - Incontro 0	Bilancia-Equazione

Situazione proposta:²¹

Gli alunni, prima dell'incontro in classe con il prof Navarra, hanno visto il filmato dell'altalena con gli anziani presente nella [locomotiva della DDI "Dalla Bilancia all'equazione"](#) e scritto le loro descrizioni e le spiegazioni.



Guarda il video e poi:
 A) descrivi accuratamente il suo contenuto;
 B) spiega quello che succede.

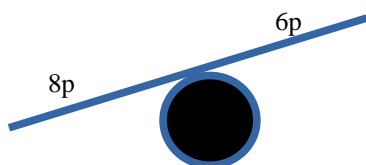
Alcune ragazze hanno scritto le descrizioni sotto riportate.

Il Professor Navarra fa leggere la descrizione prodotta da Ginevra che viene proiettata sulla lavagna condivisa.

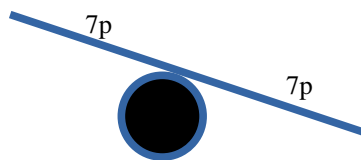
1. Ginevra:

A) Descrizione

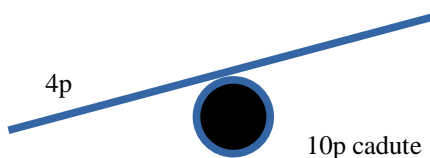
Un gruppo di 14 adulti è salito su un altalena basculante, all'inizio pendeva a sinistra, con 8 adulti a sinistra e 6 a destra.



Dopo, l'ottavo adulto (quello con la giacca celeste) si sposta verso il gruppo di 6 adulti.



Quando l'adulto con la giacca celeste si sposta nuovamente verso la posizione iniziale, 10 adulti cadono, mentre 4 rimangono sull'altalena basculante.



²¹ Invito gli insegnanti che non conoscessero questo 'trenino', e quindi che non avessero mai visto né il video né i vagoni, a visitare la pagina 'Progetto ArAl DDI' nel sito del progetto. Per entrare bisogna cliccare sul trenino nella home page.

B) Spiegazione

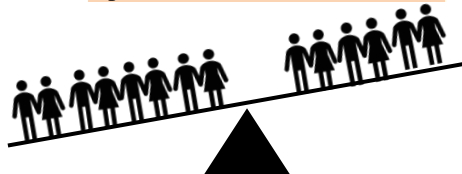
Gli adulti, sopra un'altalena basculante inclinata verso sinistra, vogliono raggiungere una posizione orizzontale e cioè in equilibrio. Per far ciò fanno spostare l'adulto con la giacca celeste da sinistra verso destra. Il peso dei due gruppi non essendo uguale fa nuovamente inclinare l'altalena a destra, facendo perdere l'equilibrio a 10 adulti, che cadono a terra.

2. Emma:

A) Descrizione

14 adulti sono saliti su un'altalena basculante, all'inizio essa pendeva verso sinistra dove c'erano 8 adulti mentre a destra ce ne erano 6. In un secondo momento vediamo che l'altalena basculante pende verso destra perché un uomo vestito di celeste, che inizialmente stava a sinistra si sposta dalla parte opposta, quella dove c'erano 6 adulti. L'uomo vestito di celeste dopo si sposta nuovamente verso la posizione iniziale. Infine 10 adulti cadono perdendo l'equilibrio.

1° scena: ci sono 8 persone a sinistra e 6 a destra.²²



2° scena: l'ottava persona, quella vestita di celeste si sposta verso il gruppo di 6 persona



3° scena: l'adulto con la giacca celeste si sposta nuovamente verso la posizione iniziale, infine 10 adulti cadono perdendo l'equilibrio

B) Spiegazione:

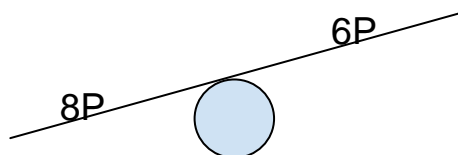
Gli adulti sopra l'altalena basculante pendente verso sinistra decidono di far spostare l'adulto vestito di celeste verso destra per rendere l'altalena basculante in equilibrio. L'adulto vestito di celeste spostandosi e quindi facendo muovere l'altalena basculante provoca la perdita dell'equilibrio di 10 adulti.

3. Miriam:

A) Descrizione

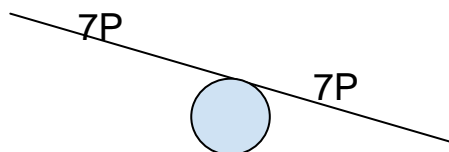
1) Prima scena:

Ci sono 14 persone sopra ad un'altalena basculante. L'asta è inclinata verso sinistra con 8 persone sul lato sinistro e 6 sul lato destro.



2) Seconda scena:

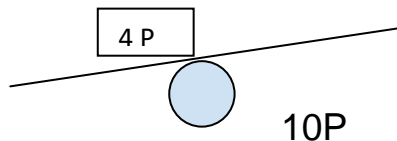
L'ottava persona che stava più vicina al centro sulla parte sinistra dell'asta, si sposta sulla parte opposta, quindi adesso l'asta pende verso destra con 7 persone su entrambi i lati.



²² Una piccola osservazione di tipo antropologico: Emma ha inserito anche delle figurette femminili, ma in realtà sul tronco c'erano soltanto maschi. Ognuno è libero di pensare quello che vuole...

3) Terza scena:

La stessa persona che si era spostata nella seconda scena, si sposta verso la sua posizione iniziale, ovvero a sinistra. Quando l'asta si inizia ad inclinare verso sinistra, 10 persone cadono dall'asta perdendo l'equilibrio e 4 rimangono sopra.



B) Spiega quello che succede nel video:

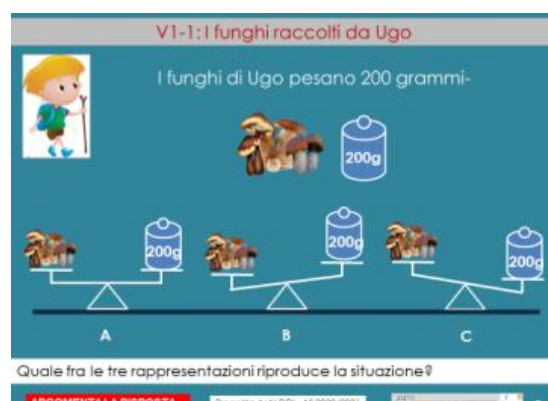
Le persone che sono sull'altalena basculante vogliono raggiungere lo stato orizzontale dell'asta, cioè il suo equilibrio, quindi vogliono fare in modo che la somma dei pesi che stanno su un lato sia uguale alla somma dei pesi che stanno sull'altro lato.

INIZIA IL MEET (CHAT)

1. Si puntualizza la differenza fra descrizione e spiegazione, e ci si concentra sulla spiegazione. È evidente dalle spiegazioni che i ragazzi hanno capito che i 14 adulti si vogliono disporre sull'altalena in modo da raggiungere l'equilibrio e che l'equilibrio lo si ha quando l'asta è in posizione orizzontale.
2. Navarra: Cominciamo a vedere le diapositive del primo vagone.
3. Irhad comincia a leggere la prima diapositiva (Fig. 1) e successivamente la seconda (Fig. 2):



Fig. 1



Fif.2

4. N (Situazione VI-1): Ginevra come risponderesti?
5. Irhad: Dico la A perché se il peso dei funghi è 200 grammi è bilanciata perfettamente e quindi i funghi pesano 200 grammi.
6. N: Non ho capito bene, Ginevra tu che ne pensi?
7. Ginevra: La rappresentazione A è quella corretta perché l'asta della bilancia è orizzontale e quindi si ha l'equilibrio, allora il peso dei funghi è 200 gr. In B i funghi pesano di più di 200 gr perché la bilancia non è in equilibrio, infatti l'asta è inclinata a sinistra. In C i funghi pesano di meno di 200 gr perché la bilancia non è in equilibrio infatti l'asta è inclinata a destra.
8. N: Bene²³, Irhad passa alla successiva diapositiva (Fig. 3).
9. Irhad legge il testo:



²³ Sarebbe importante far rileggere alcune parti della chat in modo da porre in evidenza la diversità tra la frase di Irhad e quella di Ginevra.

Fig. 3

10. Irhad: Sappiamo che il peso dei funghi di Gina è superiore ai 200g e che è superiore anche a quello dei funghi di Ugo.
11. Ludovica: Visto che il peso dei funghi di Ugo era uguale a 200g, il peso dei funghi di Gina era maggiore di 200g perché nella bilancia l'asta non era orizzontale, non era in equilibrio infatti l'asta è inclinata.
12. N: Allora ragazzi ditemi cosa ne pensate di queste due affermazioni:
 - a) Se ho lo stesso peso su entrambi i piatti di una bilancia, allora la bilancia è in equilibrio,
 - b) Se la bilancia è in equilibrio, allora i pesi su entrambi i piatti sono uguali,
13. *Vengono fatti più interventi sovrapposti e non si capisce bene, poi ...*
14. Ginevra: Io vedo che l'asta è in posizione orizzontale e quindi in equilibrio allora so che i pesi sono uguali.
15. N: Bene questo lo chiameremo PRINCIPIO FONDAMENTALE DELLA BILANCIA.
16. N: *(commenta con l'insegnante)* Nonostante i quesiti delle diapositive possano essere semplici sul piano della risoluzione per i ragazzi delle classi terze secondaria, rimangono comunque interessanti dal punto di vista dell'argomentazione. Ludovica leggi la diapositiva successiva (Fig 4).



Fig. 4

17. Ludovica: Secondo me ha ragione Gina perché Ugo anche se ha raccolto più funghi, il suo peso è minore cioè anche se Gina ha raccolto meno funghi di Ugo, il peso dei funghi di Gina è maggiore. *(si commenta che la domanda è stata messa perché quando si sottopone la diapositiva ad alunni più piccoli il numero maggiore di funghi può ingannare facendo pensare che questi pesino di più).* Ludovica legge la diapositiva successiva (Fig. 5):



Fig. 5

18. Ludovica: La bilancia adesso è in posizione orizzontale quindi c'è equilibrio perché Ugo ai suoi funghi ha aggiunto 50g, quindi il peso dei funghi di Ugo adesso è uguale a 200g ovvero al peso dei funghi di Gina.
19. Irhad: No! **Il peso dei funghi di Gina è uguale al peso dei funghi di Ugo più 50 gr.**²⁴
20. N: Se dovessi esprimere in linguaggio matematico le cose che hai detto come faresti?
21. Ludovica: Ehm! Boh! Il peso dei funghi di Gina è uguale al peso dei funghi di Ugo più 50 gr.
22. N: Ok, conoscete Brioshi?
23. Alunni: Sì.
24. N: Allora come puoi far capire a Brioshi "il peso dei funghi di Gina è uguale al peso dei funghi di Ugo più 50 gr"? Puoi rappresentare questa frase in linguaggio matematico in modo che lui capisca?

²⁴ Irhad è stato molto attento, perché capisce che Ludovica si esprime male perché sembra che l'aggiunta dei 50g abbia fatto sì che il peso dei funghi di Ugo diventasse uguale quello dei funghi di Gina.

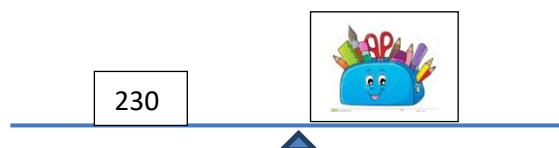
25. Ludovica: $200g=50g+\text{funghi di Ugo}$.
 26. Navarra: Anche qui Brioshi come può fare per capire “il peso dei funghi di Ugo” se parla solo giapponese?
 27. *Nasce una discussione poco ordinata. L'insegnante chiede di rappresentare algebricamente la situazione.*
 28. Mirko: $g=50g+u$.
 29. Emma: Sì! E u è il peso dei funghi di Ugo e si sa che pesano 200 gr, g è il peso dei funghi di Gina.
 30. Miriam ha scritto: $g=u+50$.
 31. N: Consideriamo solo bilance in equilibrio, se adesso io vi chiedo di osservare questa bilancia, sul piatto di sinistra ho un foglietto che mi corrisponde ad un peso da 300 g e sul piatto di destra un foglietto che corrisponde ad un peso da 70 gr e un astuccio:



32. N: Spiegateci come fate a capire il peso dell'astuccio sulla bilancia.
 33. Mirko: Poiché la bilancia è in equilibrio l'astuccio pesa 230 gr.
 34. N: Mirko, tu mi hai detto il peso dell'astuccio ma non come hai fatto a capire come si trova il peso.
 35. Mirko: Ho tolto 70g da destra e da sinistra.
 36. N: Ma tu sul piatto di sinistra non hai un foglietto corrispondente a 70 gr, allora come puoi fare?
 37. Miriam: Sostituisco il foglietto da 300g con la somma di due foglietti uno da 70g e l'altro da 230g.



38. Miriam: A questo punto posso togliere da entrambi i piatti lo stesso foglietto da 70, cioè lo stesso peso.
 39. N: Bene ragazzi, questa sostituzione del peso di 300 gr con due pesi uno da 70g e l'altro da 230g rappresenta il **PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE**. Solo a questo punto posso togliere da entrambi i piatti della bilancia lo stesso peso da 70 gr e la bilancia rimane in equilibrio.



40. N: Così io posso conoscere il peso dell'astuccio. Questo è il **PRIMO PRINCIPIO DELLA BILANCIA**: se togliamo lo stesso peso da entrambi i piatti di una bilancia in equilibrio, la bilancia rimane in equilibrio.

*La lezione termina salutando il prof. Navarra.
 Si prosegue la settimana successiva con l'insegnante.*

²⁵ *L'incontro si è svolto in modo molto produttivo. Sono emersi i nodi della rappresentazione in linguaggio matematico di una situazione in equilibrio, che verranno ripresi e superati nel corso delle lezioni successive. Sarà interessante vedere, nel prossimo intervento di marzo, come matureranno le competenze degli alunni man mano che le situazioni diventeranno più articolate.*