

20 marzo 2025

1

**Commenti** *Insegnante di classe*

**Commenti** *Giancarlo Navarra*

**PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ:** L'attività è stata presentata a tutte e tre le classi prime in cui insegno, in tempi diversi e con questa scansione temporale sez. B-A-C.

Dopo una lezione in tutte e tre le classi con il prof. Navarra sulla traduzione in linguaggio matematico di alcune frasi si è passati alla rappresentazione di una situazione problematica: "Cavalli nel recinto". La situazione problematica prevedeva l'utilizzo di due incognite e l'uso della bilancia come strumento risolutivo del problema per verificare il grado di conoscenza e di abilità dei ragazzi nella traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico e nell'individuazione di relazioni tra gli enti, dei processi operativi e delle definizioni e proprietà.

L'attività si svolge in un primo tempo individualmente, successivamente con il confronto e la discussione collettiva delle traduzioni e delle rappresentazioni di una situazione problematica tratta da "Scatole e biglie".

Il diario contiene la trascrizione integrale dell'attività svolta in prima sez.B, a seguire la trascrizione della parte centrale dell'attività svolta in prima sez.A ed infine quella dell'attività svolta in prima sez.C.

**PRESENTAZIONE DELLA CLASSE:** 1<sup>a</sup> B è composta da 24 alunni, 13 femmine e 11 maschi. Sono presenti 5 alunni stranieri, di seconda generazione, un alunno con BES.

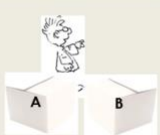
Nel complesso la classe è partecipativa e lavora durante le lezioni.

Gli alunni provengono dalle quattro classi quinte primaria due delle quali hanno già lavorato in ArAl. La fascia più debole mostra difficoltà nei processi logici e nei tempi di concentrazione e di attenzione: spesso non risultano adeguati, mentre un buon gruppo è sensibile e molto partecipativo alle sollecitazioni didattiche.

Nel primo quadrimestre i ragazzi hanno lavorato sul linguaggio come suggerito dall'Unità 1 "Briosi e l'approccio al codice algebrico" e dal loro libro di testo Conosco, risolvo, argomento di Domingo Paola, Alfonsina Sibilla, Nadia Zamboni, successivamente hanno lavorato sulla dimostrazione della veridicità o meno di una uguaglianza tra forme non canoniche dello stesso numero "confrontare senza calcolare", alla rappresentazione e all'utilizzo del numero sconosciuto per giungere a costrutti come le dualità rappresentare/risolvere mediante la metafora della bilancia a piatti e quindi all'equazione e ai suoi principi. In questa lezione viene somministrato un problema che apre a possibili soluzioni con sistemi di equazioni.

1. L'insegnante proietta allo schermo la seguente diapositiva, chiedendo di rispondere solo al quesito A della slide:

**Quante biglie ci sono in ognuna delle due scatole?**




A. Descrivi quello che vedi.

B. La differenza fra il numero di biglie nella scatola A e il numero di quelle nella scatola B è 9.

C. Rappresenta per Briosi la situazione ponendo in relazione le due frasi in modo che Briosi possa trovare il numero delle biglie contenute in ognuna delle due scatole.

2. Lorenzo: Io vedo cinque biglie gialle, quattro rosse e quattro blu e poi vedo due scatole e Bibi e Marta.<sup>1</sup>

3. I: Ok, ma potresti descrivere ancor meglio questa immagine?

4. Lorenzo: Bibi ha due scatole la A e la B, Marta ha 13 biglie e dobbiamo capire quante biglie ci sono nella scatola A e B.

5. I: Aspetta, cosa chiedeva il punto A?<sup>2</sup>

6. Lorenzo: La descrizione.

7. I: Siete tutti d'accordo?

8. Alunni: Sì.

<sup>1</sup> Conviene stabilire subito con la classe che il colore delle biglie è inessenziale, così si evita un potenziale distrattore.

<sup>2</sup> Forse l'insegnante avrebbe potuto formulare una domanda più precisa, ad esempio: "Ci spieghi perché secondo te le tue ultime parole "dobbiamo capire quante biglie ci sono nella scatola A e B" fanno parte della "descrizione"?

9. I: Leggete ora il punto B e sul vostro quaderno scrivete gli enti del problema poi ci confrontiamo.<sup>3</sup>

10. Leonardo: Come enti io ho messo:

- Marta ha le stesse biglie di Bibo,
- Marta ha 13 biglie,
- La differenza fra le due scatole è di 9,
- Non si sa il numero di biglie nelle due scatole.<sup>4</sup>

11. Gorgia: 13 = al numero di biglie che ha Marta.

12. Guendalina: Il numero di biglie di Bibo è uguale al numero di biglie che ha Marta.

13. Barbara: Ho messo:

- Marta e Bibo hanno entrambi 13 biglie,
- 9 è la differenza tra il numero delle biglie nella scatola A e il numero di biglie nella scatola B, e poi come domanda ho messo:<sup>5</sup>
- Numero biglie scatola A?
- Numero biglie scatola B?

14. *Ichiede a Barbara di ripetere.*<sup>6</sup>

15. Barbara: “Io ho scritto che non si sa il numero delle biglie nella scatola A e neppure il numero delle biglie nella scatola B”, mentre Leonardo ha messo il numero di biglie nelle due scatole. L’ho posta come una domanda<sup>8</sup>. Poi mentre lui ha messo “la differenza fra le due scatole è di 9” io l’ho messa più articolata... diciamo: “9 è la differenza tra il numero delle biglie nella scatola A e il numero di biglie nella scatola B”.

16. I: Aiutate Leonardo a migliorare i suoi enti cioè a renderli più precisi.

17. Guendalina: Mah! Manca di dire il numero di biglie.<sup>9</sup>

18. I: Leonardo se tu dovessi riscrivere il tuo terzo ente<sup>10</sup> in modo più preciso che non crei dubbi, come lo riformuleresti?

<sup>3</sup> Qui potevo insistere di più per far esplicitare la regola del gioco: Marta e Bibo hanno lo stesso numero di biglie. Sono d'accordo, è una precisazione necessaria soprattutto nelle fasi iniziali dell'attività.

Approfitto di questo commento per inserire qui una sinteticissima analisi a priori.

Comincio con gli enti e le relazioni (sarebbe importante fare questa distinzione):

#### Enti

$a$  = numero delle biglie nella scatola A

$b$  = numero delle biglie nella scatola B

#### Relazioni

$a+b=13$  (informazione ricavata dalla Regola dell'uguaglianza delle collezioni, che farei verbalizzare in termini relazionali:

“La somma fra il numero delle biglie nella scatola A e il numero delle biglie nella scatola B è uguale a 13”)

$a-b=9$  (la verbalizzazione qui c'è già nel testo della consegna B).

<sup>4</sup> Leonardo confonde ‘oggetti’ e ‘numero di oggetti’, infatti scrive “Marta ha le stesse biglie di Bibo” e “La differenza fra le due scatole”. Bisognerebbe chiarire questo aspetto perché probabilmente ci sono anche altri compagni che hanno la stessa misconcezione. Inoltre dal diario non mi è chiaro se Leonardo abbia scritto anche qualcosa in linguaggio matematico, o se per ora lavoriate solo con il linguaggio naturale. Secondo me sarebbe importante intrecciare i due livelli, perché questo aiuterebbe ad affrontare nodi importanti in relazione ai temi ‘parafrasare’ e ‘tradurre’:

1) Leonardo usa come soggetti delle prime due frasi ‘Marta’: per poter tradurre dovrebbe parafrasarle facendo diventare soggetti i numeri:

a. Marta ha le stesse biglie di Bibo → “Il numero delle biglie nelle due scatole A e B di Bibo è uguale al numero delle biglie di Marta”;

b. Marta ha 13 biglie → “Il numero delle biglie di Marta è 13” (o viceversa).

2) Non so come tradurrebbe ‘La differenza fra le due scatole’;

3) Sul ‘non si sa’ torno nel commento successivo.

<sup>5</sup> Ho il dubbio che Barbara, nel separare le prime due informazioni dalle due successive, che chiama ‘domande’, abbia in mente il modello classico ‘Dati - Da trovare’ e quindi abbia un retropensiero procedurale. Lo stesso osservo in Leonardo (10) quando scrive ‘Non si sa il numero di biglie nelle due scatole’. Ritengo che anche lui vede gli enti sconosciuti non come enti ‘alla pari’ con gli altri da inserire in una rappresentazione, ma qualcosa di diverso. Se le mie ipotesi sono corrette questo aspetto dovrebbe essere chiarito.

<sup>6</sup> Noto che Leonardo non percepisce la differenza tra quanto ha scritto lui e quanto scritto da Barbara, quindi insisto nella richiesta.

<sup>7</sup> Mi sembra di capire dalle parole ‘non si sa il numero delle biglie’ che si sia espresso solo in linguaggio naturale. Oppure lo ha fatto anche in linguaggio matematico? Ma in questo secondo caso come ha rappresentato quel ‘non si sa’?

<sup>8</sup> Non mi è chiaro cosa intenda Barbara con questa affermazione: in che senso ‘Leonardo ha messo il numero di biglie nelle due scatole’? A parte questo, l’ultima definizione è perfetta, andrebbe scritta alla LIM.

<sup>9</sup> Non capisco cosa voglia dire.

|                                                                                                        |         |                  |   |   |   |   |   |   |   |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------|---|---|---|---|---|---|---|-------|
|  progetto <b>ArAl</b> | 2024/25 | Avvio ai sistemi | 3 |   |   |   |   |   |   |       |
| Monteroni SI                                                                                           | I       | I                | 2 | 3 | 4 | 5 | I | 2 | 3 | M. P. |

19. Leonardo non sa come rispondere.
20. Guendalina: Io scriverei la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.
21. I: È importante capire che l'uguaglianza fra membro di destra e di sinistra è una uguaglianza fra numeri e non fra scatole, in particolare non esiste relazione fra le due scatole ma fra...
22. Alunni: ... il numero delle biglie in ogni scatola.
23. I: Quindi possiamo ritenere equivalenti le due frasi:
- 9 è la differenza tra il numero delle biglie nella scatola A e il numero di biglie nella scatola B,
  - la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.<sup>11</sup>
- Adesso andiamo avanti con la richiesta C del problema.<sup>12</sup>
24. Barbara: Per rappresentare il problema per Brioshi ho scritto:
- $$A+B=13 \text{ e } A-B=9.$$
- A e B che sarebbero le due scatole.
25. I: Qualcun altro ha scritto diversamente o vuol aggiungere qualcosa?<sup>13</sup>
26. Giorgia: Io ho scritto n. di biglie di Bibò = b e n. di biglie di Marta = m.
27. Sebastian: Ma negli enti abbiamo già messo che il numero di biglie di Bibò è uguale al numero di biglie di Marta.
28. I: Chiudi il discorso.
29. Sebastian: Cioè basterebbe solo un ente... cioè una lettera.<sup>14</sup>
30. Guendalina e Barbara: Io ho scritto la stessa cosa a lettere minuscole.
31. Leonardo: Io messo in modo un po' diverso: ho messo  $B=n...$
32. I: Attento e pensa a quello detto prima, che cosa intendi per B?
33. Leonardo: Il numero di biglie nella scatola B, allora il numero di biglie nella scatola B è uguale ad n, mentre il numero di biglie nella scatola A l'ho rappresentato con  $n+9$ .<sup>15</sup>
34. Alice: Io ho scritto  $a+b=13$  e  $a-b=9$ .
35. I: Ok, ma qualcuno prima di rappresentare ha specificato cosa rappresentano a e cosa b?<sup>16</sup>
36. Guendalina: a = al numero di biglie della scatola A e b = al numero di biglie della scatola b.
37. I: Quindi ditemi come dovrei impostare ordinatamente la situazione.
38. Alice: Prima dovrei scrivere quello di Guendalina, poi la rappresentazione.
39. I: Quindi se vogliamo mandare la rappresentazione del problema a Brioshi, cosa mandiamo?
40. Alice, Barbara e Guendalina:  $a+b=13$ ,  $a-b=9$ .
41. Leonardo:  $13=n+n+9$ .
42. I: A Leonardo consiglio di chiamare il numero di biglie di Bibò con una b piuttosto che con n così è immediato capire cosa rappresenta b; qualcuno ha scritto diversamente da loro?<sup>17</sup>

<sup>10</sup> In realtà, come scrive la stessa insegnante nella Presentazione dell'Attività quando pone tra gli obiettivi 'l'individuazione di relazioni tra gli enti', la terza frase di Leonardo non descrive un ente, ma una relazione fra enti ( $a-b=9$ ).

<sup>11</sup> Ho perso l'occasione per chiedere in base a quale proprietà potevo asserire che le due uguaglianze erano equivalenti. La domanda sarebbe opportuna di fronte a scritture in linguaggio matematico ma, con scritture espresse solo in linguaggio naturale, è più difficile far emergere la proprietà simmetrica dell'uguaglianza.

<sup>12</sup> Non capisco bene quali scritture, frutto della riflessione collettiva, compaiano ora alla LIM. Teoricamente dovrebbero essere le prime due della mia analisi (Com.4), che poi sono le stesse che declina Guendalina (36) e Alice ribadisce (38):

ENTI

a = numero delle biglie nella scatola A

b = numero delle biglie nella scatola B.

Poco dopo Barbara (24) delinea molto chiaramente l'embrione del sistema. Lo scrivere alla LIM i significati di a e b avrebbe evitato un ritorno alla descrizione degli enti (26-36) che probabilmente ha distratto l'attenzione dalle due frasi proposte da Barbara che verranno poi riprese da Alice, Barbara e Guendalina (40). Le scriverei sotto gli Enti:

RELAZIONI

$a+b=13$

$a-b=9$ .

<sup>13</sup> Non ho volutamente correggere Barbara perché i ragazzi alzavano la mano con concitazione, aspettavo che l'osservazione sull'improprietà di scrivere  $A+B$  venisse da loro. Forse la domanda è troppo generica, si sarebbe potuto porre una questione più mirata, ricollegandosi a quello che scrivo nel Com.10, che richiami l'attenzione sul significato della lettera in matematica.

<sup>14</sup> Dovevo far approfondire di più il pensiero a Sebastian.

<sup>15</sup> La proposta di Leonardo anticipa troppo i tempi perché, siccome secondo me lui sta già risolvendo, non si preoccupa di capire la differenza tra rappresentare e risolvere. Una strategia potrebbe essere quella di proporgli di mettere la sua ultima frase in frigorifero, dal quale sarebbe stata estratta più avanti (Vedi a questo proposito anche il Com.17).

<sup>16</sup> A questo punto gli enti dovrebbero essere stati già precisati.

|                                                                                                        |         |                  |   |   |   |   |   |   |   |              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------|---|---|---|---|---|---|---|--------------|
|  <b>progetto ArAl</b> | 2024/25 | Avvio ai sistemi | 4 |   |   |   |   |   |   |              |
| <b>Monteroni SI</b>                                                                                    | I       | I                | 2 | 3 | 4 | 5 | I | 2 | 3 | <b>M. P.</b> |

43. Silenzio.

44. I: Notate qualche differenza fra le due rappresentazioni?<sup>18</sup>

45. Pietro: Quella di Leonardo è più diretta mi permette di calcolare subito.

46. I: Non cercare di capire se è più facile calcolare quella di Leonardo o quella di Guendalina ecc..., questo al momento sarà un problema di Brioshi.<sup>19</sup>

47. Pietro: Leonardo al posto di usare a e b ha usato una sola lettera sconosciuta.<sup>20</sup>

48. I: Chiudi il discorso, se usi due lettere per due numeri sconosciuti... che succede?

49. Pietro: Ho bisogno di due rappresentazioni.

50. I: ... che sono vere contemporaneamente, non ci scordiamo!

51. Pietro: Con una sola lettera ho bisogno di una sola rappresentazione.<sup>21</sup>

52. I: A questo punto ponendo in relazione le due frasi-uguaglianze provate a fingervi Brioshi e a risolvere le due equazioni poi penseremo alla rappresentazione di Leonardo.

53. Passa del tempo e vedo gli alunni in difficoltà.

54. I: Dove trovate difficoltà?

55. Barbara: Nel mettere in relazione le due rappresentazioni.

56. I: Vi aiuto un po', provate a fare la parafrasi o le parafrasi, sempre in linguaggio naturale, di una delle due uguaglianze che avete indicato negli enti del problema, cioè provate a spiegare in linguaggio naturale lo stesso concetto con parole diverse:

“9 è la differenza tra il numero delle biglie nella scatola A e il numero di biglie nella scatola B”

o

“La somma del numero di biglie nella scatola A e quelle nella scatola B è uguale a 13”.

Da quale volete partire?<sup>22</sup>

57. Pietro: Da  $a-b=9$ . Il numero delle biglie della scatola b più 9 è uguale al numero delle biglie della scatola a.

58. I: Pietro puoi dirlo meglio?

59. Pietro: Mh...

60. I: Ragazzi la frase di Pietro che tipo di frase è?

61. Alunni: In che senso?

62. I: Intendo procedurale o relazionale?

63. Alunni: Procedurale.

64. Lorenzo: Il numero biglie della scatola B più 9...

65. I: Chi lo aiuta?

<sup>17</sup> Non viene citata la proposta di Leonardo (41), che continua con la sua idea senza seguire quello che sta succedendo grazie ad alcuni suoi compagni più 'allineati'. Mi sono preso la briga di esprimere formalmente i passaggi impliciti nel ragionamento di Leonardo (confusi sul piano della rappresentazione, ma corretti su quello della soluzione) per poter seguire meglio i suoi passaggi mentali:

(31-33) Inizia da  $A-B=9 \rightarrow$  sostituisce B con n  $\rightarrow$  pensa  $A-n=9 \rightarrow$  ricava intuitivamente  $A=n+9$ .

(41) Inizia da  $13=A+B \rightarrow$  sostituisce A con  $n+9$  e scrive  $13=n+9+n$  (anzi:  $13:n+n+9$ ). Un'idea potrebbe essere scrivere alla LIM, accanto alle altre, le proposte di Leonardo, dopo aver condiviso con lui l'osservazione dell'insegnante (42) e aver cambiato il suo 'n' in 'b' per favorire il confronto con le altre rappresentazioni. Ad esempio:

|                                          |              |
|------------------------------------------|--------------|
| Alice, Barbara, Guendalina               | Leonardo     |
| ENTI                                     |              |
| a = numero delle biglie nella scatola A  |              |
| b = numero delle biglie nella scatola B. | $B=b$        |
| 13 = numero delle biglie di Marta        |              |
| RELAZIONI                                |              |
| $a+b=13$                                 | $a=b+9$      |
| $a-b=9$ .                                | $13=b+b+9$ . |

<sup>18</sup> Domanda un po' vaga.

<sup>19</sup> È facile dirlo a tavolino, ma ritengo una scelta più produttiva chiedere a Leonardo di argomentare il suo ragionamento illustrando le scritture, e far riflettere quindi sulla differenza tra rappresentare e risolvere.

<sup>20</sup> In realtà le cose non stanno così, e probabilmente il mio suggerimento di riportare alla LIM lo stato d'avanzamento dei lavori in linguaggio matematico potrebbe aiutare a capire. Anche Leonardo ha iniziato con due lettere (31-33), chiamando n il numero delle biglie nella scatola B. Quando scrive  $13=n+n+9$  ha già operato per conto suo la sostituzione di A con  $n+9$ . Gli alunni non hanno capito questo passaggio e pensano che Leonardo usi una sola lettera.

<sup>21</sup> Bella osservazione, molto importante, sarebbe da riprendere e approfondire durante una discussione collettiva, perché sta anche alla base della ragione per cui in certi casi è necessario un sistema di due equazioni.

<sup>22</sup> Non so se il linguaggio naturale sia un buon mediatore.

|                                                                                                                                                                                              |         |                  |   |   |   |   |   |   |   |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------|---|---|---|---|---|---|---|-------|
|  <div>percorsi nell'aritmetica<br/>per lavoro e pensiero prealgebrico</div> <div>progetto <b>ArAl</b></div> | 2024/25 | Avvio ai sistemi | 5 |   |   |   |   |   |   |       |
| Monteroni SI                                                                                                                                                                                 | 1       | 1                | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | M. P. |

66. Guendalina: La somma tra il numero di biglie della scatola B + 9 è uguale al numero di biglie nella scatola A. No, la somma tra il numero di biglie della scatola B e 9 è uguale al numero di biglie nella scatola A.
67. I: Traducete la frase detta da Guendalina in linguaggio matematico.
68. Lorenzo: La prima è  $b+9=a$  e la seconda è...
69. Pietro: Se no,  $a=b+9$ .
70. I: Tutti d'accordo che le due frasi matematiche sono equivalenti?
71. Alunni: Sì.
72. I: Perché potete dire questo?
73. Pietro: Si inverte le due parti.
74. I: È una proprietà!
75. Alunni: La commutativa.
76. I: La proprietà commutativa si applica all'addizione o alla moltiplicazione, cioè ad operazioni, questa è una proprietà dell'uguaglianza! *Silenzio...* si parla di proprietà simmetrica dell'uguaglianza. Vedete di scriverlo. Riprendiamo il nostro sistema:  $a+b=9$  con  $a= b+9$ , ce la fate adesso a risolvere il sistema?
77. *Silenzio.*
78. I: Provate a fingervi Brioshi per risolvere
79. *Silenzio.*
80. I: Guardate l'uguaglianza  $a= b+9$ , ditemi cosa è a e cosa è  $b+9$ .
81. Alunni: Il numero di biglie nella scatola a...
82. I: ... in forma...
83. Pietro: ... non canonica e a è la sua forma canonica.
84. I: Adesso guardate l'altra uguaglianza, lì avete...
85. Alunni: ... la somma tra le due forme canoniche.
86. Leonardo: Io ho un metodo di risoluzione anzi due in realtà: potremmo o sottrarre 9 così ti vengono  $b+b = \dots$
87. I: Un attimo non correre, sottrarre 9 a chi?
88. Leonardo: A 13, fare  $13-9$  e poi dividere per  $2^{23}$   
cioè  $a+b=13$
- $$\begin{array}{r} - \\ a-b= 9 \\ \hline 2b=4 \end{array}$$
- e quindi  $b=2$ .
89. I: Leonardo aspetta un attimo, poi ci spiegherai cosa e perché hai fatto così magari lo affrontiamo in un secondo tempo.
90. Leonardo: Oppure n. biglie scatola  $B=n$ .  
n. biglie scatola  $A=n+9$ .  
rappresentazione per Brioshi:  $13=n+n+9$ ,  $13=2n+9$  e...
91. I: Ok Leonardo, ma vorrei arrivare ad affrontare la soluzione del sistema delle due equazioni con gli strumenti che avete conosciuto fino ad ora, lasciamo in sospeso la tua proposta per ora.
92. Alunni: Mh...
93. I: Abbiamo  $a=b+9$  e  $a+b=13$ , una è l'uguaglianza tra la forma canonica e non canonica dello stesso numero, l'altra è una uguaglianza tra un numero e la somma di due numeri in forma canonica<sup>24</sup> ma gli stessi della precedente. Se chiamo  $a= b+9$ , nell'altra uguaglianza a come posso esprimerla?
94. Leonardo: Ah!..  $b+9+b=13$ . Ho sostituito a con  $b+9$  nella seconda relazione.
95. Sebastian: Abbiamo scritto la forma non canonica di a e poi ho sostituito a con  $b+9$ .
96. I: Perché ci è convenuto<sup>25</sup> fare questa sostituzione?
97. Pietro: Perché così abbiamo una sola letterina e si risolve facilmente. Poi risolvo con la bilancia.
98. I: Bene allora riassumetemi i passaggi essenziali che avete fatto per arrivare a trovare il valore di a e b.
99. Lorenzo: Abbiamo scritto gli enti in linguaggio naturale.
100. Barbara: Poi li abbiamo trascritti in linguaggio matematico e siccome non riuscivamo a risolvere abbiamo fatto la parafrasi.<sup>26</sup>

<sup>23</sup> Leonardo ha delle buone intuizioni ma è ancora un "calcolatore", con lui sto lavorando per superare questo limite e spingerlo a spiegare bene i suoi ragionamenti. Leonardo ha scoperto da solo il metodo di riduzione per risolvere un sistema?!? Sarebbe stato interessante chiedergli ragione delle sue proposte, ma sarebbe difficile perché non so se lui sarebbe capace di spiegare, e intanto gli altri? La situazione non è semplice da gestire.

<sup>24</sup> Non so se ciò che ho detto è completo, in effetti anche  $a+b$  può essere la forma non canonica di 13, mi sono trattenuta dal dirlo per non complicare la situazione e spingere i ragazzi a vedere che a poteva essere sostituita con la somma di  $b+9$ .

<sup>25</sup> Ho sbagliato termine, suggerisce troppo.

<sup>26</sup> Barbara avrebbe dovuto chiarire cosa intendeva dire con "Ho fatto la parafrasi".

|              |   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Monteroni SI | I | I | 2 | 3 | 4 | 5 | I | 2 | 3 | M. P. |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|

101. Pietro: Dopo abbiamo di nuovo trascritto in linguaggio matematico.
102. Sara: E poi abbiamo sostituito la forma canonica con la forma non canonica.
103. Pietro: Così otteniamo una sola rappresentazione con una sola lettera e si può risolvere.
104. Sebastian: Mettiamo sul piatto di sinistra 13 e sull'altro  $2b+9$ .
105. Alunno: Ma non è la stessa cosa mettere  $2b+9$  a sinistra e 13 a destra?
106. I: Tu che dici?
107. Pietro: Sì per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza.
108. Lorenzo: Applico il principio di sostituzione ed ho  $2b+9=4+9$ , poi il primo principio  $2b=4$  e in ultimo il secondo principio  $2b/2=4/2$  così  $b=2$ .
109. Pietro: Ma non si può fare  $2b+9=2+2+9$ ?
110. I: Vediamo, continua tu.
111. Pietro: Beh! con il primo principio ho  $2b=2+2$  e posso scrivere  $b+b=2+2$  e ora... si vede bene che ogni  $b$  vale 2.
112. I: Io continuerei con la bilancia e la relazione  $2b=2+2$  non mi sembra che ti aiuti in situazioni dove i numeri sono alti.
113. *Finisce la lezione.*

26 marzo 2025

2

**CLASSE: 1<sup>a</sup> A, composta da 24 alunni**

Come anticipato nella presentazione dell'attività, pochi giorni dopo ripropongo la stessa situazione problematica alla classe 1<sup>a</sup> sez. A. Riporto qua i punti essenziali della lezione. Faccio descrivere a parole la situazione e poi scrivere gli enti in linguaggio naturale. Per i ragazzi è chiaro che le due scatole contengono un numero di biglie diverso perché hanno nomi diversi.

114. Elena: Marta e Bibò hanno lo stesso numero di biglie cioè 13, la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.
115. I: Adesso provate a rispondere al quesito C della diapositiva.
116. Muharem: La somma tra A e B ...
117. I: Attenzione A è una scatola e ...
118. Muharem: La somma tra il numero di biglie della scatola A e quelle della scatola B è 13.<sup>27</sup>
119. I: Che tipo di frase è?
120. Muharem: Relazionale.
121. I: Ok, magari rispondi con frase completa, prova a trasformarla in frase procedurale,
122. Muharem: Il numero di biglie in A più il numero di biglie in B è uguale a 13.
123. Filippo: Io ho scritto la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.
124. Chiara: Va messo anche: rappresenta per Brioshi la situazione.
125. I: Adesso provate a tradurre in linguaggio matematico gli enti descritti fino ad ora.
126. Muharem: Numero biglie di Marta=13=numero biglie di Bibò, n. biglie in A ≠ da n. biglie in B.<sup>28</sup>
127. I: Adesso dovete tradurre in linguaggio matematico la frase di Muharem: la somma tra il numero di biglie della scatola A e quelle della scatola B è 13 e quella detta da Elena: la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.
128. Ettore: Potrei dire che il numero di biglie contenute nella scatola A è a, e con b il numero di biglie contenute nella scatola B.
129. Muharem:  $a-b=9$  è la traduzione della frase di Elena.
130. Teresa: L'altra è  $a+b=13$ .
131. I: Allora la rappresentazione del problema qual è?
132. Elena:  $a=b-9$  e  $a+b=13$ .
133. I: Cosa ne pensate di ciò che ha detto ora Elena? Elena prova a tradurre in linguaggio naturale l'uguaglianza  $a=b-9$  e poi confrontala con la frase che hai detto all'inizio: la differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9.
134. Elena: Il numero di biglie nella scatola a è uguale al numero di biglie in b meno 9.
135. I: Se parti con una frase relazionale cerca di tradurre anche quest'ultima in modo relazionale.
136. Elena: La differenza tra il numero delle biglie della scatola B e 9 è uguale al numero delle biglie della scatola A. Ci riflette da sé e... Ah già è vero non dicono la stessa cosa.<sup>29</sup>

<sup>27</sup> Non mi è chiaro se gli alunni rappresentino anche in linguaggio matematico quello che dicono.

<sup>28</sup> Le proposte di Muharem mi fanno riflettere sugli ostacoli che gli alunni devono superare per tradurre le informazioni contenute nella situazione problematica. In sé non si può dire che esse siano sbagliate: la frase 'Numero biglie di Marta=13=numero biglie di Bibò' esprime dei concetti corretti, ma diversi fra loro, che intreccia in un'unica rappresentazione: (1) La regola di S&B, e quindi l'uguaglianza tra le collezioni, (2) il numero delle biglie sciolte di Marta, e quindi un ente. È vero che le quantità 'in assoluto' sono uguali, ma nella situazione problematica proposta sono strutturate in maniera differente: Bibò ha le biglie chiuse in due scatole diverse, Marta le sue le ha sciolte e quindi visibili. La frase non traduce fedelmente questa differenza. Provo a mettere ordine:

(1) 'Numero biglie di Marta=13=numero biglie di Bibò'

In questa frase sono mescolati enti: a, b, 13 e relazioni (la traduzione della Regola):  $a+b=13$ .

(2) 'n. biglie in A ≠ da n. biglie in B'

Questa frase è superflua perché si sa dall'inizio che, per la Regola dei colori, a scatole di colore diverso corrispondono numeri diversi di biglie.

In conclusione Muharem mescola tre livelli:

(i) Le due Regole, che rappresentano l'ombrello sotto il quale si sviluppa l'attività;

(ii) Gli enti;

(iii) Le relazioni.

<sup>29</sup> Dovevo poi insistere con Elena affinché esplicitasse il suo pensiero e spiegasse bene il suo pensiero, mi sono lasciata prendere dalla concitazione del momento.

|              |   |   |   |   |   |   |   |   |   |       |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| Monteroni SI | I | I | 2 | 3 | 4 | 5 | I | 2 | 3 | M. P. |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|

137. Hava: La frase “La differenza fra il numero delle biglie della scatola A e il numero delle biglie della scatola B è 9” ti dice che il numero delle biglie della scatola A è maggiore di 9 del numero delle biglie della scatola B.
138. Ettore:  $a=b-9$  è sbagliata, si deve scrivere  $a=9+b$  o  $a=b+9$ .
139. Muharem:  $b=a-9$ .
140. I: Benissimo, allora avete  $a=b+9$  o  $b=a-9$  e poi...
141. Chiara: e  $a+b=13$ .
142. I: Quindi a Brioshi mando le due equazioni  $a=b+9$  e  $a+b=13$ , oppure  $b=a-9$  con  $a+b=13$ . Adesso immaginate di essere Brioshi e provate a risolvere. *Suona la campanella.*
143. I: Riprenderemo la prossima lezione, intanto voi provate a risolvere il sistema.

28 marzo 2025

3

**CLASSE: 1<sup>a</sup> C composta da 24 alunni, ripropongo la stessa situazione<sup>30</sup>, chiedo la descrizione dell'immagine in diapositiva.**  
*Giovanni descrive la situazione e Caterina precisa che il numero di biglie nella scatola A è diverso dal numero di biglia della scatola B e Marta e Bibò hanno lo stesso numero di biglie.*

144. I: In base alla descrizione che avete fatto scrivete gli enti del problema in linguaggio naturale sul vostro quaderno poi quando siete pronti li riassumiamo alla lavagna.
145. Caterina: 13 è uguale al numero di biglie di Marta e di Bibò.<sup>31</sup>
146. Beatrice: Il numero di biglie della scatola A meno il numero di biglie nella scatola B è uguale a 9.
147. Leonardo: Io ho scritto A-B uguale a 9.
148. I: Che ne pensate delle due frasi?
149. Gabriele: Secondo me è meglio quella di Beatrice perché ha spiegato cosa sono A e B.
150. Leonardo: È vero, perché si parla di numeri e poi questa frase ci fa capire che A è maggiore di B di 9.
151. I: Ma attento non si parla di scatole ma...
152. Leonardo: Ah già! Si intende i numeri di biglie.
153. Caterina: Io ho scritto diverso.
154. I: un attimo Caterina, torniamo alla frase di Beatrice, che tipo di frase è? Beatrice me lo sapresti dire?
155. Beatrice: In che senso?
156. I: Intendo procedurale o relazionale.
157. Beatrice: Procedurale, anzi no, relazionale. Una frase procedurale ti dice cosa devi fare, aggiungere, sottrarre.
158. I: Allora prova a dire lo stesso concetto con una frase che indichi la relazione fra i due numeri.
159. Edina: La differenza tra il numero delle biglie della scatola A e il numero di biglie della scatola B è uguale a 9.
160. Lorenzo: Io ho scritto che la scatola A ha più biglie della scatola B.
161. I: L'osservazione è buona ma si può migliorare, possiamo essere più precisi?
162. Lorenzo: La scatola A ha 9 biglie in più rispetto alla scatola B.
163. Alessia: Ma è la stessa cosa.
164. I: Certo, è una parafrasi, quindi esprime lo stesso concetto con parole diverse. Adesso traducete in linguaggio matematico sul quaderno gli enti che avete scritto in linguaggio naturale.
165. Caterina: Io ho scritto  $a+b=13$  e  $a$  è il numero biglie della scatola A invece  $b$  è il numero biglie della scatola B e poi ho scritto  $a+b=13$  e  $a-b=9$  e poi l'ho parafrasata con  $b+9=a$ .
166. I: Perché ti è venuto in mente di parafrasarla?
167. Caterina: Perché poi veniva più semplice metterlo nella traduzione per Brioshi.<sup>32</sup>
168. I: Magari fra un attimo me lo spieghi meglio, adesso sentiamo Beatrice.
169. Beatrice: Io ho scritto  $a=b+9$  e  $13=a+b$  e poi ho scritto che  $a-b=9$  e che  $9=a-b$ , ma sono la stessa cosa.
170. I: Ok, ma spiega perché  $a-b=9$  e  $9=a-b$  sono la stessa cosa.
171. Beatrice: Ehm... c'è la proprietà commutativa.
172. I: Attenzione, la commutativa si applica a due operazioni non ad una uguaglianza.
173. Leonardo: La proprietà simmetrica.
174. I: Finisci la frase.
175. Leonardo: Si è applicata la proprietà simmetrica dell'uguaglianza.
176. I: Qualcuno ha fatto diversamente?
177. Alunni: No!
178. I: Tutti avete usato le due lettere, cioè avete rappresentato i due numeri con lettere diverse?
179. Risposta corale Sì!!
180. I: Vediamo cosa mandare a Brioshi.
181. Caterina:  $a+b=13$  e  $a-b=9$ .
182. Beatrice: Io gli manderei  $13=a+b$  e  $9=a-b$ .

<sup>30</sup> La sensazione è che nella terza lezione sono più sicura e la lezione scorre meglio, o forse i ragazzi rispondono in modo più adeguato. È vero, infatti inserisco molti meno commenti. Qui ne inserisco uno che rimanda a quello che ho scritto nel Com.29: per quello che mi sembra di aver capito, Caterina fonde la Regola di S&B (le due collezioni sono numericamente uguali) con la specificazione che il numero di biglie di Marta è 13. Se si chiedesse a Caterina di tradurre in linguaggio matematico la sua frase cosa scriverebbe?

<sup>31</sup> Potevo chiederle di essere meno ambigua nella definizione. Sì, in modo che emergesse il termine 'somma'.

<sup>32</sup> Ottima idea, che anche altri hanno avuto: 1B: Leonardo (94); 1C: Caterina (167), Leonardo (183), Caterina (189). Sarebbe importante condividerla con tutta la classe.

|                                                                                   |         |                  |    |   |   |   |   |   |   |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------|----|---|---|---|---|---|---|-------|
|  | 2024/25 | Avvio ai sistemi | 10 |   |   |   |   |   |   |       |
| Monteroni SI                                                                      | I       | I                | 2  | 3 | 4 | 5 | I | 2 | 3 | M. P. |

183. Leonardo: Io ho scritto  $x =$  al numero biglie scatola B,  $x+9 =$  numero di biglie della scatola A e a Brioshi manderei  $x+x+9=13$ .<sup>33</sup>
184. I: Allora non tutti avevano rappresentato il problema usando due lettere, comunque iniziamo con la rappresentazione di Caterina e proviamo ad essere Brioshi per trovare il valore di a e b.
185. Caterina: Per prima cosa ho parafrasato  $a-b=9$  con  $b+9=a$  poi la rappresentazione da mandare a Brioshi è  $13=b+9+b$ .
186. I: Frena! Forse a Brioshi dovresti mandare le due rappresentazioni perché ciò che hai fatto fino ad ora (per prima cosa ho parafrasato  $a-b=9$  con  $b+9=a$  poi la rappresentazione da mandare a Brioshi è  $13= b+9+b$ ) fa già parte della risoluzione ed è compito di Brioshi. E poi come hai fatto a trovare questa equazione ( $13= b+9+b$ )?
187. Caterina: Ho messo  $b+9$  al posto di a, cioè ho riscritto a con la forma non canonica.
188. I: Si dice che hai...
189. Caterina: Ho sostituito a con la forma non canonica di a nella uguaglianza  $a+b=9$  così ottengo  $13=b+9+b$  con una sola lettera. Poi ho usato le bilance per risolvere. Applico il principio di sostituzione a  $13=2b+9$  e ottengo  $9+4=2b+9$ , poi il 1° principio di equivalenza e ho  $4=2b$ , poi il 2° principio equivalenza e ho  $4:2=2b:2$  cioè  $2=b$ .
190. Beatrice: Io ho fatto come Caterina.
191. Leonardo: Io ho scritto  $2x+9=13$ , poi  $2x=13-9$ , cioè  $2x=4$ , e poi  $4:2=2$ .
192. I: Leonardo attento, ma tu cosa vai cercando? O meglio cosa ti rappresenta nel problema quel 2 finale? Tu hai scritto che 2 per un numero sconosciuto x, è uguale a 4, quindi con l'operazione  $4:2$  cosa vuoi rappresentare?
193. Leonardo: Le biglie<sup>34</sup> della scatola B.
194. I: Beh! E come le hai indicate?
195. Leonardo: Con x.
196. I: Allora lo devi scrivere, non devi dimenticare x per strada.<sup>35</sup>
197. Leonardo: Cioè devo scrivere  $x=4:2$ .
198. I: Direi proprio di sì.<sup>36</sup>

<sup>33</sup> Conviene condividere con la classe la convenzione che dopo le primissime proposte si decide di adottare delle lettere comuni a tutte le rappresentazioni.

<sup>34</sup> Ci risiamo: l'oggetto al posto del numero.

<sup>35</sup> Mi sembra che l'osservazione sia opaca, infatti Leonardo (196) non ha capito.

<sup>36</sup> Mi sembra che in questa classe io sia riuscita a condurre meglio la lezione o i ragazzi siano stati più collaborativi, anche lo scoglio iniziale trovato nella classe 1B sulla sostituzione della forma non canonica di una incognita nell'altra equazione in questa sezione sia venuta spontaneamente, ho da capire quanti ragazzi siano consapevoli di questa procedura.