

Monteroni SI	I	I	2	3	4	5	I	2	3	M. P.
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------

15 novembre 2024

Commenti *Insegnante di classe*

Commenti *Giancarlo Navarra*

PRESENTAZIONE DELLA CLASSE

La classe prima sez.A è costituita da 24 alunni: la classe è eterogenea, sono presenti alunni con diversi livelli di apprendimento, è presente un unico alunno DSA.

Nel complesso la classe è partecipativa e lavora durante le lezioni. Gli alunni provengono dalle quattro classi quinte primaria due delle quali hanno già lavorato in ArAl. La fascia più debole mostra difficoltà nei processi logici e nei tempi di concentrazione e di attenzione, spesso non sono adeguati, mentre un buon gruppo di alunni si mostra sensibile e molto partecipativo alle sollecitazioni didattiche.

Obiettivo di questo anno è quello di aiutare i ragazzi a riconoscere che le scritture ai due lati dell'uguale rappresentano in forme non canoniche diverse lo stesso numero senza dover effettuare alcun calcolo e a costruire competenze che permettano di concentrarsi sulle relazioni tra le scritture additive e moltiplicative.

Nei primi due mesi di scuola i ragazzi hanno lavorato sul linguaggio come suggerito dall'Unità 1 "Briosi e l'approccio al codice algebrico" e dal loro libro di testo Conosco, risolvo, argomento di Domingo Paola, Alfonsina Sibilla, Nadia Zamboni.

PRESENTAZIONE DELL'ATTIVITÀ:

Dopo un meet introduttivo con il prof. Navarra¹ sulla traduzione dal linguaggio naturale a quello matematico e la presentazione di alcune uguaglianze fra quantità, il lavoro è proseguito con l'insegnante nell'ora curricolare.

.....²

1. L'insegnante proietta allo schermo la seguente diapositiva, chiedendo di confrontare le due quantità e di argomentare la verità dell'uguaglianza prima individualmente sul proprio quaderno, poi collettivamente:

1. Allo schermo interattivo vengono proiettate queste diapositive dal prof. Navarra, i ragazzi rispondono sul loro quaderno e poi a turno cercano di argomentare le loro risposte:

Rappresentate in linguaggio matematico le seguenti frasi:

6. Il numero delle ruote di otto tricicli $m \times 8$
 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
 3×8 8×3 $3 \times 8 =$ $3 \times 8 = 24$

7. L'età di Mario (che ha quattro anni). $e = 4$ 4

8. L'età di Federica, sorella di Mario, che ha tre anni più di lui. $4 + 3 =$ $3 \times f$ $f + 4$
 $4 + 3 =$ ~~età di FED.~~ 7

Rappresenta in linguaggio matematico:

13. Il peso (che non si conosce) di Fabiana oggi. $f + \frac{f}{3} = a$

14. Il peso di Aldo, che ha tre chili più di Fabiana.

15. Il peso di Fabiana, che è ingrassata di 2 chili rispetto ad oggi.

La lezione con la docente riparte da qua.

² Premetto una riflessione di carattere generale dopo aver letto una prima volta tutto il diario. Il fatto che gli alunni abbiano interiorizzato il modello della bilancia è, sul piano del metodo, molto importante, e lo si vede dal modo in cui gestiscono con competenza il cambio di rappresentazione da forme canoniche a non canoniche di un numero e viceversa. Il dubbio che mi viene, leggendo le argomentazioni sviluppate per tutte e quattro le uguaglianze, è che il 'modello bilancia' rischi di essere talmente forte da bloccare altre ipotesi di lavoro. Però potrei sbagliarmi. Entro nel merito di questa riflessione nei commenti successivi agli episodi (2-13), (44-60), (61-81).

Monteroni SI	I	I	2	3	4	5	I	2	3	M. P.
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------

Argomentate la verità di questa uguaglianza: $65+4=65+7^3$.

2. Teresa: Secondo me si deve fare $65+4=65+4+3$.
3. Alessandro: Teresa ha sostituito il 7 con $4+3$ cioè la forma non canonica di 7 e ha fatto bene perché possiamo eliminare il 65 perché è da tutte e due le parti e anche il 4 come nella bilancia⁴.
4. I: Per un momento lascia da parte la bilancia e non togliere niente, ripensa al comando dato per l'esercizio.
5. Joele: Secondo me l'uguaglianza non è vera perché $65+4$ è minore di $65+4+3$.
6. I: Dobbiamo stabilire se l'uguaglianza è vera o no e spiegare il perché lo è o non lo è.
7. Aurora: Non sono uguali perché $65+4$ è minore di $65+4+3$.
8. I: Dove lo vedi?
9. Aurora: Lo vedo perché 65 e 4 sono da entrambi le parti mentre il 3 no.
10. I: Allora $65+4$ è diverso da $65+4+3$, ma possiamo dire qualcosa in più su questa disuguaglianza?
11. Alessandro: Che $65+4 < 65+4+3$.
12. I: Lo aveva detto anche Aurora, tu poi aggiungere qualcos'altro?
13. Diversi ragazzi: $65+4$ è minore di $65+4+3$ di 3.
14. I: Ok, proviamo a fare questa:

$$4+0=3+1+0.$$

15. Ettore: Per me è giusta perché lo zero è da tutte e due le parti ed il 4 da una parte c'è e dall'altra non c'è ma c'è la forma non canonica di 4 cioè $4+3$, se poi lo calcoli lo vedi bene⁵.
16. Teresa: Secondo me $4+0=3+1+0$ è giusta perché noi sappiamo che aggiungendo 0 ad un numero non cambia nulla e $3+1$ è la forma non canonica di 4.
17. I: Quindi lo zero è...
18. Teresa: Non modifica nulla... è l'elemento nullo.
19. I: Elemento neutro, e poi continua... in tutti i tipi di operazione?
20. *Attimo di silenzio.*
21. Teresa e Ettore: È nullo nell'addizione.
22. Alessandro: Anche nella sottrazione.
23. I: E se consideriamo lo 0 nell'operazione di moltiplicazione?
24. Aurora: Non è neutro.
25. I: Aurora spiegaci meglio.
26. Aurora: Perché se si moltiplica un numero qualsiasi per zero il risultato è sempre zero.
27. I: Proviamo a dirlo meglio senza personalismi e non utilizzando frasi procedurali.
28. Alessandro: Il prodotto tra un numero qualsiasi e zero è sempre uguale a zero.
29. I: Quindi se lo zero è l'elemento neutro rispetto all'operazione di addizione, rispetto all'operazione di moltiplicazione lo zero si dice... ?
30. *Silenzio, i ragazzi non ricordano, ad inizio anno avevamo fatto una lezione su questo argomento.*
31. I: Lo zero si dice elemento assorbente, formulate voi la frase completa.
32. Teresa: Lo zero si dice elemento assorbente rispetto all'operazione di moltiplicazione.
33. Joele: Prof posso dire il perché di questo avvenimento?
34. I: Cosa intendi per avvenimento?

³ Episodio (2-13). Comincio proponendo una spiegazione (soltanto verbale) che potrebbe costituire un obiettivo verso il quale puntare: "65 è da entrambe le parti dell'uguale e non lo considero; rimangono 4 e 7. Siccome 4 è minore di 7 posso concludere che $65+4 < 65+7$ ". A fronte di tale ipotetico obiettivo mi chiedo: per raggiungere questa conclusione è produttivo, come fanno gli alunni, appoggiarsi alla bilancia (mi sembra che la stessa insegnante (4) inviti a superare una concezione troppo ristretta di questo strumento)? In altre parole: è necessario (come fa Teresa (2) che dice "Si deve fare") riscrivere 7 in forma non canonica come $4+3$ per confrontarlo con il 4? Non è sufficiente e immediato dire semplicemente che $4 < 7$? Quello che voglio dire è che il concetto della bilancia rimane valido in generale, ma che forse si possono evitare in questi casi trattamenti 'esasperati' e non necessari (ricordo che con trattamento, secondo Duval, si intende, in matematica, 'la trasformazione di rappresentazioni che avvengono all'interno di uno stesso registro; per es.: un numero può essere rappresentato attraverso la sua denotazione (5) o attraverso sue connotazioni (1×5 , $10:2$) ottenibili dalla sua trasformazione applicando opportunamente delle regole'). Quindi: si ritiene in questo caso opportuno esplicitare il trattamento $7 \rightarrow 3+4$? Preciso che la mia è una riflessione aperta, che propongo all'autrice e ad altri lettori il diario come spunto per ulteriori ragionamenti, al fine di migliorare la didattica del 'confrontare senza calcolare'.

⁴ In classe abbiamo incominciato a lavorare, partendo dalle equazioni per gioco, anche con le bilance e i suoi principi, inoltre con la mia collega di scienze i ragazzi hanno costruito delle bilance artigianali con un corredo di pesetti. Per questo motivo molti di loro riportano l'uguaglianza del confronto alla logica della bilancia.

⁵ Ettore ha sempre bisogno di un riscontro dato dal calcolo. Speriamo che gli passi...

Monteroni SI	I	I	2	3	4	5	I	2	3	M. P.
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------

35. Joele: Quello di 3 per 0 è uguale a zero.
36. I: Vai!
37. Joele: 3 per 0 è uguale a zero perché è come fare $0+0+0$.
38. I: Ottimo, adesso fai uno sforzo in più esprimendoti con frasi relazionali.
39. Joele: Il 3 moltiplicato per lo zero...
40. I: Attento...
41. Gabriele: Il triplo di zero è uguale a ...
42. Chiara: Il prodotto tra 3 e zero è uguale alla somma fra 0, 0 e 0 e cioè è uguale a zero.
43. I: Che mi dite di questa uguaglianza? Cioè rispettando il comando iniziale stabilire se l'uguaglianza è vera o no spiegandone il perché:
- $$49+32=45+36.^6$$
44. Chiara: Secondo me è vera perché potrei scrivere $(40+5+4)$ che è la forma non canonica di 49, $+32=40+5+36$ dove $40+5$ è la forma non canonica di 45, così ho $40+5+4+32=40+5+36$, ora il 40 c'è da tutte e due le parti così il 5, rimane 36 che scompongo come $4+32^7$ e così ho: $40+5+4+32=40+5+32+4$. Ora tolgo da entrambe le parti i numeri uguali.
45. I: Tutti hanno capito?
46. Alunni: Sììì.
47. I: Brava, non hai calcolato ed hai utilizzato forma canonica e non per dimostrare l'uguaglianza, c'è qualcuno che ha trovato una strada diversa per dimostrare l'uguaglianza magari in modo più veloce o snello?
48. Teresa: L'uguaglianza è vera perché posso scrivere $45+4+32=49-4+36$, poi posso togliere 4 così: $45+4+36-4=49-4+36$, perché $49-4$ è la forma non canonica di 45 e ora modifico il 36 con la forma non canonica $32+4$, quindi ottengo $45+4+36-4=49-4+32+4$ e...⁸
49. Muharem: No, devi scrivere: $45+4+36-4=45+36$, devi cambiare solo la parte a sinistra cambiando 49 con la forma non canonica $45+4$ e 32 con la forma non canonica $36-4$.
50. Ettore: Ora ho +4 e -4 che sono opposti, ho +4 che con -4 torna zero⁹. E allora rimane $45+36=45+36$.
51. Alessandro: Prof, allora il +4 è un numero opposto.
52. I: Non è che il +4 è un numero opposto, +4 è il numero opposto a -4, si dicono opposti due numeri quando...
53. Alcuni alunni: ... sommati danno zero.
54. I: Formulate una frase completa.
55. Teresa: Due numeri si dicono opposti quando la loro somma è uguale a zero.
56. I: Riguardiamo la dimostrazione di Chiara e quella di Muharem: che cosa potete notare?
57. Silenzio.
58. I: Osservate come il lavoro di Chiara e confrontatelo con il procedimento di Muharem...
59. Silenzio.¹⁰
60. Alunni: È sì...¹¹
61. L'insegnante proietta allo schermo la seguente uguaglianza:

⁶ Episodio (44-60). Ipotizzo anche qui un'argomentazione verbale che mi sembra chiara ed economica: 'A destra dell'uguale 45 ha quattro unità in meno di 49, 36 ne ha quattro in più di 32, $4-4$ è uguale a zero quindi l'uguaglianza è vera'. Siamo d'accordo che dovremmo puntare a rendere capaci gli alunni di organizzare i loro ragionamenti portandoli a non seguire meccanicamente il modello della bilancia e a non appoggiarsi ad una sequenza di scritture in linguaggio matematico dense di trattamenti (Duval)? Per esempio Chiara (44), invece che occuparsi degli aspetti semantici (confrontare i numeri in gioco), si concentra su soluzioni sintattiche (sostituire rappresentazioni con altre rappresentazioni); Teresa (48) procede in modo analogo e perde il controllo sul significato di quello che sta facendo. Le rappresentazioni in linguaggio matematico potrebbero costituire a posteriori - dopo un'argomentazione basata sul linguaggio naturale sul tipo di quella che propongo all'inizio, frutto di una lettura globale dell'uguaglianza - la 'dimostrazione' della verità dell'uguaglianza che (dopo una opportuna negoziazione con la classe) consisterebbe nell'ottenere ai due lati dell'uguale - questa volta sì attraverso dei trattamenti basati su sostituzioni di forme canoniche e non canoniche - due scritture formalmente identiche; per esempio: Muharem (49) interviene a sinistra: $49+32=45+36 \rightarrow 45+4+36-4=45+36 \rightarrow (4-4=0) \rightarrow 45+36=49+36$.

Seconda possibilità, intervenire a destra: $49+32=45+36 \rightarrow 49+32=49-4+32+4 \rightarrow (-4+4=0) \rightarrow 49+32=49+32$.

⁷ Forse era meglio se la correggevo nella dizione: scomporre il 36 con la frase sostituisco il 36 con la forma non canonica $4+32$.

⁸ Teresa si è persa ma non sono intervenuta perché ci ha pensato Muharem.

⁹ Di nuovo Ettore cerca una conferma nel calcolo.

¹⁰ Pur avendo utilizzato entrambi le forme non canoniche e canoniche di diversi numeri, Chiara ha sostituito forme canoniche con non canoniche sia a destra che a sinistra dell'uguaglianza, Muharem ha modificato una parte e mantenuto inalterata l'altra.

¹¹ Qui ho sbagliato, ho suggerito troppo. Non saprei, non mi è chiaro cosa ti aspettassi chiedendo il confronto tra i lavori di Chiara e Muharem.

Monteroni SI	I	I	2	3	4	5	I	2	3	M. P.
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------

$$78+27=74+32.^{12}$$

- e chiedo di argomentare la veridicità dell'uguaglianza.
62. Teresa: Io avrei pensato a $74+4+32-4=74+32$, a sinistra ho sostituito 78 con la forma non canonica $74+4$ e 27 con $32-4$ a sinistra, e ho lasciato la parte di destra uguale. Ora ho $+4$ e -4 che sono opposti e quindi la somma è zero.
63. I: Tutti d'accordo? O qualcuno ha fatto diversamente.
64. Alessandro: Io ho trasformato in $74+4+27=74+27+5$, perché ho sostituito il 78 con la forma non canonica $74+4$ e il 32 con la forma non canonica di $27+5$, poi il 74 è da tutte e due le parti così il 27 quindi rimane $4=5$ quindi l'uguaglianza non è vera anzi $78+27<74+32$ perché $4<4+1$ e $4+1$ è la forma non canonica di 5.
65. I: Ma allora chi ha ragione? Teresa o Alessandro? Per Teresa l'uguaglianza è vera, per Alessandro no.
66. Joelle: Io non ho capito perché Teresa ha fatto $32-4$.
67. Teresa: Perché è la forma non canonica di 27... Ah! Ho sbagliato la forma non canonica di 27 è $32-5$! Così abbiamo $74+4+32-5=74+32$ da qui ho notato che l'uguaglianza non può essere vera perché 74 e 32 ce l'ho da entrambe le parti ma mi rimane $4-5$ e non può tornare.
68. I: Non è che non può tornare è che $4-5$ è uguale a -1 , ci stiamo muovendo nell'insieme dei numeri Reali non nei Naturali; per capire proviamo a muoverci sulla scala di un termometro per la temperatura. Siamo a 4 gradi sopra lo zero e la temperatura scende di 5 gradi, a quale temperatura si arriva? *(alla lavagna disegno un termometro e con i ragazzi ragioniamo sulle possibili azioni che ci permettono di calcolare $4-5$)*
69. Alunni: A -1 .
70. I: Quindi ho $-1=$ a che cosa?
71. Alunni: Niente.
72. I: Che vuol dire niente?
73. Alessandro: Avendo tolto 74 e 32 ho 0.
74. I: Chiudiamo con un discorso completo
75. Alessandro: Alla fine ho $-1=0$, che non va.
76. I: **Ok adesso va meglio.**¹³
77. I: E se provassimo a lavorare sulla parte di destra?
78. Chiara: $78+27=78-4+27+5$, mi rimane $78+27=78+27-4+5$ cioè...
79. I *(la aiuta un po' facendole porre l'attenzione sul 5)*: Pensa ad una sua forma non canonica.
80. Chiara: $78+27=78+27-4+4+1$, quindi $78+27=78+27+1$ ¹⁴.

¹² Episodio (61-81). Formulo anche qui una possibile argomentazione verbale: "74 ha quattro unità meno di 78, 32 ha cinque unità in più, quindi il numero a destra ha un'unità in più rispetto a quello a sinistra. In conclusione: $78+27<74+32$ ". Per quanto riguarda gli interventi di questo episodio, mi sembrano corretti in sé, se li riferiamo al modello mentale della bilancia, ma anche in questo caso dispersivi e quindi, dal mio punto di vista, poco produttivi. E se pensassimo ad una riflessione collettiva su questo aspetto? Il contenuto potrebbe essere questo: avete capito molto bene come applicare il modello-bilancia utilizzando i concetti di sostituzione e di rappresentazione canonica e non canonica di un numero. Avete visto però, anche, come sia facile perdersi o non riuscire a seguire i ragionamenti dei compagni se le scritture diventano troppo elaborate. Qualche volta è più efficace appoggiarsi ad altre forme di ragionamento che non si basino su rappresentazioni in linguaggio matematico.

Un'altra strategia, affiancabile alla precedente, potrebbe prevedere un'attività individuale in cui ogni alunno scriva la sua argomentazione; il confronto dirà quali sono le argomentazioni più produttive.

Una terza strategia potrebbe essere: dividere la classe in tre gruppi A, B e C: Il gruppo A argomenta solo in linguaggio naturale, ricorrendo a quello matematico lo stretto necessario; il gruppo B solo in linguaggio matematico; il gruppo C può usare entrambi i linguaggi. Si potrebbero prevedere argomentazioni di questo tipo:

A. "74 ha quattro unità meno di 78, 32 ha cinque unità in più, quindi il numero a destra ha un'unità in più rispetto a quello a sinistra. In conclusione l'uguaglianza non è vera: $78+27$ è minore di $74+32$ ";

B. Prendo come riferimento la parte in linguaggio matematico dell'argomentazione di Alessandro (64):

$78+27=74+32 \rightarrow 74+4+27=74+27+5 \rightarrow 74+4+27=74+27+5 \rightarrow 4<5 \rightarrow 78+27<74+32$ ".

C. Prendo come riferimento ancora l'argomentazione, questa volta completa, di Alessandro (64): "Ho scritto $74+4+27=74+27+5$ perché ho sostituito il 78 con la forma non canonica $74+4$ e il 32 con la forma non canonica di $27+5$, poi il 74 è da tutte e due le parti così il 27 quindi rimane $4=5$, quindi l'uguaglianza non è vera, anzi $78+27<74+32$ perché $4<4+1$ e $4+1$ è la forma non canonica di 5".

Il confronto collettivo tra le scritture proposte permetterebbe di giungere a delle pur provvisorie conclusioni su chiarezza, completezza, coerenza, economia di questa o quella tipologia di argomentazioni.

¹³ A questo punto dovevo insistere sul far concludere tutte le uguaglianze con una dizione precisa e rigorosa, vedi intervento (44).

¹⁴ Dato che erano arrivati a dimostrare la disuguaglianza dovevo porre l'attenzione su quali proprietà ha applicato per giungere a quella conclusione.

Monteroni SI	I	I	2	3	4	5	I	2	3	M. P.
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------

81. Teresa: $78+27 < 78+27+1$, nella parte di sinistra ha 1 in più della parte di destra.

Termina la lezione.¹⁵

Prima/Seconda primaria (molt e div con 0 a propi)

Far riflettere gli alunni su una serie di esempi e poi far conquistare una regola generale sulla base delle loro congetture.

- $23 \times 0 = 0$
- $48 \times 0 = 0$
- $0 \times 11 = 0$
- $0 \times 86 = 0$
- $0 : 15 = 0$ ($0 : a = 0, a \neq 0$)
- $7 : 7 = 1$

Giancarlo Navarra – Convegno CARME – Pistoia - 17-18 maggio 2024

16

¹⁵ Nella prossima vorrei trattare il ruolo dello 0 prendendo esempi dalle successive due diapositive. (Mi rivolgo al prof. Navarra: Che ne dici? Proseguo così?). Penso di aver risposto nei commenti precedenti.